

原子核形状相变的壳模型研究*

侯占峰¹ 张宇¹ 刘玉鑫^{1,2;1)}

1(北京大学物理学院理论物理研究所 北京 100871)
2(北京大学重粒子物理教育部重点实验室 北京 100871)

摘要 利用玻色映射方法,我们在壳模型中计算了原子核低激发态性质的一些特征量,并与这些量在相互作用玻色子模型的动力学对称性中的数值进行比较,得到原子核的集体运动形状相在壳模型中的对应,分析了壳模型中的单极对、四极对和四极-四极相互作用对形状相的影响,还在壳模型中研究了 $U(5)$ — $O(6)$ 相变过程,得到的结果与在相互作用玻色子模型中得到的结果一致.

关键词 形状相变 壳模型 相互作用玻色子模型 玻色子映射方法

1 引言

相互作用玻色子模型(IBM)^[1]可以很好地描述中重质量区的原子核的低激发性质^[2].这个模型有3个动力学对称性: $U(5)$, $SU(3)$ 和 $O(6)$,它们分别对应原子核的球形、长椭球形和 γ 不稳定形状相^[3-6].此外,还有一个 $\overline{SU(3)}$ (生成元的四极张量算符中的结构常数由 $-\sqrt{7}/2$ 换为 $\sqrt{7}/2$)对称性,它对应原子核的扁椭球形状相.人们已经得到相互作用玻色子模型的相图^[4, 7, 8],它可以用一个扩展的Casten三角形描述.近几年,这种和原子核的几何形状相联系的相变引起了广泛关注^[9-15].

相互作用玻色子模型是壳模型的一个较好的近似^[16].因此,这些相变过程应该可以在壳模型中进行研究.人们已经利用一个包含单极对作用和四极-四极相互作用的壳模型研究了从超导相到转动相的相变过程^[17].最近^[18],人们又利用包含这两种相互作用的壳模型讨论了 $U(5)$ — $SU(3)$ 相变过程,其中 $U(5)$ 和 $SU(3)$ 相分别用单极对作用和四极-四极相互作用表示.

一般来说,在实际的壳模型中(例如我们即将讨论的包含单极对、四极对和四极-四极相互作用的壳模型)找到形状相是不容易的.而且,人们对于壳模型中这些相互作用对形状相的影响还没有系统的了解.我

们这一工作的目的正是利用一种近似方法,由之给出原子核的形状相在壳模型中的对应,讨论形状相对壳模型中各种相互作用的依赖关系,然后利用壳模型讨论原子核的形状相变.

2 模型和计算方法

原子核的低激发态性质及形状特征可以由原子核的低激发能谱及电磁跃迁几率来表征.对于能谱,我们采用一个在很多实际计算中广泛应用的壳模型哈密顿量^[19-21]

$$H_F = H_0 - \frac{1}{2}g_0 P_0^\dagger P_0 - \frac{1}{2}g_2 P_2^\dagger \cdot P_2 - \frac{1}{2}k : Q_2 \cdot Q_2 : , \quad (1)$$

其中 $H_0 = \sum_{jm} \varepsilon_j a_{jm}^\dagger a_{jm}$ 是单体相互作用, g_0 , g_2 和 k 分别是单极对、四极对和四极-四极相互作用的强度, $:$ 表示对费米子算符的正规乘积. P_0^\dagger , P_2^\dagger 和 Q_2 分别表示为

$$P_0^\dagger = \sum_{jm} a_{jm}^\dagger \tilde{a}_{jm}^\dagger ; \quad (2)$$

$$P_2^\dagger = \sum_{j_1 m_1 j_2 m_2} \langle j_1 m_1 | q_{2\mu} | j_2 m_2 \rangle a_{j_1 m_1}^\dagger \tilde{a}_{j_2 m_2}^\dagger ; \quad (3)$$

$$Q_2 = \sum_{j_1 m_1 j_2 m_2} \langle j_1 m_1 | q_{2\mu} | j_2 m_2 \rangle a_{j_1 m_1}^\dagger a_{j_2 m_2} , \quad (4)$$

其中 $\tilde{a}_{jm} = (-1)^{j-m} a_{j-m}$, $q_{2\mu} = r^2 Y_{2\mu}$.

