非对易相空间中各向同性谐振子的能级分裂*

王剑华[1] 李康[2] 刘鹏[1]

1 (陕西理工学院物理系 汉中 723000)
2 (杭州师范学院物理系 杭州 310036)

摘要 非对易空间的效应是出现在弦尺度下的一种物理效应. 本文介绍了量子力学非对易空间的代数关系; 讨论了非对易相空间中服从玻色–爱因斯坦统计的粒子的连续性条件, 最后给出了非对易相平面和非对易相空间中的线性谐振子的能级分裂.

关键词 非对易相空间 非对易量子力学 能级分裂

1 引言

量子力学和量子场论是研究微观粒子和场的运动规律的科学, 在原子和分子的尺度下, 空间是对易的, 即 $[x_i,x_j]=0\,(i,j=1,2,3)$. 但是, 在弦的尺度下出现了空间的非对易效应. 最近, 非对易空间的问题在物理学界引起了极大的兴趣和关注[1—26], 在这个方面主要是受到了具有非零背景场的D膜理论的低能效应的研究的推动. 通常研究非对易空间问题的理论和方法主要来自量子场论, 然而, 在量子力学的框架下研究一些可解模型的非对易空间效应也是非常有意义的工作. 文献[5—18]对非对易量子力学的微扰方面有了广泛的研究. 本文中, 我们感兴趣的是在非微扰的情况下探讨非对易量子力学的一些具有本质性的问题.

下面首先要讨论的是非对易量子力学代数的一般情况, 然后把它应用于二维各项同性谐振子进行非微扰方面的研究, 这个模型是严格可解的, 文献[5—8]中充分讨论了它的空间–空间非对易性引起的物理效应. 我们的工作重点是把单粒子量子力学的产生和消灭算符推广到非对易空间中服从玻色–爱因斯坦统计的态矢量空间的玻色子系统, 在非微扰的情况下, 重新定义产生和消灭算符. 并且在给出的相空间变量的对易关系中包含了空间–空间和动量–动量两个方面的非对易性. 其方法是把非对易相空间中的产生和消灭算符用对易相空间的产生和消灭算符进行线性展开. 利用这个方法, 进一步讨论了二维和三维各项同性的线性谐振子的能级和能级分裂情况.

2 非对易量子力学代数

在对易空间中, 采用自然单位制($\hbar=c=1$), 坐标和动量的对易关系为

$$\begin{cases}[x_i,p_j]=\mathrm{i}\delta_{ij}\\ [x_i,x_j]=0\\ [p_i,p_j]=0\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n), \qquad (1)$$

在弦的尺度下出现了空间的非对易效应. 在非对易空间中, 用 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 来表示坐标和动量算符, 它们的对易关系由下面的公式给出:

$$\begin{cases}[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=\mathrm{i}\delta_{ij}\\ [\hat{x}_i,\hat{x}_j]=\mathrm{i}\Theta_{ij}\\ [\hat{p}_i,\hat{p}_j]=\mathrm{i}\bar{\Theta}_{ij}\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n), \qquad (2)$$

其中 $\{\Theta_{ij}\}$ 和 $\{\bar{\Theta}_{ij}\}$ 是完全反对称矩阵. 在后面我们用算符 $\hat{F}$ 表示非对易空间算符, F 表示对易空间算符. 用对易相空间中的 x 和 p 来表示非对易相空间中的 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$, 有如下的关系式:

$$\begin{cases}\hat{x}_i=a_{ij}x_j+b_{ij}p_j\\ \hat{p}_i=c_{ij}x_j+d_{ij}p_j\end{cases},(i,j=1,2,\cdots,n), \qquad (3)$$

2005 – 07 – 20 收稿
∗国家自然科学基金(10447005, 90303003), 浙江省自然科学基金 (M103042, 102011, 102028) 和陕西理工学院科研基金 (SLG0319) 资助

