

二次发射微波电子枪的数值计算方法^{*}

孙红兵¹⁾ 裴元吉 谢爱根 王荣

(中国科学技术大学国家同步辐射实验室 合肥 230029)

摘要 阐述了在 rz 轴对称坐标系下, 计算二次发射微波电子枪中电子束运动的一种数值方法. 通过在束流运动区域建立网格, 把空间中的电荷密度分布转化为网格上各顶点的电荷密度分布. 在束团运动坐标系中, 用多重网格法求解 Poisson 方程, 得到束团的空间电荷场. 用 5 阶 Runge-Kutta 法直接求解相对论下的电子运动方程. 通过实例计算, 并和 MAFIA 的计算结果对比, 证明其是一种可靠的方法.

关键词 电子运动 空间电荷力 多重网格 Runge-Kutta 法 二次发射 电子枪

1 引言

二次发射微波电子枪(也称微脉冲电子枪 MPG^[1])是微波电子枪的一种, 它以微波建立的瞬时电场加速电子, 以二次发射材料作为阴极. 因此二次发射微波电子枪可以从根本上解决微波电子枪的反轰问题. 由于具有自聚束的特性, 其可以提供高流强、高品质的电子束. 目前, 国外对二次发射微波电子枪的理论^[1]、实验^[2]研究已有报道, 国内也开始了这方面的理论研究^[3-5]. 为了深入的研究微脉冲电子枪的特性, 就需要对腔中的束流运动做详细的计算和分析. 目前, 有很多成熟的束流运动计算程序如 GTP, Parmela, Mafia 等, 也有很多自编程序计算束流运动的报道^[6-8]. 但由于微脉冲电子枪的特殊性, 自编程序显得更加适合, 3DRun 就是用 C++ 自编的一个程序.

2 网格算法

本文采用了一种基于网格的算法, 首先在束流运动的空间划分网格, 把空间中各点的电荷密度(ρ_e)分别转化为其相邻 4 个网格顶点的电荷密度

($\rho_{m,n}, m = i, i+1; n = j, j+1$):

$$S = \rho_e / (z_{i+1} - z_i) / (r_{j+1} - r_j),$$

$$\rho_{i,j} = S(z_{i+1} - z)(r_{j+1} - r),$$

$$\rho_{i,j+1} = S(z_{i+1} - z)(r - r_j),$$

$$\rho_{i+1,j} = S(z - z_i)(r_{j+1} - r),$$

$$\rho_{i+1,j+1} = S(z - z_i)(r - r_j),$$

其中 $z_i < z < z_{i+1}, r_j < r < r_{j+1}$.

从 Mafia 中导入各顶点的外场场强, 再通过在网格空间上采用多重网格法求解 Poisson 方程, 得到各个顶点的空间电荷场; 由粒子相邻 4 个网格顶点的总场求出粒子所处位置的电磁场,

$$S = 1 / (z_{i+1} - z_i) / (r_{j+1} - r_j),$$

$$E = S [E_{i,j}(z_{i+1} - z)(r_{j+1} - r) +$$

$$E_{i,j+1}(z_{i+1} - z)(r - r_j) +$$

$$E_{i+1,j}(z - z_i)(r_{j+1} - r) +$$

$$E_{i+1,j+1}(z - z_i)(r - r_j)],$$

$$B = S [B_{i,j}(z_{i+1} - z)(r_{j+1} - r) +$$

$$B_{i,j+1}(z_{i+1} - z)(r - r_j) +$$

$$B_{i+1,j}(z - z_i)(r_{j+1} - r) +$$

$$B_{i+1,j+1}(z - z_i)(r - r_j)],$$

最后采用 5 阶 Runge-Kutta 法直接求解相对论下的

2004-05-26 收稿

^{*} 中国科学院知识创新工程基金资助

1) E-mail: shb@mail.ustc.edu.cn

运动方程,完成粒子的一次运动. 这样计算的空间电荷场的精度和网格的划分具有密切的关系. 当网格太细时,可以得到很精确的结果,但要花费更多的计算时间;当网格太粗时,就不能正确的反映出束团的空间分布,也就无法得到可信的结果. 所以网格划分的原则是在能精确的描述束团的空间分布的基础上,减少网格数目.