*国家自然科学基金(10425521, 10575004), 国家重大基础研究发展规划(G2000077400), 教育部重点科研项目(305001)和教育部博士点专项研究基金(20040001010)资助

1) E-mail: liuyx@phy.pku.edu.cn

对于电磁跃迁几率, 最重要的是电四极跃迁的约化几率 $B(E2; L_i \rightarrow L_f) = \frac{1}{2L_i + 1} \langle L_f || T(E2) || L_i \rangle^2$, 其中 $T(E2)$ 为 Q_2 乘以一个有效电荷.

壳模型的计算空间和工作量巨大, 难以实现. 为解决这一问题, 我们利用 Dyson 型玻色子映射方法^[22-24]. 在这个方法中, 一个对应偶偶核的多费米子空间映射到一个所谓的理想玻色子空间. 相应地, 每一个费米子算符映射为玻色子算符. 在实际计算中, 一般要对玻色子空间进行截断. 在计算中, 把费米子空间截断为所谓的 SD 子空间, 即只保留角动量等于 0 和 2 的费密子对. 很多实际计算表明, 这是一个有效的截断^[25]. 这样, 最终的哈密顿量表示为 $H_B(s^\dagger, s, d^\dagger, d)$, 它正是相互作用玻色子模型的哈密顿量. 此外, 我们不区分质子和中子, 这对应于 IBM-1. 为了突出相互作用强度的影响, 把单粒子轨道和相应的单粒子能量取为定值. 以 50—82 的大壳层为例, 采用文献^[26]的取法, 即将单粒子轨道取为 $2d_{5/2}, 1g_{7/2}, 3s_{1/2}, 1h_{11/2}, 2d_{3/2}$, 它们的能量分别取为 0, 0.8, 1.3, 2.5, 2.8 (单位是 MeV). 单粒子波函数取为简谐振子波函数, 并且谐振子常数取为 $b^2 = 1.0A^{1/3}\text{fm}^2$, 其中 A 在计算中取为 130. 然后对截断后的哈密顿量在 $U(5)$ 基下对角化, 并且其中的总核子对数取为 10, 得到原子核的低激发能谱, 进而得到电四极跃迁的约化跃迁几率.

3 原子核的形状相在壳模型中的对应

为了在壳模型中分析原子核的形状相结构, 我们需要把壳模型和相互作用玻色子模型的动力学对称性相对应. 为了实现这个目标, 着重分析一些特征量. 能量比值 $R_{42} = \frac{E_{4_1}}{E_{2_1}}$, $R_{62} = \frac{E_{6_1}}{E_{2_1}}$, $R_{02} = \frac{E_{0_2}}{E_{2_1}}$ 和 $R_{22} = \frac{E_{2_2}}{E_{2_1}}$ 可以标志低激发态的特征. 对于电四极跃迁, 考虑这样一些 $B(E2)$ 比值: $B_{42} = \frac{B(E2; 4_1 \rightarrow 2_1)}{B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)}$, $B_{64} = \frac{B(E2; 6_1 \rightarrow 4_1)}{B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)}$, $B_{02} = \frac{B(E2; 0_2 \rightarrow 2_1)}{B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)}$ 和 $B_{22} = \frac{B(E2; 2_2 \rightarrow 2_1)}{B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)}$. 所有这些量在相互作用玻色子模型的动力学对称性下的值都列在表 1 中. 通过比较这些量在壳模型中的值和表 1 中的值, 就可以得到原子核形状相在壳模型中的对应.

首先讨论单极对相互作用的效应. 计算中所用参数为: $g_0 \in [0, 0.50]$, $g_2 = k = 0$. 低能级能量比值和 $B(E2)$ 比值相对于 g_0 的变化行为分别如图 1 和图 2. 从图中可以看出, 只要 g_0 的值大于

0.12, 所有的特征量都对应 $U(5)$ 相的特征值. 例如, $R_{42} \approx R_{22} \approx 2.0$, $R_{62} \approx 3.0$, $R_{02} \approx 1.9$, $B_{42} \approx 1.8$, $B_{62} \approx 2.4$, $1.7 \leq B_{02} \leq 1.8$ 和 $1.3 \leq B_{22} \leq 1.7$. g_0 的这个下限值依赖于所取的单粒子轨道和相应的能级. 单极对作用的强度可以由经验公式 $g_0 \sim 20/A$ (其中 A 为原子核的质量数)^[27] 决定, 我们在计算中取的 $A = 130$, 可以知道, 对于实际的原子核, 得到的对应 $U(5)$ 相的单极对作用强度与经验数值是一致的.

