

q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态及其非经典特性

汪仲清 周平 朱连轩 代红英

(重庆邮电学院光电工程学院 重庆 400065)

摘要 给出了 q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态,研究了这种叠加态的量子统计特性,并就叠加相位 δ 和形变参数 q 对这些特性的影响进行了讨论. 结果表明,当 δ 分别趋近于 0 和 $\pi/2$ 时,叠加相干态的非经典特性分别趋近于 q 变形非简谐振子奇偶广义相干态的结果,并且 q 偏离 1 越大,这种非经典特性越明显.

关键词 q 变形 非简谐振子 广义相干态的叠加态 非经典特性

1 引言

相干态的概念首先由 Schrödinger^[1] 在 1926 年引入,1963 年 Glauber^[2] 对谐振子相干态进行了系统地研究,1979 年 Nieto 等^[3] 把相干态的概念推广到了其他势场中. 目前相干态理论及其应用研究已成为物理学研究的一个重要领域. 我们知道,单模电磁场可等效于一个标准的辐射谐振子,而相干态是单模电磁场光子湮没算符的本征态. 然而,由于许多实际的物理问题是偏离谐振子模型的,因此对非谐振子系统进行详细研究会更具有实际意义. 近年来,李群和李代数的量子变形引起了人们的普遍兴趣^[4,5],作为物理理论的一个基本模型,简谐振子代数的 q 变形得到了较为广泛的研究^[6-8],并且发现 q 变形后的相干态及其叠加态具有一些新的重要物理性质.

徐子馥^[9] 将 q 变形的概念推广到非简谐振子模型中,由此得到 q 变形的非简谐振子广义相干态,并且研究了这些状态的过完备性和 q 参数对 q 变形非简谐振子奇偶广义相干态中自然算符压缩率的影响. 文献[10,11] 在此基础上研究了 q 变形非简谐振子奇偶广义相干态及湮没算符高次幂本征态的一些非经典特性. 我们知道,研究非经典光场的一个

重要而行之有效的方法是尽可能多地构造出一些量子力学所允许的态,然后研究这些态的量子统计性质,从而有可能发现新的非经典效应,并找到各种非经典效应之间的关系^[12]. 奇偶相干态只是相干态叠加的特殊情况,然而,实际的光场可能既非纯的奇相干态,也非纯的偶相干态,而是它们的某种叠加态. 例如光场初始处于某些态,经相互作用后可能演化成一般的叠加态. 因此,本文的思路适用于更广泛的振子,研究更为一般的叠加相干态的非经典特性将更具有实际意义. 在本文中将研究 q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态及其量子统计性质,主要讨论这种叠加的相位 δ 和形变参数 q 对振幅的高阶压缩效应及反聚束效应的影响.

2 q 变形非简谐振子广义相干态 (QNHCS)

非简谐振子 Hamilton 量的无量纲形式为^[13]

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{A}{2x^2}, \quad A > 0, \quad (1)$$

式中已取自然单位 $m = \hbar = \omega = 1$. 相应的自然坐标 X 和自然动量算符 P ^[3]

$$X = x^2 - H, \quad P = \frac{1}{2i} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \right), \quad (2)$$

与之对应的产生算符 b^+ 和湮没算符 b^- 为

$$b^{\pm} = \frac{1}{2}(X \mp iP), \quad (3)$$

它们满足对易关系

$$[H, b^{\pm}] = \pm 2b^{\pm}, [b^-, b^+] = H, \quad (4)$$

如果引入粒子数算符

$$N = \frac{1}{2}H - k, \quad (5)$$

式中 $k = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2A + \frac{1}{4}}\right)$, 则有