3 多重网格法求解空间电荷力

束流在运动过程中受到外部电磁力和自身空间电荷力的共同作用,空间电荷力的分布与腔体结构以及空间电荷的分布有关. 在束流运动坐标系中可以把空间电荷场作为一个静电场处理,通过求解 Poisson 方程得到由束团本身引起的空间电势的分布. 为了加快收敛速度并提高求解精度,采用了多重网格法^[9].

在运动柱坐标系中 Poisson 方程可描述为

$$\frac{1}{r_{i,j}} \left(\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial r_{i,j}} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_{i,j}}{\partial r_{i,j}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{i,j}}{\partial z_{i,j}^2} = - \frac{\rho_{i,j}}{\epsilon_0},$$

当 $r_{i,j} \neq 0$ 时,上式离散为

$$\frac{1}{r_{i,j}} \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j}}{h^2} + \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j}}{D_z^2} = - \frac{\rho_{i,j}}{\epsilon_0};$$

当 $r_{i,j} = 0$ 时,上式离散为

$$2 \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h^2} + \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j}}{D_z^2} = - \frac{\rho_{i,j}}{\epsilon_0},$$

其中 h 和 D_z 分别为 r, z 方向的网格步长. 令 $s =$

$$\frac{h^2}{D_z^2}, f_{i,j} = - \frac{\rho_{i,j}}{\epsilon_0} \text{ 可得迭代式.}$$

当 $r_{i,j} \neq 0$ 时:

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{2(1+s)} [s(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j}) + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \frac{1}{2}(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}) - h^2 f_{i,j}];$$

当 $r_{i,j} = 0$ 时:

$$\varphi_{i,j} = \frac{s(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j}) + 4\varphi_{i,j+1} - h^2 f_{i,j}}{2(2+s)},$$

在金属边界上 $\varphi_{i,j} = 0$.

如果直接用上式在整个求解区域进行迭代,文献^[9,10]都对此做了讨论,认为直接迭代可以很快地磨平高频误差,但很难磨平低频部分的误差,因为

低频误差是一种整体误差,直接迭代很难把边界的信息传递到中间区域. 而多重网格方法可以解决这一问题,因为多重网格是在不同层的网格上进行迭代,可以同时消除方程中的高频误差和低频误差,在加快收敛速度的同时提高求解精度.

计算得到电势后,就可以由下式得到运动坐标系中的空间电荷场:

$$E'_{zs}(i,j) = \frac{\varphi_{i+1,j}^{(1)} - \varphi_{i-1,j}^{(1)}}{2D_z},$$

$$E'_{rs}(i,j) = \frac{\varphi_{i,j+1}^{(1)} - \varphi_{i,j-1}^{(1)}}{2h},$$

再由 Lorentz 变换把空间电荷场由运动坐标系变换到实验室坐标系.

4 Runge-Kutta 法求解运动方程

电子束在 rfz 柱坐标系中运动,腔中的谐振场为 TM_{010} 模,则:

$$E_\theta = B_z = B_r = 0,$$

仅考虑电子在 r, z 方向上运动,这样就可以把电子的三维运动简化为二维运动. 令 p 为归一化动量,即 $p = \gamma\beta$, 电子的运动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_z}{\partial t} = \frac{q}{m_0 c} (E_z + \frac{c}{\gamma} p_r B) \\ \frac{\partial p_r}{\partial t} = \frac{q}{m_0 c} (E_r - \frac{c}{\gamma} p_z B) \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{p_z c}{\gamma} \\ \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{p_r c}{\gamma} \end{cases},$$

上式中, $\gamma = \sqrt{1+p^2}$, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 都是考虑空间电荷场后的综合场. 设时间积分步长为 dt , 假设在时间区间 $[t, t+dt]$ 中 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 保持不变, 可用费尔贝格给出的 5 阶 Runge-Kutta 式^[11], 求解上面的微分方程组. 得到的结果为时间步长的 5 阶精度. 通过实例计算, 对 Runge-Kutta 法和直接积分法^[12]做了比较, 结果如图 1 所示, 图中横坐标为计算采用的时间步长, 纵坐标为位移和能量的相对误差. 由图 1 可以看出, Runge-Kutta 法具有更高的收敛阶和更好的精度.