表 1 相互作用玻色子模型的动力学对称性下, 10 个玻色子系统的一些特征量的数值(其中标有星号的值表示它依赖于哈密顿量中的额外参数)

	R_{42}	R_{62}	R_{02}	R_{22}	B_{42}	B_{64}	B_{02}	B_{22}
$U(5)$	2.0	3.0	2.0*	2.0*	1.8	2.4	1.8	1.8
$O(6)$	2.5	4.5	4.5*	2.5*	1.4	1.5	0.0	1.4
$SU(3)$ 和 $\overline{SU(3)}$	3.3	7.0	24*	24*	1.4	1.5	0.0	0.0

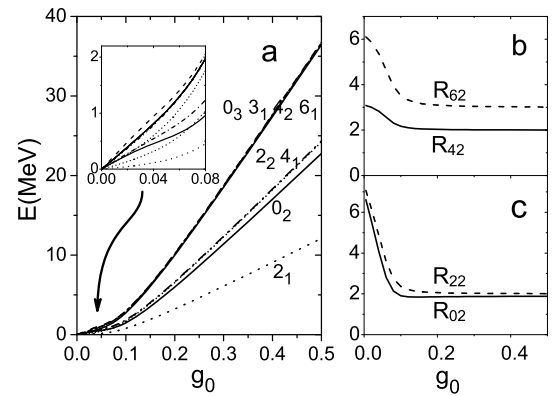


图 1 单极对作用强度对低激发能谱结构的影响

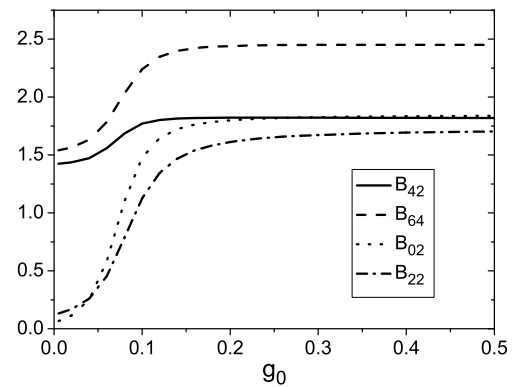


图 2 单极对作用强度对电四极跃迁的影响

下面讨论形状相对四极-四极相互作用强度的依赖关系. 实际上, 人们已经知道这一项正是 Elliott 模型^[28], 其中 Q_2 是具有 $SU(3)$ 对称性的四极张量. 但是, 在实际的壳模型中, 由于单体项的影响, 系统的状态并不总是对应 $SU(3)$ 相. 因此, 有必要对其效应进

行研究. 计算中所用参数为: $k \in [0, 0.50]$, $g_0 = g_2 = 0$. 得到的低激发能谱结构和 $B(E2)$ 比值相对于 k 的变化行为分别如图3, 图4所示. 为了更清晰地显示能级结构, 在图3的(a)部分只给出了 $k \in [0, 0.20]$ 的结果.

从图3和图4可以明显地看出, 所有列在表1中的特征量都关于一个特殊点 $k \approx 0.10$ 近似对称. 仔细分析这个点的值, $R_{42} \approx R_{22} \approx 2.5$, $R_{62} \approx R_{02} \approx 4.5$, $B_{42} \approx 1.4$, $B_{64} \approx 1.5$, $B_{02} = 0$ 以及 $B_{42} \approx 1.4$, 并与表1对比可知, 这个点正好对应 $O(6)$ 相. 这也可以从图3的能级结构明显地看出来, 例如出现 $2_2 - 4_1$ 双重简并态和 $0_2 - 3_1 - 4_2 - 6_1$ 四重简并态.