利用文献[1]的结果, 有:

$$\Theta\bar{\Theta}=4\alpha\beta(\alpha\beta-1)\cdot I, \tag{4}$$

其中α和β都是对称矩阵, I为单位矩阵, 于是有

$$\begin{cases}\hat{x}_i=\alpha x_i-\dfrac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j\\ \hat{p}_i=\beta p_i+\dfrac{1}{2\beta}\bar{\Theta}_{ij}x_j\end{cases},\quad (i,j=1,2\cdots,n). \tag{5}$$

在对易相空间中, 变量(x_i,p_i)与消灭–产生算符$(a_i,\,a_i^+)$有如下的关系:

$$x_i=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}(a_i+a_i^+),\qquad p_i=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}(a_i-a_i^+),\quad (i,j=1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

这里a_i和a_i^+满足对易关系: $[a_i,a_j]=[a_i^+,a_j^+]=0$; $[a_i,a_j^+]=i\delta_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$.

为了方便起见在非对易相空间中也引入消灭–产生算符$\hat{a}_i$和$\hat{a}_i^+$, 它们形式如下:

$$\hat{a}_i=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}\left(\hat{x}_i+\frac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\hat{p}_i\right),\quad \hat{a}_i^+=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}\left(\hat{x}_i-\frac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\hat{p}_i\right), \tag{7}$$

这和对易相空间中的消灭–产生算符$(\hat{a}_i,\,\hat{a}_i^+)$形式相同. 由(7)式及(5)式很容易得到如下对易关系:

$$\begin{cases}\left[\hat{a}_i,\hat{a}_j^+\right]=\delta_{ij}+\mathrm{i}\mu\omega\Theta_{ij}\\ \left[\hat{a}_i,\hat{a}_j\right]=\left[\hat{a}_i^+,\hat{a}_j^+\right]=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\mu\omega\left(\Theta_{ij}-\dfrac{1}{\mu^2\omega^2}\bar{\Theta}_{ij}\right)\end{cases}, \tag{8}$$

在非对易情形下, 为了服从Bose-Einstein统计, 由$[\hat{a}_i^+,\hat{a}_j^+]$对易, 得到连续性条件:

$$\bar{\Theta}=\mu^2\omega^2\Theta \text{ 或 } \bar{\Theta}_{ij}=\mu^2\omega^2\Theta_{ij},\ (i,j=1,2,\cdots,n), \tag{9}$$

把(9)式代入(5)式中, 可得

$$\begin{cases}\hat{x}_i=\alpha x_i-\dfrac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j\\ \hat{p}_i=\beta p_i+\dfrac{1}{2\beta}\mu^2\omega^2\Theta_{ij}x_j\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n). \tag{10}$$

现在把(6)和(10)代入(7)中可得到$(\hat{a}_i,\,\hat{a}_i^+)$和$(a_i,\,a_i^+)$两者的关系:

$$\begin{cases}\hat{a}_i=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)a_i+\dfrac{\mathrm{i}}{4}\mu\omega\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\Theta_{ij}a_j+\\ \qquad\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)a_i^++\dfrac{\mathrm{i}}{4}\mu\omega\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\Theta_{ij}a_j^+\\ \hat{a}_i^+=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)a_i^+-\dfrac{\mathrm{i}}{4}\mu\omega\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\Theta_{ij}a_j^++\\ \qquad\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)a_i-\dfrac{\mathrm{i}}{4}\mu\omega\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\Theta_{ij}a_j\end{cases}, \tag{11}$$

从因果关系知道$\hat{a}_i$应由a_i表示, $\hat{a}_i^+$应由a_i^+表示, 所以从(11)式看出$\alpha=\beta$. 设:

$$\alpha=\beta=:\alpha, \tag{12}$$

于是(11)式变为

$$\begin{cases}\hat{a}_i=\alpha a_i+\dfrac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\Theta_{ij}a_j\\ \hat{a}_i^+=\alpha a_i^+-\dfrac{\mathrm{i}}{2\alpha}\mu\omega\Theta_{ij}a_j^+\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n). \tag{13}$$