5 与 Mafia 比较

Mafia 带有计算束流运动的模块, 但由于在束流

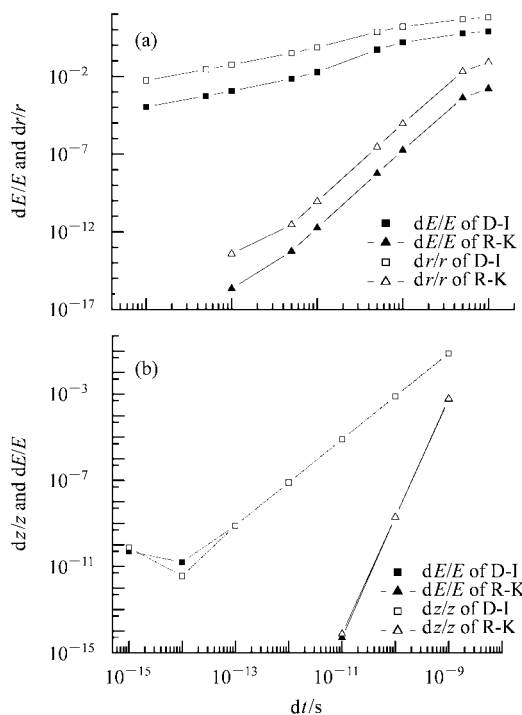


图 1 Runge-Kutta 法(R-K)与直接积分法(D-I)实例计算比较

(a)图中电子初始时刻 $r = z = 0, \gamma = 1.01, p_r = 0$, 在场 $B = B_0 = 1, E = 0$ 中的运动一周; (b)图中电子初始时 $r = z = 0, \gamma = 1$, 在场 $B = 0, E = E_z = 5.4\text{MeV/m}$ 中运动 1m.

运动过程中,程序外部不能对束团中的粒子进行控制,所以只能计算束团从腔中一端运动到另一端的过程.用 Mafia 可以部分的验证 3Drum 程序的准确性.

计算实际的二次发射微波电子枪,首先用 Mafia 计算得到 TM_{010} 模的电场和磁场分布,把谐振时的电磁场分布导入到 3Drum 程序中,计算在外场和束流本身的自场共同作用下,束流从腔体一端运动到另一端的过程中发射度的变化,并和 Mafia_TS2 的计算结果做了比较,其中 Mafia 中采用了 20000 个粒子,3Drum 采用了 10000 和 20000 个粒子两种情况,束流初始时为圆柱分布,时间长度为 10ps,半径 3mm,能量 10eV,腔的加速间隙为 10mm,腔压 54kV.结果如图 2 所示.由图可见,两个程序得到了近似相同的结果,且 3Drum 采用不同的粒子数计算时得到了相同的结果,这表明 3Drum 程序是可信和稳定的.

6 实际计算

计算实际的二次发射微波电子枪,首先用Mafia

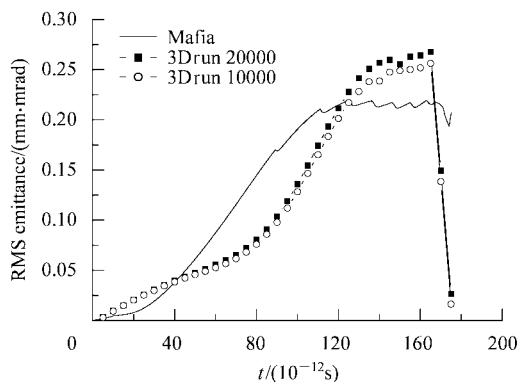


图 2 3Drum 与 Mafia 的发射度计算比较

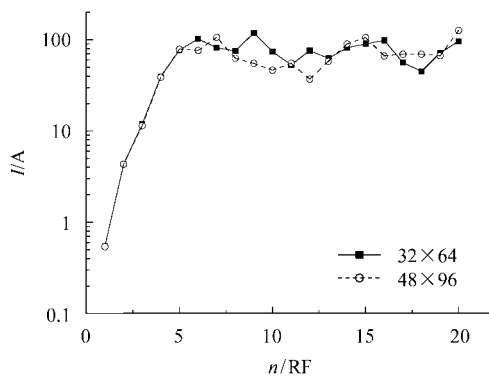


图 3 3Drum 计算二次发射电子枪的出射流强

计算得到 TM_{010} 模的电场和磁场分布,把谐振时的电磁场分布导入到 3Drum 程序中,计算在这样的外场和束流本身的自场共同作用下,束流的倍增和聚束过程.物理参数:腔的加速间隙为 10mm,电压 54kV.网格分别为 32×64 和 48×96 .