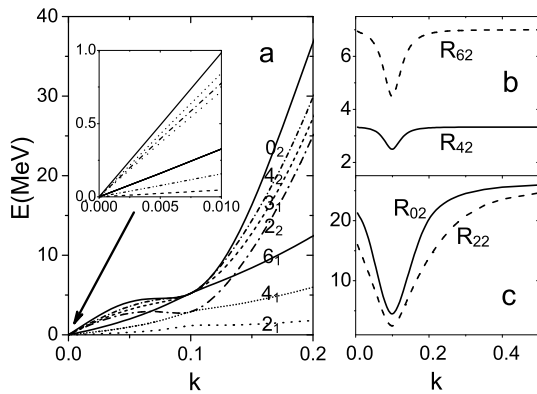


图3 四极-四极相互作用强度对低激发能谱结构的影响

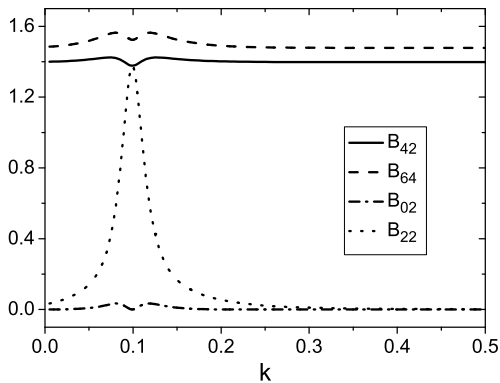


图4 四极-四极相互作用强度对电四极跃迁的影响

由同样的分析方法可知, k 值很小 ($k \in (0.000, 0.005)$) 和 k 值很大 ($k > 0.2$) 的区域特征值都和表1中的 $SU(3)$ 相 (或 $\overline{SU(3)}$ 相) 的特征值对应. 表1中所列的特征值在 $SU(3)$ 和 $\overline{SU(3)}$ 相下的值完全相同, 为区分这两个相, 需要新的物理量. 人们知道, 第一激发态的四极矩 $Q(2_1^+) = \frac{4}{5} \sqrt{\pi} \langle 2 \ 2 \ 2 \ 0 | 2 \ 2 \rangle \langle 2_1^+ | \hat{T}(E2) | 2_1^+ \rangle$ 可以表征原子核形状的特征, 并且它在 $SU(3)$ 相下为负值, 在 $\overline{SU(3)}$ 相下为正值, 而在 $O(6)$ 相下等于0^[8]. 计算结果表明, 随着 k 值从小于0.1增加到大于0.1, $Q(2_1^+)$ 值从正值变到零后再变到负值, 并且其绝对值关于 $k = 0.1$ 近似对称. 因此可以得到结论:

形状相随着四极-四极相互作用强度的演化模式是 $\overline{SU(3)} \rightarrow O(6) \rightarrow SU(3)$, 这对应一个从扁椭球到长椭球的相变过程, 相变临界点是不定轴转子相. 这个结果和此前得到的原子核形状相随着结构参数 χ 的变化行为^[8] 完全一致.

最后, 讨论四极对作用对形状相的影响. 计算中所用参数为: $g_2 \in [0, 0.15]$, $g_0 = 0.15$, $k = 0$ (这样选择参数的理由是: 在对原子核的实际描述中, 一般应有 $g_2 < g_0$). 计算得到的原子核低激发能谱结构和 $B(E2)$ 比值相对于 g_2 的变化行为分别如图5和图6所示. 由图可知, 当四极对作用强度较小时 ($g_2 \in [0, 0.04]$), 所有特征值都和 $U(5)$ 的特征值近似对应. 在 $g_2 \in [0.07, 0.10]$ 区域, 特征量显示出轴对称转动相的对应值. 进一步计算 $Q(2_1^+)$ 值知, 它为负值, 这表明这个区域对应 $SU(3)$ 相. 在两个相之间的区域, 存在一个 $U(5) - SU(3)$ 相变过程.