由(4), (9), (12)式可得

$$\Theta_{il}\Theta_{lj}=-\theta^2\delta_{ij},\quad \theta=\frac{2\alpha}{\mu\omega}\sqrt{1-\alpha^2}, \tag{14}$$

(10)式变成

$$\begin{cases}\hat{x}_i=\alpha x_i-\dfrac{1}{2\alpha}\Theta_{ij}p_j\\ \hat{p}_i=\alpha p_i+\dfrac{1}{2\alpha}\mu^2\omega^2\Theta_{ij}x_j\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n). \tag{15}$$

3 非对易相平面上谐振子的能级分裂

当$n=2$时, 根据(14)式可以解出

$$\Theta=\begin{pmatrix}0&\theta\\-\theta&0\end{pmatrix}, \tag{16}$$

这时(15)式变成

$$\begin{cases}\hat{x}_1=\alpha x_1-\dfrac{1}{2\alpha}\theta p_2,\quad \hat{x}_2=\alpha x_2+\dfrac{1}{2\alpha}\theta p_1;\\ \hat{p}_1=\alpha p_1+\dfrac{1}{2\alpha}\mu^2\omega^2\theta x_2,\quad \hat{p}_2=\alpha p_2-\dfrac{1}{2\alpha}\mu^2\omega^2\theta x_1.\end{cases} \tag{17}$$

在非对易相空间中二维线性谐振子的Hamiltonian算符为

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}(\hat{p}_1\hat{p}_1+\hat{p}_2\hat{p}_2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(\hat{x}_1\hat{x}_1+\hat{x}_2\hat{x}_2), \tag{18}$$

把(17)式代入(18)式,

$$\begin{aligned}\hat{H}\ =\ &\frac{1}{2\mu}(p_1p_1+p_2p_2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1x_1+x_2x_2)+\\ &2\alpha\omega\sqrt{1-\alpha^2}(p_1x_2-p_2x_1),\end{aligned} \tag{19}$$

令$h_0=2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$, 则(19)式可写成

$$\begin{aligned}\hat{H}\ =\ &\frac{1}{2\mu}(p_1p_1+p_2p_2)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1x_1+x_2x_2)+\\ &h_0\omega(p_1x_2-p_2x_1).\end{aligned} \tag{20}$$

把变量x_i和p_i按下面的方式变换成X_α和P_α(这里和

后面的α, $\beta=a,b$)

$$X_a=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_1-\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_2,\ X_b=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_1+\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_2,$$
$$P_a=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_1+\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_2,\ P_b=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_1-\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_2, \tag{21}$$

上面的X_α和P_α满足如下的关系:

$$X_\alpha=X_\alpha^+,\quad P_\alpha=P_\alpha^+,\quad [X_\alpha,X_\beta]=[P_\alpha,P_\beta]=0,$$
$$[X_\alpha,P_\beta]=\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}.$$

现在定义下面的消灭–产生算符A_α, A_α^+:

$$A_\alpha=\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}}P_\alpha+\sqrt{\frac{1}{2}}X_\alpha,\quad A_\alpha^+=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}}P_\alpha+\sqrt{\frac{1}{2}}X_\alpha,$$
$$(\alpha=a,b), \tag{22}$$

这里的A_a和A_α^+满足如下的关系:

$$[A_\alpha,A_\beta]=[A_\alpha^+,A_\beta^+]=0,\quad [A_\alpha,A_\beta^+]=\delta_{\alpha\beta},$$

粒子数算符$N_\alpha=A_\alpha^+A_\alpha$的本征值$n_a$=0, 1, 2, 3,$\cdots$, 可以把Hamiltonian算符写成两个频率$\varOmega_a$和$\varOmega_b$分开的形式:

$$\hat{H}=\varOmega_a\left(A_a^+A_a+\frac{1}{2}\right)+\varOmega_b\left(A_b^+A_b+\frac{1}{2}\right), \tag{23}$$