$$[N, b^-] = -b^-, [N, b^+] = b^+, \quad (6)$$

$$[b^-, b^+] = (N+1)(N+2k) - N(N+2k-1) = 2N+2k. \quad (7)$$

按照文献[9], 定义 q 变形非简谐振子代数的产生、湮没算符 b_q^{\pm}

$$b_q^- = b^- \varphi(N) = \varphi(N+1)b^-, \quad (8)$$

$$b_q^+ = \varphi(N)b^+ = b^+ \varphi(N+1), \quad (9)$$

其中变换算符

$$\varphi(N) = \sqrt{\frac{[N][N+2k-1]}{N(N+2k-1)}}, \quad (10)$$

式中 q 变量符号 $[\chi]$ 可取为 $[\chi] = (q^x - 1)/(q - 1)$, 或 $[\chi] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, 并且 $q \in [0, 1]$. 则有

$$b_q^+ b_q^- = [N][N+2k-1], \quad (11)$$

$$b_q^- b_q^+ = [N+1][N+2k], \quad (11)$$

$$[N, b_q^-] = -b_q^-, [N, b_q^+] = b_q^+. \quad (12)$$

如果 q 变量取 $[\chi] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, 则有对易关系

$$[b_q^-, b_q^+] = b_q^- b_q^+ - b_q^+ b_q^- = [2N+2k]. \quad (13)$$

q 变形非简谐振子粒子数算符 N 和湮没算符 b_q^- 以及产生算符 b_q^+ 作用于其能量本征态 $|n\rangle_q$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 可以得到

$$N|n\rangle_q = n|n\rangle_q, \quad (14)$$

$$b_q^- |n\rangle_q = \sqrt{[n][n+2k-1]} |n-1\rangle_q, \quad (15)$$

$$b_q^+ |n\rangle_q = \sqrt{[n+1][n+2k]} |n+1\rangle_q, \quad (16)$$

其中

$$|n\rangle_q = \frac{(b_q^+)^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}} |0\rangle_q, \quad (17)$$

满足正交归一化条件. 式中 $[n]! = [n][n-1]\dots[2][1]$, $[x]_n = [x][x+1]\dots[x+n-1]$, 并且规定 $[0]! = 1$, $[x]_0 = 1$, 则 $|n\rangle_q$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 构成一个完备的 Hilbert 空间. q 变形非简谐振子广义相干态(简记为 QNHCS)是 q 变形非简谐振子湮没算符

的本征态

$$b_q^- |\beta\rangle_q = \beta |\beta\rangle_q, \quad (18)$$

可以解出 $|\beta\rangle_q$ 为

$$|\beta\rangle_q = [F_q(|\beta|^2)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}} |n\rangle_q, \quad (19)$$

若在上式中令 $x = |\beta|^2$, 则可由归一化条件得到

$$F_q(|\beta|^2) = F_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]![2k]_n}. \quad (20)$$

q 变形非简谐振子奇偶广义相干态可定义为

$$|\beta\rangle_{q,o} = [F_{q,o}(|\beta|^2)]^{-1/2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]![2k]_{2n+1}}} |2n+1\rangle_q, \quad (21)$$

$$|\beta\rangle_{q,e} = [F_{q,e}(|\beta|^2)]^{-1/2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)^{2n}}{\sqrt{[2n]![2k]_{2n}}} |2n\rangle_q, \quad (22)$$

它们是 q 变形非简谐振子湮没算符平方的本征态, 式中

$$F_{q,o}(x) = \frac{1}{2}[F_q(x) - F_q(-x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]![2k]_{2n+1}}, \quad (23)$$

$$F_{q,e}(x) = \frac{1}{2}[F_q(x) + F_q(-x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2n]![2k]_{2n}}. \quad (24)$$

数值计算表明, 对于确定的 q 值和 A 值, 随着 x 值的变化, 可以有 $F_{q,o} > F_{q,e}$, 也可以存在 $F_{q,o} < F_{q,e}$.

