第 28 卷 第 10 期
2004 年 10 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.28, No.10
Oct., 2004

逐事件分析中高阶矩统计起伏的消除*

李波[1] 朱洪力[1] 刘连寿[2;1)]

1(华中师范大学国家理科(物理学)基础研究与教学人才培养基地 武汉 430079)

2(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430079)

摘要 逐事件分析是目前高能重离子碰撞研究中受到广泛注意的方法.由于单个事件的粒子数有限,在运用这一方法时,首先要解决统计起伏的消除问题.在现有文献中只讨论过低阶矩(最高到三阶)统计起伏的消除.本文研究了高阶矩中统计起伏的消除,给出了普遍公式.

关键词 高能重离子碰撞 逐事件分析 统计起伏

通过相对论重离子碰撞探寻新的物质形态——QGP,是当前物理学的一个热点研究领域.实验中已经观察到一些 QGP 形成的迹象,但还不是最终肯定,寻找新的 QGP 信号仍然是一个重要问题.由于逐事件分析有可能提供新的 QGP 信号[1—3],所以受到广泛重视.

在逐事件分析中必然会遇到由事件粒子数有限产生的统计起伏.文献中提出过许多不同方法来消除或减小统计起伏的影响,其中大多数是基于"减除"法[4—6],即:设法估计统计起伏的大小,然后从实验结果中减去它.这种方法只在多重数高时才近似地有效,而且用这种方法只能消除二阶矩的统计起伏.

文献[7]提出了一种直接消除法,在粒子独立发射的假定下,亦即在统计起伏为泊松的假定下,这种方法能严格地消除任意阶矩中的统计起伏.

为了深入了解单事件动力学,测量高阶矩是必要的.文献[7]只给出了 2 阶和 3 阶矩的公式.文献[8]推广了文献[7]的方法,但也只给出了最高到 3 阶的矩.在文中,给出任意阶矩系数的普遍公式,从而使逐事件动力学的实验分析能推广到高阶矩.

首先简单地回顾一下文献[7]中提出的消除统计起伏的方法.将横动量 p_t 的相空间分成 M 个饼(bin). $p(p_t)$ 是单事件中横动量的动力学几率密度.第 m个饼中产生粒子的动力学几率为 $p_m = \int_{\delta m} p(p_t)\mathrm{d}p_t (m=1,2,\cdots,M)$,然而期望值却是 $q_m = N_m/N$.单事件平均横动量[9] $\bar{p}_t = \int_{\delta} p_t p(p_t)\mathrm{d}p_t = \sum_{m=1}^{M}(p_t)_m p_m$.它的 p 阶动力学矩是

$$C_p(\bar{p}_t) = \langle \bar{p}_t{}^p \rangle = \langle \Big(\sum_{m=1}^{M} (p_t)_m p_m \Big)^p \rangle . \quad (1)$$

如果简单地将动力学几率 p_m 用实验测得的期望值 q_m 代替,就包含了统计起伏.

假定粒子独立发射,统计起伏为泊松,则有如下基本定理[7]:

$$\langle \sum_{m=1}^{M} f_m p_m^p \rangle = \langle \sum_{m=1}^{M} f_m \frac{n_m(n_m-1)\cdots(n_m-p-1)}{\langle n \rangle^p} \rangle . \quad (2)$$

显然,只要将(1)式右边作和式的 p 次方展开,就可以利用这一定理消除统计起伏.

例如文献[7],对于 $p=2,3$,展开(1)式中的作和式得

$$C_2(\bar{p}_t) = \langle \Big(\sum_{m=1}^{M} (p_t)_m p_m \Big)^2 \rangle = \langle \sum_{m=1}^{M} (p_t)_m^2 p_m^2 \rangle + \langle \sum_{m \neq m'}^{M} (p_t)_m (p_t)_{m'} p_m p_{m'} \rangle , \quad (3)$$

$$C_3(\bar{p}_t) = \langle \Big(\sum_{m=1}^{M} (p_t)_m p_m \Big)^3 \rangle = \langle \sum_{m=1}^{M} (p_t)_m^3 p_m^3 \rangle + 3 \langle \sum_{m \neq m'}^{M} (p_t)_m (p_t)_{m'}^2 p_m p_{m'}^2 \rangle +$$

2004-03-19 收稿

* 国家自然科学基金(90103019,10375025)资助

1) E-mail: liuls@iopp.ccnu.edu.cn

$$\langle \sum_{m\neq m'\neq m''}^{M}(p_t)_m(p_t)_{m'}(p_t)_{m''}p_m p_{m'} p_{m''}\rangle. \quad (4)$$