其中$\varOmega_a=\omega(1+h_0)$; $\varOmega_b=\omega(1-h_0)$, $\hat{H}$的本征值是:

$$h(n_a,n_b)=\varOmega_a\left(n_a+\frac{1}{2}\right)+\varOmega_b\left(n_b+\frac{1}{2}\right)=$$
$$\omega[n_a+n_b+h_0(n_a-n_b)+1], \tag{24}$$

由于$h(n_a,n_b)$取分立值, 所以(24)式并不像对易相空间中的情况. 零点能量绝对值不为零, 而是ω. 对于$n_a=n_b=n$的情况, 本征值为$\omega(2n+1)$; 对于$n_a=-n_b=n$的情况, 本征值为$\omega(2h_0n+1)$. 从公式(25)可得到本征谱的间隔为: $\Delta h(\Delta n_a,\Delta n_b)=\omega[\Delta n_a+\Delta n_b+h_0(\Delta n_a-\Delta n_b)+1]$; 其中$\Delta n_a=n_a'-n_a$, $\Delta n_b=n_b'-n_b$, 在本征谱中存在着不同的间隔. 对于$\Delta n_a=\Delta n_b=\Delta n$的情况, 分裂间隔为$\Delta h(\Delta n,\Delta n)=\omega(2\Delta n+1)$; 对于$\Delta n_a=-\Delta n_b=\Delta n$的情况, 分裂间隔为$\Delta h(\Delta n,-\Delta n)=\omega(2h_0\Delta n+1)$, 对于这两种情况: 零点值都为$\omega$, 但第二种情形是依靠着参数$\alpha$的分裂.

在α趋近于1的极限情况下, 有$h_0\to 0$, $\varOmega_a$, $\varOmega_b\to\omega$, 因此本征值谱$h(n_a,n_b)\to\omega(n_a+n_b+1)$, 这就回到了对易空间的结果.

4　非对易相空间$(n=3)$中线性谐振子的能级分裂

在$n=3$时, 可以得到(14)式的3个解, 它们分别为:

$$\varTheta_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\theta\\0&-\theta&0\end{pmatrix},\varTheta_2=\begin{pmatrix}0&0&\theta\\0&0&0\\-\theta&0&0\end{pmatrix},\varTheta_3=\begin{pmatrix}0&\theta&0\\-\theta&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{25}$$

把(25)式应用到(15)式可以得到3种类型对应关系如下,

$$\begin{cases}\hat{x}_1=\alpha x_1,\ \hat{x}_2=\alpha x_2-\dfrac{1}{2\alpha}\theta p_3,\ \hat{x}_3=\alpha x_3+\dfrac{1}{2\alpha}\theta p_2\\ \hat{p}_1=\alpha p_1,\ \hat{p}_2=\alpha p_2+\dfrac{\mu^2\omega^2}{2\alpha}\theta x_3,\ \hat{p}_3=\alpha p_3-\dfrac{\mu^2\omega^2}{2\alpha}\theta x_2\end{cases}; \tag{26}$$

$$\begin{cases}\hat{x}_1=\alpha x_1-\dfrac{1}{2\alpha}\theta p_3,\ \hat{x}_2=\alpha x_2,\ \hat{x}_3=\alpha x_3+\dfrac{1}{2\alpha}\theta p_1\\ \hat{p}_1=\alpha p_1+\dfrac{\mu^2\omega^2}{2\alpha}\theta x_3,\hat{p}_2=\alpha p_2,\ \hat{p}_3=\alpha p_3-\dfrac{\mu^2\omega^2}{2\alpha}\theta x_1\end{cases}; \tag{27}$$

$$\begin{cases}\hat{x}_1=\alpha x_1-\dfrac{1}{2\alpha}\theta p_2,\ \hat{x}_2=\alpha x_2+\dfrac{1}{2\alpha}\theta p_1,\ \hat{x}_3=\alpha x_3\\ \hat{p}_1=\alpha p_1+\dfrac{\mu^2\omega^2}{2\alpha}\theta x_2,\ \hat{p}_2=\alpha p_2-\dfrac{\mu^2\omega^2}{2\alpha}\theta x_1,\hat{p}_3=\alpha p_3\end{cases}. \tag{28}$$