3 q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态

类似文献[14,15], 我们可以引入 q 变形非简谐振子奇偶广义相干态的叠加态

$$|\psi\rangle_q = C(|\beta\rangle_q + e^{i\theta} |-\beta\rangle_q), \quad (25)$$

利用(19), (21)和(22)式可以得到

$$|\beta\rangle_q = F_q^{-1/2}(F_{q,e}^{-1/2} |\beta\rangle_{q,e} + F_{q,o}^{1/2} |\beta\rangle_{q,o}), \quad (26)$$

$$|-\beta\rangle_q = F_q^{-1/2}(F_{q,e}^{1/2} |\beta\rangle_{q,e} - F_{q,o}^{1/2} |\beta\rangle_{q,o}), \quad (27)$$

式中 $F_q = F_q(|\beta|^2)$, $F_{q,e} = F_{q,e}(|\beta|^2)$, $F_{q,o} = F_{q,o}(|\beta|^2)$. 令 $\theta = -2\delta$, 将(26), (27)式代入(25)式, 得到

$$|\psi\rangle_q = CF_q^{-1/2} e^{-i\delta} (\cos\delta \cdot F_{q,e}^{1/2} |\beta\rangle_{q,e} +$$

$$i \sin \delta \cdot F_{q,o}^{1/2} |\beta\rangle_{q,o}), \quad (28)$$

应用广义奇偶相干态的相互正交性, 容易得到归一化系数 $C = (F_q/F_{q,1})^{1/2} e^{i\delta}$, 其中 $F_{q,1} = \cos^2 \delta \cdot F_{q,e} + \sin^2 \delta \cdot F_{q,o}$. 整理后的 QNHCS 叠加态的正交分解式为

$$|\psi\rangle_q = |\beta, \delta\rangle_q = F_{q,1}^{-1/2} (\cos \delta \cdot F_{q,e}^{1/2} |\beta\rangle_{q,e} + i \sin \delta \cdot F_{q,o}^{1/2} |\beta\rangle_{q,o}), \quad (29)$$

可以看出 q 变形非简谐振子广义奇偶相干态是上式中叠加相位分别取 $\delta = \pi/2$ 和 0 的特例. 将 q 变形湮没算符作用于 (29) 式可得

$$b_q^- |\beta, \delta\rangle_q = \beta F_{q,1}^{-1/2} (\cos \delta \cdot F_{q,e}^{1/2} |\beta\rangle_{q,e} + i \sin \delta \cdot F_{q,e}^{1/2} |\beta\rangle_{q,e}), \quad (30)$$

$$(b_q^-)^2 |\beta, \delta\rangle_q = \beta^2 |\beta, \delta\rangle_q, \quad (31)$$

很容易进一步推知

$$(b_q^-)^M |\beta, \delta\rangle_q = \begin{cases} \beta^M |\beta, \delta\rangle_q, \\ (M = 2n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ \beta^M F_{q,1}^{-1/2} (\cos \delta \cdot F_{q,o}^{1/2} |\beta\rangle_{q,o} + i \sin \delta \cdot F_{q,e}^{1/2} |\beta\rangle_{q,e}), \\ (M = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (32)$$

4 QNHCS 叠加态的高阶压缩效应

可以像文献 [16] 那样, 定义两个厄密算符

$$\begin{aligned} w_1 &= [(b_q^+)^M + (b_q^-)^M]/2, \\ w_2 &= i[(b_q^+)^M - (b_q^-)^M]/2, \end{aligned} \quad (33)$$

它们分别表示 q 变形非简谐振子光场复振幅 M 次幂的实部和虚部, 并满足如下的对易关系和不确定关系

$$[w_1, w_2] = i[(b_q^-)^M, (b_q^+)^M]/2, \quad (34)$$

$$\Delta w_1^2 \cdot \Delta w_2^2 \geq \frac{1}{16} |\langle [(b_q^-)^M, (b_q^+)^M] \rangle|^2. \quad (35)$$

如果存在不等式

$$\langle \Delta w_i^2 \rangle - \frac{1}{4} |\langle [(b_q^-)^M, (b_q^+)^M] \rangle| < 0, i = 1, 2, \quad (36)$$

则称 q 变形非简谐振子光场存在振幅的 M 次方压缩效应.