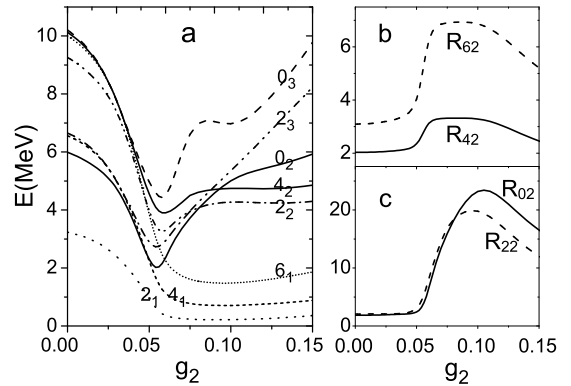


图5 四极对作用强度对低激发能谱结构的影响

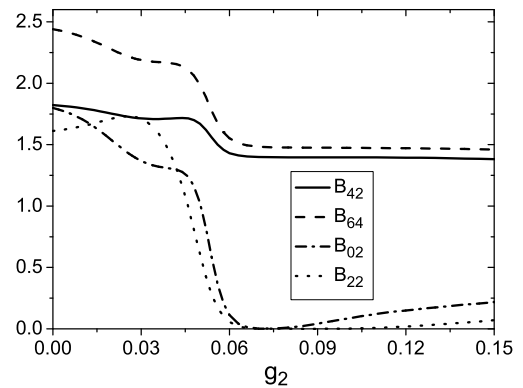


图6 四极对作用强度对电四极跃迁的影响

4 原子核形状相变的壳模型讨论

利用前面比较特征量在壳模型和相互作用玻色子模型的动力学对称性下的数值的方法, 我们给出了原子核的集体运动形状相在壳模型中的对应. 下面

我们在壳模型中讨论原子核的形状相变, 因为 $U(5)$ — $SU(3)$ 相变过程已经在文献[18]中予以讨论, 这里只讨论 $U(5)$ — $O(6)$ 相变过程.

描述这个相变过程的模型可以表示为

$$H = (1 - \alpha)H_{U(5)} + \alpha H_{O(6)}, \quad (5)$$

其中 α 是控制参数, $H_{U(5)}$ 和 $H_{O(6)}$ 分别标记 $U(5)$ 和 $O(6)$ 相在壳模型中的对应. 利用上一部分的结果, 选取 $H_{U(5)} = H_0 - 0.2g_0 P_0^\dagger P_0$, $H_{O(6)} = H_0 - 0.05g_0 P_0^\dagger P_0 - 0.01g_2 P_2^\dagger P_2 - 0.01k : Q_2 : Q_2$. 很显然, $\alpha = 0$ 对应 $U(5)$ 相, $\alpha = 1$ 对应 $O(6)$ 相.

首先计算基态波函数的重叠 $\langle 0_1; \alpha | 0_1; \alpha_0 \rangle$, 其中 $\alpha_0 = 0$ 或者 1. 计算结果如图 7 所示. 两条线的变化行为说明, 随着 α 由 0 增大到 1, 系统由 $U(5)$ 相演化到 $O(6)$ 相, 其交点为相变的临界点. 由之可以确定 $U(5)$ — $O(6)$ 相变的临界点 $\alpha_c \approx 0.8$.

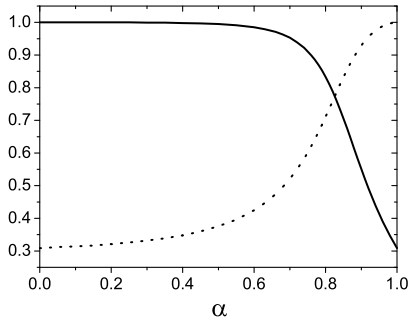


图 7 $U(5)$ — $O(6)$ 相变过程中基态波函数的重叠(其中实线为 $\langle 0_1; \alpha | 0_1; \alpha = 0 \rangle$, 点线为 $\langle 0_1; \alpha | 0_1; \alpha = 1 \rangle$)