三维情况下非对易相空间中线性谐振子Hamiltonian算符为

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}(\hat{p}_1\hat{p}_1+\hat{p}_2\hat{p}_2+\hat{p}_3\hat{p}_3)+$$
$$\frac{1}{2}\mu\omega^2(\hat{x}_1\hat{x}_1+\hat{x}_2\hat{x}_2+\hat{x}_3\hat{x}_3), \tag{29}$$

选择(27)式给出的情况进行讨论, 其他两个情况讨论类似. 把(27)式代入(29)式

$$\hat{H}=(1-\alpha^2)\left[\frac{1}{2\mu}(p_1p_1+p_3p_3)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1x_1+x_3x_3)+\right.$$
$$\left.\frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha^2}\omega(p_1x_3-p_3x_1)\right]+\alpha^2H, \tag{30}$$

其中$H=\dfrac{1}{2\mu}(p_1p_1+p_2p_2+p_3p_3)+\dfrac{1}{2}\mu\omega^2(x_1x_1+x_2x_2+x_3x_3)$, 现在设$h_0'=\dfrac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha^2}$, 则(30)式可写成:

$$\hat{H}=(1-\alpha^2)\left[\frac{1}{2\mu}(p_1p_1+p_3p_3)+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x_1x_1+x_3x_3)+\right.$$
$$\left.h_0'\omega(p_1x_3-p_3x_1)\right]+\alpha^2H. \tag{31}$$

下面, 做如下变换,

$$
\begin{aligned}
X_a&=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_1-\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_2,\quad X_b=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_1+\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_2,\\
P_a&=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_1+\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_2,\quad P_b=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_1-\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_2,\\
X_c&=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_1-\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_3,\quad X_d=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_1+\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_3,\\
P_c&=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_1+\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_3,\quad P_d=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_1-\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_3,\\
X_e&=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_2-\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_3,\quad X_f=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_2+\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_3,\\
P_e&=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_2+\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_3,\quad P_f=\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}}p_2-\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}x_3,
\end{aligned}
\tag{32}
$$

这里的 X_α 和 P_α 满足如下的关系:

$$
X_\alpha=X_\alpha^+,\quad P_\alpha=P_\alpha^+,
$$
$$
[X_\alpha,X_\beta]=[P_\alpha,P_\beta]=0,\quad [X_\alpha,P_\beta]=\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta},
$$

其中这里的 $(\alpha,\beta)=\{(a,b)\}$ 或 $\{(c,d)\}$ 或 $\{(e,f)\}$.

定义消灭–产生算符 A_α, A_α^+ 为

$$
A_\alpha=\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}}P_\alpha+\sqrt{\frac{1}{2}}X_\alpha,\quad A_\alpha^+=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}}P_\alpha+\sqrt{\frac{1}{2}}X_\alpha,
$$
$$
(\alpha=a,b,c,d,e,f),\tag{33}
$$

容易验证, A_a 和 A_α^+ 是满足如下关系:

$$
[A_\alpha,A_\beta]=[A_\alpha^+,A_\beta^+]=0,\quad [A_\alpha,A_\beta^+]=\delta_{\alpha\beta},
$$

这里的 $(\alpha,\beta)=\{(a,b)\}$ 或 $\{(c,d)\}$ 或 $\{(e,f)\}$, 粒子数算符 $N_\alpha=A_\alpha^+A_\alpha$ 的本征值 n_a=0, 1, 2, 3,$\cdots$. 于是(31)式可写成