令 $\beta = \rho e^{i\varphi}$, 应用 (32) 式可以得到

$${}_q \langle \psi | \Delta w_{1,2}^2 | \psi \rangle_q - \frac{1}{4} {}_q \langle \psi | [(b_q^-)^M, (b_q^+)^M] | \psi \rangle_q =$$

$$\begin{cases} 0, (M = 2n, n = 1, 2, 3, \dots), \\ \frac{1}{2} \rho^{2M} [\pm \cos 2M\varphi \pm \cos 2M\varphi (F_{q,o} - F_{q,e})^2 \times \\ \sin^2 \delta \cos^2 \delta / F_{q,1}^2 - (F_{q,o} - F_{q,e})^2 \sin^2 \delta \times \\ \cos^2 \delta / F_{q,1}^2 + (\cos^2 \delta \cdot F_{q,o} + \sin^2 \delta \cdot F_{q,e}) / F_{q,1}], \\ (M = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (37)$$

由 (37) 式可以看出, q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态不存在偶次方 (M 为偶数) 振幅的压缩效应. 由于 $-1 \leq \cos 2M\varphi \leq 1$, 则 QNHCS 叠加态的高阶压缩效应由 $F_{q,e}$ 与 $F_{q,o}$ 以及叠加相位 δ 的值来确定. 如果 $\varphi = \varphi_m = \frac{m}{M}\pi$, 或 $\varphi = \varphi'_m = \frac{2m+1}{2M}\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), 则 $\cos 2M\varphi = \pm 1$. 当 $\cos 2M\varphi = \mp 1$ 和 $-2(F_{q,o} - F_{q,e})^2 \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta / F_{q,1}^2 + (\cos^2 \delta \cdot F_{q,o} + \sin^2 \delta \cdot F_{q,e}) / F_{q,1} < 1$ 时, q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态便可分别在 w_1 或 w_2 分量方向上呈现奇次方 (M 为奇数) 压缩效应. 特别地, 当 $\delta = \pi/2$ 或 $\delta = 0$ 时, 由 (37) 式可得到文献 [10] 中奇偶相干态的结果. 当 $\cos 2M\varphi = -1$ 和 $\delta = \pi/4$ 时, 只有 w_1 分量可呈现奇次方高阶压缩效应; 当 $\cos 2M\varphi = 1$ 和 $\delta = \pi/4$ 时, 只有 w_2 分量可呈现奇次方高阶压缩效应. 在 $0 < \delta < \pi/4$ 和 $\pi/4 < \delta < \pi/2$ 区间内可通过数值计算进行讨论. 当取非谐振项系数 $A = 0.1$, 形变参数 $q = 1.0, 0.6$ 和 0.4 , 以及叠加相位 δ 分别取 $0.1, 0.6, 1.0$ 和 1.5 时, 数值计算 (计算精度为 10^{-10}) 函数

$$F = -1 - 2(F_{q,o} - F_{q,e})^2 \sin^2 \delta \cos^2 \delta / F_{q,1}^2 + (\cos^2 \delta \cdot F_{q,o} + \sin^2 \delta \cdot F_{q,e}) / F_{q,1}, \quad (38)$$

随 $x = |\beta|^2$ 的变化规律如图 1 所示. 可以看出, 对于给定的 q 和 δ , 高阶压缩效应 ($F < 0$) 随着 x 的增加交替变化. 当形变参数 q 偏离 1 越大时, 这种变