定义:

$$G_2(\bar{p}_t)=\langle \sum_{m=1}^{M}(p_t)_m^2\frac{n_m(n_m-1)}{\langle n\rangle^2}\rangle+\langle \sum_{m\neq m'}^{M}(p_t)_m(p_t)_{m'}\frac{n_m n'_m}{\langle n\rangle^2}\rangle, \quad (5)$$

$$G_3(\bar{p}_t)=\langle \sum_{m=1}^{M}(p_t)_m^3\frac{n_m(n_m-1)(n_m-2)}{\langle n\rangle^3}\rangle+3\langle \sum_{m\neq m'}^{M}(p_t)_m(p_t)_{m'}^2\frac{n_m n'_m(n'_m-1)}{\langle n\rangle^3}\rangle+\langle \sum_{m\neq m'\neq m''}^{M}(p_t)_m(p_t)_{m'}(p_t)_{m''}\frac{n_m n'_m n''_m}{\langle n\rangle^3}\rangle. \quad (6)$$

由(2)式即知: $G_2(\bar{p}_t)=C_2(\bar{p}_t)$, $G_3(\bar{p}_t)=C_3(\bar{p}_t)$,统计起伏被消除.

对于 $p>3$ 的高阶矩,可以用同样的方法消除统计起伏.问题在于如何确定展开式各项的系数.以4阶矩为例

$$\begin{aligned}C_4(\bar{p}_t)=&A\langle \sum_{m^{(0)}=1}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^4\rangle+\\&B\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^3(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}\rangle+\\&C\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]^2\rangle+\\&D\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}\neq m^{(2)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]\times\\&[(p_t)_{m^{(2)}}p_{m^{(2)}}]\rangle+E\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}\neq m^{(2)}\neq m^{(3)}}^{M}(p_t)_{m^{(0)}}\times\\&p_{m^{(0)}}(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}(p_t)_{m^{(2)}}p_{m^{(2)}}(p_t)_{m^{(3)}}p_{m^{(3)}}\rangle.\end{aligned} \quad (7)$$

各项的系数 A,B,C,D,E 可以按排列组合方法求得.例如,第一项的系数 A 是从4个对象中取4个的组合数 C_4^4,第二项的系数 B 是从4个对象中取3个的组合数 C_4^3 乘上从剩下的1个对象中取1个的组合数 C_1^1.但是,应注意避免重复计算.例如,第三项中 $[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2$ 和 $[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]^2$ 的方次相同,而 $m^{(0)}$, $m^{(1)}$ 都是从1到 M 作和,因而

$$\sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2\cdot[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]^2$$

和

$$\sum_{m^{(1)}\neq m^{(0)}}^{M}[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]^2\cdot[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2$$

完全等价.因此,第三项的系数为 $C=C_4^2C_2^2/2!$.同理,在第四项中 $[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]$ 和 $[(p_t)_{m^{(2)}}p_{m^{(2)}}]$ 等价,因而,第四项的系数是 $D=C_4^2C_2^1C_1^1/2!$.在第五项中,

$$[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}],[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}],[(p_t)_{m^{(2)}}p_{m^{(2)}}],[(p_t)_{m^{(3)}}p_{m^{(3)}}]$$

等价,因而 $E=C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1/4!$.在第一,二项中不存在重复计算问题,因而简单地有 $A=C_4^4$, $B=C_4^3C_1^1$.由此得到

$$\begin{aligned}C_4(\bar{p}_t)=&C_4^4\langle \sum_{m^{(0)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^4\rangle+\\&C_4^3C_1^1\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^3(p_t)_{m^{(1)}}\times\\&p_{m^{(1)}}\rangle+\frac{C_4^2C_2^2}{2!}\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2\times\\&[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]^2\rangle+\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{2!}\times\\&\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}\neq m^{(2)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]\times\\&[(p_t)_{m^{(2)}}p_{m^{(2)}}]\rangle+\frac{C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1}{4!}\times\\&\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}\neq m^{(2)}\neq m^{(3)}}^{M}(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}\times\\&(p_t)_{m^{(2)}}p_{m^{(2)}}(p_t)_{m^{(3)}}p_{m^{(3)}}\rangle=\\&\langle \sum_{m^{(0)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^4\rangle+\\&4\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^3(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}\rangle+\\&3\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]^2\rangle+\\&6\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}\neq m^{(2)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}]^2[(p_t)_{m^{(1)}}\times\\&p_{m^{(1)}}][(p_t)_{m^{(2)}}p_{m^{(2)}}]\rangle+\\&\langle \sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}\neq m^{(2)}\neq m^{(3)}}^{M}(p_t)_{m^{(0)}}p_{m^{(0)}}(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}\times\\&(p_t)_{m^{(2)}}p_{m^{(2)}}(p_t)_{m^{(3)}}p_{m^{(3)}}\rangle.\end{aligned} \quad (8)$$

再来考虑 p 为任意正整数的一般情况.此时,先对 p 作一切可能的整数分割

$$p=l_0+l_1+\cdots+l_k, \quad (9)$$

从而将 $C_p(\bar{p}_t)$ 写成对这一切可能分割作和的形式:

$$\begin{aligned}C_p(\bar{p}_t)=&\sum_{l_0+l_1+\cdots+l_k=p}A_{l_0l_1\cdots l_k}\sum_{m^{(0)}\neq m^{(1)}\neq\cdots\neq m^{(k)}}^{M}[(p_t)_{m^{(0)}}\times\\&p_{m^{(0)}}]^{l_0}[(p_t)_{m^{(1)}}p_{m^{(1)}}]^{l_1}\cdots\\&[(p_t)_{m^{(k)}}p_{m^{(k)}}]^{l_k}.\end{aligned} \quad (10)$$