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\ =&\ (1-\alpha^2)\left[\Omega_c\left(A_c^+A_c+\frac{1}{2}\right)+\right.\\
&\left.\Omega_d\left(A_d^+A_d+\frac{1}{2}\right)\right]+\alpha^2H,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

其中这里的 $\Omega_c=\omega(1+h_0')$; $\Omega_d=\omega(1-h_0')$, 它的本征值为:

$$
\begin{aligned}
h(n_c,n_d)\ =&\ (1-\alpha^2)\left[\Omega_c\left(n_c+\frac{1}{2}\right)+\Omega_d\left(n_d+\frac{1}{2}\right)\right]+\\
&\alpha^2E=(1-\alpha^2)\omega[n_d+n_c+1+\\
&h_0'(n_c-n_d)]+\alpha^2E,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

其中 E 为 H 的本征值. 从上面不难看出, 这里的 $h(n_c,n_d)$ 在非对易相空间的分裂都是依靠参数 α 的. 对于 $n_d=n_c=0$ 的情形, 本征值为 $(1-\alpha^2)\omega+\alpha^2E$. 对于 $n_d=n_c=n$ 的情况, 本征值为 $(1-\alpha^2)\omega(2n+1)+\alpha^2E$; 对于 $-n_d=n_c=n$ 的情况, 本征值为 $(1-\alpha^2)\omega(1+2h_0'n)+\alpha^2E$, 对于这两种情况: 零点值都为 $(1-\alpha^2)\omega+\alpha^2E$. 从本文公式(38)式可以得到本征谱的间隔为: $h(\Delta n_c,\Delta n_d)=(1-\alpha^2)\omega[\Delta n_d+\Delta n_c+1+h_0'(\Delta n_c-\Delta n_d)]+\alpha^2\Delta E$; 其中 $\Delta n_c=n_c'-n_c$, $\Delta n_d=n_d'-n_d$, 在本征谱中存在着不同的间隔, 对于 $\Delta n_c=\Delta n_d=\Delta n$ 的情况, 分裂间隔为 $\Delta h(\Delta n,\Delta n)=(1-\alpha^2)\omega(2\Delta n+1)+\alpha^2\Delta E$; 对于 $\Delta n_c=-\Delta n_d=\Delta n$ 的情况, 分裂间隔为 $\Delta h(\Delta n,-\Delta n)=(1-\alpha^2)\omega(2h_0'\Delta n+1)+\alpha^2\Delta E$. 同时, 在 α 趋近于1的极限情况下, 有 $h_0'\to 0$, Ω_c, $\Omega_d\to\omega$, 因此本征值谱 $h(n_c,n_d)\to E$, 这就回到了对易空间的结果.

5 讨论

在本文中, 首先是把单粒子量子力学的产生和消灭算符推广到非对易空间中服从玻色–爱因斯坦统计的态矢量空间的玻色子系统, 在非微扰的情况下, 重新定义产生和消灭算符. 并且在给出的相空间变量的对易关系中包含了空间–空间和动量–动量两个方面的非对易性. 然后把非对易相空间中的产生和消灭算符用对易相空间的产生和消灭算符进行线性展开. 利用这个方法, 进一步讨论了二维各项同性的线性谐振子的能级和能级分裂情况. 所得到的结果在 α 趋近于1的极限情况下, 回到对易空间的结果.

空间的非对易效应在超弦场论以及与之相关的超对称规范场论和超引力场论中有着非常重要的作用. 目前, 这个方面的研究在理论物理学界引起了广泛的关注, 成了热门的研究课题之一. 然而, 尽管人们对非对易相空间量子力学问题的研究已取得了一些令人鼓舞的结果, 但是大部分工作才刚刚展开, 非对易相空间中问题在各个物理层面的理论和实验探讨都是非常必要和非常有意义的.