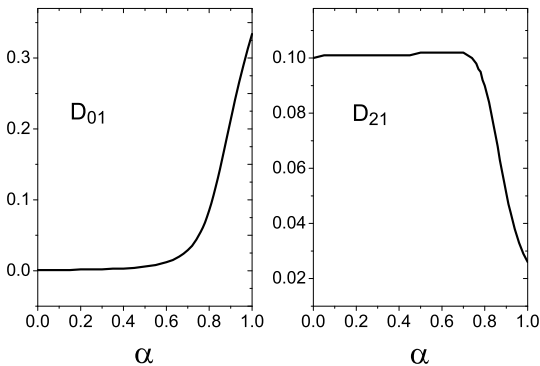


图 8 $U(5)$ — $O(6)$ 相变过程中 d 玻色子的平均占有率 D_{01} 和 D_{21}

其次计算了在原子核形状相变中常用的两个特征量 $D_{01} = \frac{1}{N} \langle 0_1 | n_d | 0_1 \rangle$ 和 $D_{21} = \frac{1}{N} (\langle 2_1 | n_d | 2_1 \rangle -$

$\langle 0_1 | n_d | 0_1 \rangle)$, 它们标志 d 玻色子数的平均占有率. 所得结果如图 8 示. 由图 8 可以看出, 原来在 IBM 中得到的相变行为^[11]都可以在壳模型中得到很好的描述, 而且临界区与 IBM 的结论完全一致.

我们还计算了 $B(E2)$ 比值, 限于篇幅在这里仅给出 B_{02} 和 B_{42} 的结果, 并示于图 9 中. 从图 9 可以看出, 这些量在临界区都有明显的变化行为. 这些结果和 IBM 得到的结果也完全一致.

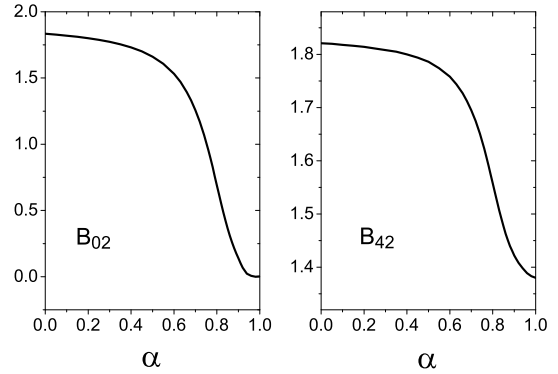


图 9 $U(5)$ — $O(6)$ 相变过程中 $B(E2)$ 比值 B_{02} 和 B_{42}

5 结果和讨论

通过在 SD 对截断的核子对空间中, 利用壳模型计算原子核低激发态性质的一些特征量, 并与相互作用玻色子模型的动力学对称性下的数值进行比较, 给出了原子核的集体运动形状相在壳模型中的对应, 讨论了形状相(或集体运动模式)对于壳模型中单极对、四极对和四极-四极相互作用的依赖关系. 结果表明, 只要强度超过一个下限, 单极对作用就产生振动模式(或相互作用玻色子模型中的 $U(5)$ 对称性); 随着四极-四极相互作用强度增加, 原子核会出现从扁椭球相 ($\overline{SU(3)}$ 相) 到长椭球相 ($SU(3)$ 相) 的相变, 而且在它们之间存在一个不定轴转子相 ($O(6)$ 相) 作为相变的临界点; 在一个固定的对应 $U(5)$ 相的单极对作用强度下, 四极对作用在其强度较弱时的效应很小, 随着其强度增加, 会引起 $U(5)$ — $SU(3)$ 相变.

利用形状相在壳模型中的对应, 在壳模型中讨论了原子核的形状相变. 以 $U(5)$ — $O(6)$ 相变过程为例, 我们说明, 利用壳模型可以得到相互作用玻色子模型揭示的原子核形状(对称性)相变的各种特征.

参考文献(References)