电子枪的出射流强如图 3 所示,图中横坐标的单位是高频周期数,实际上是电子在腔中经 n 次倍增的时间;图中数据点实际上是代表电子束在腔中经 n 次倍增后的最大发射流强.由图 3 可以看出,二次发射微波电子枪可以有效的对束流倍增,当取二次发射材料的发射系数 $\delta = 10$,栅网透过率为 0.2 时,倍增 5 次后已达到饱和.计算结果显示 3Drum 程序对不同的网格划分具有很好的稳定性.

7 结论

通过实例计算和与 MAFIA 的计算比较,认为 3Drum 程序是一个可靠的计算程序,可以用于二次发射微波电子枪的设计和分析.由于 3Drum 程序采用一种基于网格的算法,具有很大的通用性,可以作

为设计、分析高频腔或其他关注束流品质部件的工具.

参考文献 (References)

- 1 Frederick M M, William Peter. A High-Current Micro-Pulse Electron Gun. In: Proc. of PAC' 1993. IEEE Cat93CH379-1, 1993, 2702
- 2 Len L K, Frederick M Mako. Self-Bunching Electron Guns. In: Proc. of PAC' 99. New York: 1999. 70—74
- 3 HE Wen-Can, PEI Yuan-Ji, JIN Kai et al. High Power Laser and Particle Beams, 2001, **13**(5): 615 (in Chinese)
(何文灿, 裴元吉, 金凯等. 强激光与粒子束, 2001, **13**(5): 615)
- 4 PEI Yuan-Ji, HE Wen-Can, JIN Kai. The Simulation and Analysis of Secondary Emission Microwave Electron Gun. In: Proc. of APAC' 01. Beijing: 2001. 562—564
- 5 TANG Chuan-Xiang, TIAN Kai, CHEN Huai-Bi et al. High Power Laser and Particle Beams, 2003, **15**(8): 788—792 (in Chinese)
(唐传祥, 田凯, 陈怀璧等. 强激光与粒子束, 2003, **15**(8): 788—792)
- 6 Pöplau G U. van Rienen. A Fast 3D Multigrid Based Space-Charge Routine in the GPT Code. In: Proc. of EPAC' 02. Paris: 2002. 1658—1661
- 7 Staats J, Weiland T, Kostial S et al. Tracking of Electron Beams with Numerically Determined Space Charge Forces. In: Proc. of PAC' 99. New York: 1999. 2740—2742
- 8 TANG Chuan-Xiang, JIANG Zhan-Feng, TIAN Kai et al. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2003, **27**(6): 546—550 (in Chinese)
(唐传祥, 蒋占峰, 田凯等. 高能物理与核物理, 2003, **27**(6): 546—550)
- 9 Hackbusch W. Multi-Grid Methods and Applications. Berlin: Springer, 1985
- 10 Pöplau G, U. van Rienen, Staats J et al. Fast Algorithms for the Tracking of Electron Beams. In: Proceedings of EPAC 2000. Vienna: 2000. 1387—1389
- 11 XUE Mi. Numerical Mathematics and Computing. Shanghai: Fudanpress, 1991. 353 (in Chinese)
(薛密译. 数值数学和计算. 上海: 复旦大学出版社, 1991. 353)
- 12 XI Mei-Cheng. Numerical Analysis Method. Hefei: USTC Press, 1995. 278 (in Chinese)
(奚梅成. 数值分析方法. 合肥: 中国科技大学出版社, 1995. 278)

Numerical Algorithm of Secondary Emission Microwave Electron Gun^{*}

SUN Hong-Bing¹⁾ PEI Yuan-Ji XIE Ai-Gen WANG Rong

(National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230029, China)

Abstract A tracking algorithm using grid-based space charge fields is studied for the analysis of secondary emission microwave electron gun (SEMEG). The Poisson equations of the space charge forces are determined in the bunch's rest frame with a multi-grid method. The particles' equations of motion are solved with a fifth-order embedded Runge-Kutta method. The results of the SEMEG by this algorithm are presented and compared with these by Mafia algorithm.

Key words electron movement, space charge effect, multi-grid, Runge-Kutta method, secondary emission, microwave electron gun

Received 26 May 2004

* Supported by Knowledge Innovation Project of CAS

1) E-mail: shb@mail.ustc.edu.cn