参考文献(References)

1 LI Kang, WANG Jian-Hua, CHEN Chi-Yi. Representation of Noncommutative Phase Space. Modern Physics Letter, 2005, **A20**(34)(to appear). hep-th/0409234

2 Connes A, Douglas M R, Schwarz A. JHEP, 1998, **9802**: 003. hep-th/9711162

3 Douglas M R, Hull C M. JHEP, 1998, **9802**: 008. hep-th/9711165

4 Ardalan F, Arfaei H, Sheikh-Jabbari M M. JHEP, 1999, **9902**: 016. hep-th/9810072

5 CHU S C, HO P M. Nucl. Phys., 1999, **B550**: 151. hep-th/9812219

6 CHU S C, HO P M. Nucl. Phys., 2000, **B568**: 447. hep-th/9906192
7 Schomerus V. JHEP, 1999, **9906**: 030. hep-th/9903205
8 Banerjee R, Lee C, YANG H S. Seiberg-witten-type Maps for Currents and Energy-Momentum Tensors in Noncommuative Gauge Theories. hep-th/0312103
9 ZHANG Jian-Zu. Phys. Lett., 2004, **B584**: 204
10 Chaichian M, Sheikh-Jabbari M M, Tureanu A. Phys. Rev. Lett., 2001, **86**: 2716. hep-th/0010175
11 Gamboa J, Loewe M, Rojas J C. Phys. Rev., 2001, **D64**: 067901. hep-th/0010220
12 Gamboa J et al. Int. J. Mod. Phys., 1999, **A17**: 2555. hep-th/0106125
13 Muthukumar B, Mitra P. Phys. Rev., 2002, **D66**: 027701. hep-ph/0204149
14 Nair V P, Polychronakos A P. Phys. Lett., 2001, **B505**: 267. hep-th/0011172
15 Kochan D, Demetrian M. hep-th/0102050
16 Morariu B, Polychronakos A P. Nucl. Phys., 2001, **B610**: 531. hep-th/0102157
17 Hatzinikitas A, Smyrnakis I. J. Math. Phys., 2002, **43**: 113. hep-th/0103074
18 Bellucci S, Neressian A, Sochichiu C. Phys. Lett., 2001, **B522**: 345. hep-th/0106138
19 Smailagic A, Spallucci E. Phys. Rev., 2002, **D65**: 107701. hep-th/0108216
20 Christiansen H R, Schaposnik F A. Phys. Rev., 2002, **D65**: 08600. hep-th/0106181
21 Acatrinei C. JHEP, 2001, **0109**: 007. hep-th/0107078
22 HO P M, KAO H C. Phys. Rev. Lett., 2002, **88**: 151602. hep-th/0110191
23 Alvarez-Gaume L, Wadia S R. Phys. Lett., 2001, **B501**: 319. hep-th/0006219
24 Micu A, Sheikh-Jabbari M M. JHEP, 2001, **0101**: 025. hep-th/0008057
25 Riad I F, Sheikh-Jabbari M M. JHEP, 2000, **0008**: 045. hep-th/0008132
26 Douglas M R, Nekrasov N A. Rev. Mod. Phys., 2001, **73**: 977. hep-th/0106048

Energy Splitting of Isotropic Harmonic Oscillator in Noncommutative Phase Space*

WANG Jian-Hua[1]　LI Kang[2]　LIU Peng[1]

1 (Shaanxi College of Science and Engineer, Hanzhong 723000, China)
2 (Hangzhou Teacher's College, Hangzhou 310036, China)

Abstract Space coordinates may become noncommutative near the string scale. In this paper, we give a representation of the noncommutative coordinates and noncommutative momenta. We then apply this representation to compute the eigen energy splitting of the isotropic harmonic oscillator in two and three dimensional noncommutative spaces.

Key words NCS, NCQM, energy splitting

Received 20 July 2005

*Supported by National Natural Science Foundation of China (10447005, 90303003), Natural Science Foundation of Zhejiang Province (M103042, 102011, 102028) and Natural Science Foundation of Shaanxi College of Science and Engineer (SLG0319)