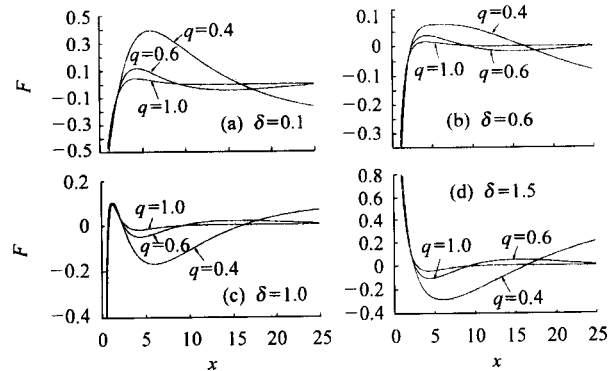


图 1 函数 F 随 x 的变化

(a) $\delta = 0.1$; (b) $\delta = 0.6$; (c) $\delta = 1.0$; (d) $\delta = 1.5$.

化越明显. 当 δ 向 0 值趋近, 这种效应越接近于偶相干态的特征; 当 δ 向 $\pi/2$ 趋近, 就接近于奇相干态的特征.

5 QNHCS 叠加态的反聚束效应

对于普通意义下的光场, 如果它的归一化二阶相关函数^[17] $g_q^{(2)}(0) < 1$, 则称光场呈现反聚束效应. 我们可以定义 q 变形非简谐振子光场的二阶相关函数为

$$g_q^{(2)}(0) = \frac{q \langle \psi | (b_q^+)^2 (b_q^-)^2 | \psi \rangle_q}{|q \langle \psi | b_q^+ b_q^- | \psi \rangle_q|^2}. \quad (39)$$

若 $g_q^{(2)}(0) < 1$, 则称这种 q 变形非简谐振子光场呈现反聚束效应. 应用(32)式和(39)式容易得到

$$g_q^{(2)}(0) = \frac{(\cos^2 \delta \cdot F_{q,e} + \sin^2 \delta \cdot F_{q,o})^2}{(\cos^2 \delta \cdot F_{q,o} + \sin^2 \delta \cdot F_{q,e})^2}. \quad (40)$$

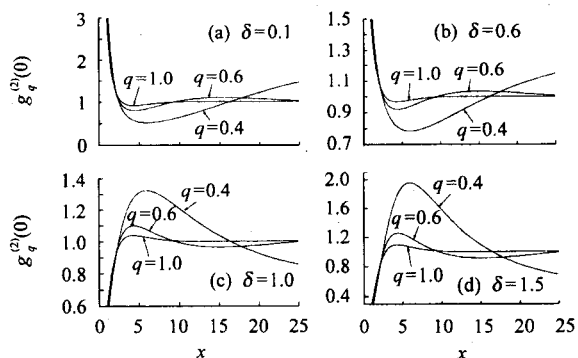


图 2 $g_q^{(2)}(0)$ 随 x 的变化

(a) $\delta = 0.1$; (b) $\delta = 0.6$; (c) $\delta = 1.0$; (d) $\delta = 1.5$.

可以看出, QNHCS 叠加态的反聚束效应只与 $F_{q,o}$, $F_{q,e}$ 和 δ 的值有关. 当 δ 取值分别为 0 和 $\pi/2$

时, 由(40)式可得到 q 变形非简谐振子奇偶广义相干态的结果^[10]. 当 $\delta = \pi/4$ 时, $g_q^{(2)}(0) = 1$, 这种情况下不存在反聚束效应. 在 $0 < \delta < \pi/4$ 和 $\pi/4 < \delta < \pi/2$ 区间内可通过数值计算进行讨论. 如果非谐振项系数取值为 $A = 0.1$, q 和 δ 取不同值时, $g_q^{(2)}(0)$ 随 $x = |\beta|^2$ 的变化规律如图 2 所示. 由图 2 可以看出, 当 q 偏离 1 越大时, 反聚束效应越明显. 当 δ 向 0 趋近, 则 QNHCS 叠加态的反聚束效应接近 q 变形非简谐振子广义偶相干态的结果; 当 δ 向 $\pi/2$ 趋近, 反聚束效应接近 q 变形非简谐振子广义奇相干态的特征.