- 1 Iachello F, Arima A. The Interacting Boson Model. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1987
- 2 Casten R F, Warner D D. Rev. Mod. Phys., 1988, **60**: 389
- 3 Ginocchio J, Kirson M. Phys. Rev. Lett., 1980, **44**: 1744
- 4 Dieperink A E L, Scholten O, Iachello F. Phys. Rev. Lett., 1980, **44**: 1747
- 5 Bohr A, Mottelson B R. Phys. Scr., 1980, **22**: 468
- 6 van Isacker P, CHEN J Q. Phys. Rev., 1981, **C24**: 684
- 7 FENG D H, Gilmore R, Deans S R. Phys. Rev., 1981, **C23**: 1254
- 8 Jolie J, Casten R F, von Brentano P et al. Phys. Rev. Lett., 2001, **87**: 162501
- 9 Leviatan A, Ginocchio J N. Phys. Rev. Lett., 2003, **90**: 212501
- 10 Rowe D G. Phys. Rev. Lett., 2004, **93**: 122502
- 11 Iachello F, Zamfir N V. Phys. Rev. Lett., 2004, **92**: 212501
- 12 Cejnar P. Phys. Rev. Lett., 2003, **90**: 112501
- 13 PAN F, Draayer J P, LUO Y A. Phys. Lett., 2003, **B576**: 297
- 14 Rowe D J. Nucl. Phys., 2004, **A745**: 47; Rowe D J, Turner P S, Rosensteel G. Phys. Rev. Lett., 2004, **93**: 232502; Turner P S, Rowe D J. Nucl. Phys., 2005, **A756**: 333; Rosensteel G, Rowe D J. Nucl. Phys., 2005, **A759**: 92; Rowe D J, Thiamova G. Nucl. Phys., 2005, **A760**: 59
- 15 LIU Y X, MU L Z, WEI H Q. Phys. Lett., 2006, **B633**: 49
- 16 Iachello F, Talmi I. Rev. Mod. Phys., 1987, **59**: 39
- 17 Rowe D J, Bahri C, Wijesundera W. Phys. Rev. Lett., 1998, **80**: 4394; Bahri C, Rowe D J, Wijesundera W. Phys. Rev., 1998, **C58**: 1539
- 18 LUO Y A, PAN F, WANG T et al. Phys. Rev., 2006, **C73**: 044323
- 19 Kishimoto T, Tamura T. Nucl. Phys., 1972, **A192**: 246
- 20 Takada K. Nucl. Phys., 1985, **A439**: 489
- 21 Higashiyama K, Yoshinaga N, Tanabe K. Phys. Rev., 2002, **C65**: 054317
- 22 Dyson F G. Phys. Rev., 1956, **102**: 1217, 1230
- 23 Janssen D, Donau F, Frauendorf S. Nucl. Phys., 1971, **A172**: 145
- 24 Klein A, Marshalek E R. Rev. Mod. Phys., 1991, **63**: 375
- 25 CHEN J Q. Nucl. Phys., 1997, **A626**: 686; CHEN J Q, LUO Y A. Nucl. Phys., 1998, **A639**: 615; LUO Y A, CHEN J Q, Draayer J P. Nucl. Phys., 2000, **A669**: 101; ZHAO Y M, Yoshinaga N, Yamaji S et al. Phys. Rev., 2000, **C62**: 014304; LUO Y A, PAN F, Bahri C et al. Phys. Rev., 2005, **C71**: 044304
- 26 Uher R A, Sorensen R A. Nucl. Phys., 1966, **86**: 1
- 27 Bes D R, Sorensen R A. In: Baranger. M, Vogt. E ed. Advance in Nuclear Physics. Vol. 2. New York: Plenum Press, 1969. 129
- 28 Elliott J P. Proc. R. Soc. London, 1958, **A245**: 128, 562

Nuclear Shape Phase Transition in the Shell Model*

HOU Zhan-Feng¹ ZHANG Yu¹ LIU Yu-Xin^{1,2;1)}¹(Department of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)²(The Key Laboratory of Heavy Ion Physics, Ministry of Education, Beijing 100871, China)

Abstract By comparing the values of some quantities obtained in the SD pair truncated shell model and the dynamical symmetries of the interacting boson model (IBM), we identify the nuclear shape phases in the shell model. We study the dependence of the nuclear shape phases on the monopole-pair, quadrupole-pair and quadrupole-quadrupole interaction strength, respectively, in the shell model. We also investigate the vibrational to γ -soft rotational phase transition in the shell model. The obtained results coincide with those obtained in the IBM very well.

Key words shape phase transition, shell model, interacting boson model, boson mapping

* Supported by National Natural Science Foundation of China (10425521, 10575004), Major State Basic Research Development Program (G2000077400), Key Grant Project of Chinese Ministry of Education (305001) and Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20040001010)

1) E-mail: liuyx@phy.pku.edu.cn