6 结论

本文给出了 q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态, 研究了这种叠加态的非经典统计性质, 并且讨论了形变参数 q 与叠加相位 δ 对它们的影响. 当 δ 取值分别为 $\pi/2$ 和 0 时, 得到了 q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的结果. 当 δ 取值为 $\pi/4$ 时, 叠加态可存在高阶压缩效应而没有反聚束效应. 在 $0 < \delta < \pi/4$ 和 $\pi/4 < \delta < \pi/2$ 区间内, 通过数值计算表明, 当 δ 越接近于 0, 非经典性质接近 q 变形非简谐振子广义偶相干态的特征. 当 δ 接近于 $\pi/2$ 时, 非经典性质接近 q 变形非简谐振子广义奇相干态的特征. 并且形变参数 q 对这种非经典特性有很大的影响, 当 q 偏离 1 越大, 非经典特性越明显. 因此, 本文的结果可以应用于更广泛的振子, 而 q 变形非简谐振子广义奇偶相干态是其特殊情况. 研究 q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态及其非经典特性具有更普遍的意义.

参考文献 (References)

- Schrödinger E. *Naturwissenschaften*, 1926, **14**:664
- Glauber R J. *Phys. Rev.*, 1963, **130**:2529
- Nieto M M, Simmons L M. *Phys. Rev.*, 1979, **D20**:1321
- Pocek M. *Phys. Lett.*, 1991, **B255**:554
- Delbecq C, Quesne C. *J. Phys.*, 1993, **A26**:L127
- Biedenharn L C. *J. Phys.*, 1989, **A22**:L873
- CHANG Zhe, CHEN Wei, GUO Han-Ying. *J. Phys.*, 1990, **A23**:4185
- CHANG Zhe, CHEN Wei, YAN Hong. *J. Phys.*, 1990, **A23**:4235
- XU Zi-Wen. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 1999, **23**:436 (in Chinese)
(徐子文. 高能物理与核物理, 1999, **23**:436)
- WANG Zhong-Qing. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 2001, **25**:1044 (in Chinese)
(汪仲清. 高能物理与核物理, 2001, **25**:1044)
- WANG Zhong-Qing. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 2003, **27**:105 (in Chinese)
(汪仲清. 高能物理与核物理, 2003, **27**:105)
- PENG Shi-An, GUO Guang-Can. *Acta Physica Sinica*, 1990, **39**:51 (in Chinese)
(彭石安, 郭光灿. 物理学报, 1990, **39**:51)
- ZHU Dong-Pei. *J. Phys.*, 1987, **A20**:4331
- BAN M. *Phys. Lett.*, 1994, **A193**:121
- NI Zhi-Xiang. *Acta Physica Sinica*, 1997, **46**:1687 (in Chinese)
(倪致祥. 物理学报, 1997, **46**:1687)
- ZHANG Z M, XU L, CHAI J L et al. *Phys. Lett.*, 1990, **A150**:27
- Walls D F. *Nature*, 1983, **306**:141

Superposition of Generalized q -Coherent States of the Non-harmonic Oscillator and Their Nonclassical Properties

WANG Zhong-Qing ZHOU Ping ZHU Lian-Xuan DAI Hong-Ying

(College of Optical and Electronic Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract The superposition states, which are composed of the generalized q -coherent states of the non-harmonic oscillator, are presented. The quantum statistical properties of these states are studied. Then the influence of the superposition phase δ and the deformation parameter q on these nonclassical properties are discussed. It is shown that the superposition states exhibit higher-order (order of odd number) squeezing effect and antibunching effect respectively. When the superposition phase δ is taken values approach to 0 or $\pi/2$, these results approach the properties of the even or odd generalized q -coherent states of the non-harmonic oscillator. Especially, the effects are influenced by the parameter q . When the values of q is taken departure from 1 greatly, the nonclassical properties are more evidently.

Key words non-harmonic oscillator, generalized q -coherent state, superposition state, nonclassical property