设 $l_0, l_1, \cdots, l_k$ 中有 e 组各自相同,其中第 1 组有 g_1 个,第 2 组有 g_2 个,…,第 e 组有 g_e 个,则:

$$A_{l_0 l_1 \cdots l_k} = \frac{C_n^{l_0} C_{n-l_0}^{l_1} C_{n-l_0-l_1}^{l_2} \cdots C_{n-l_0-l_1\cdots l_{k-2}}^{l_{k-1}} C_{l_k}^{l_k}}{g_1!\ g_2!\ \cdots g_e!}. \quad (11)$$

将任意 p 阶矩写成(10),(11)式以后,就可以利用基本定理(2)式消除统计起伏.定义 p 阶 G 矩

$$G_p(\bar{p}_t) = \sum_{l_0+l_1+\cdots+l_k=p} A_{l_0 l_1 \cdots l_k} \times \sum_{m^{(0)} \neq m^{(1)} \neq \cdots \neq m^{(k)}}^{M} \left[(p_t)_m^{l_0} \frac{n_m \cdots (n_m - l_0 + 1)}{\langle n \rangle^{l_0}} \right] \times \left[(p_t)_m^{l_1} \frac{n_m \cdots (n_m - l_1 + 1)}{\langle n \rangle^{l_1}} \right] \cdots \left[(p_t)_m^{l_k} \frac{n_m \cdots (n_m - l_k + 1)}{\langle n \rangle^{l_k}} \right]. \quad (12)$$

其中的系数 $A_{l_0 l_1 \cdots l_k}$ 由(11)式给出.则由(2)式知 $G_p(\bar{p}_t) = C_p(\bar{p}_t)$.

任意阶矩的系数都可以用(11)式求得.为了方便应用,在表 1 中列出了从 2 阶到 7 阶矩的展开系数 $A_{l_0 l_1 \cdots l_k}$.

在这篇短文中,将文献[7]中提出的消除单事件统计起伏的 G 矩方法应用于高阶矩,写出了任意正整数 p 阶 G 矩的普遍公式,列出了从 2 阶到 7 阶矩的展开系数 $A_{l_0 l_1 \cdots l_k}$.这些结果,在对单事件动力学更深入的研究中将会用到.

表 1　从 2 阶到 7 阶矩的展开系数

p	$A_{l_0 l_1 \cdots l_k}$						
2	$A_2 = 1$	$A_{11} = 1$					
3	$A_3 = 1$	$A_{21} = 3$	$A_{111} = 1$				
4	$A_4 = 1$	$A_{31} = 4$	$A_{22} = 3$	$A_{211} = 6$	$A_{1111} = 1$		
5	$A_5 = 1$	$A_{41} = 5$	$A_{32} = 10$	$A_{311} = 10$	$A_{221} = 15$	$A_{2111} = 10$	$A_{11111} = 1$
6	$A_6 = 1$	$A_{51} = 6$	$A_{42} = 15$	$A_{411} = 15$	$A_{33} = 10$	$A_{321} = 60$	$A_{3111} = 20$
	$A_{222} = 15$	$A_{2211} = 45$	$A_{21111} = 15$	$A_{111111} = 1$			
7	$A_7 = 1$	$A_{61} = 7$	$A_{52} = 21$	$A_{511} = 21$	$A_{43} = 35$	$A_{421} = 105$	$A_{4111} = 35$
	$A_{331} = 70$	$A_{322} = 105$	$A_{3211} = 210$	$A_{2221} = 105$	$A_{22111} = 105$	$A_{211111} = 21$	$A_{1111111} = 1$

参考文献(References)

1 Mr'owczy'nski S. Phys. Lett., 1993, **B314**: 118

2 Stephanov M A, Rajagopal K, Shuryak E V. Phys. Rev. Lett., 1998, **81**: 4816; Phys. Rev., 1999, **D60**: 114028

3 Dumitru A, Pisarski R. Phys. Lett., 2001, **B504**: 282

4 Adcox K et al (PHENIX Collab.). nucl-ex/0203015

5 Voloshin S A, Koch V, Ritter H G. Phys. Rev., 1999, **C60**: 024901

6 Adamová D et al (CERES Collab.). nucl-ex/0305002

7 FU Jing-Hua, LIU Lian-Shou. Phys. Rev., 2003, **C68**: 064904

8 Bialas A. hep-ph/0310348

9 WU Yuan-Fang, LIU Lian-Shou. Phys. Lett., 1991, **B269**: 28

Elimination of Statistical Fluctuations in Higher Order Moments from Event-by-Event Analysis*

LI Bo[1]　ZHU Hong-Li[1]　LIU Lian-Shou[2;1)]

1(State-Level Personnel Training Base for Research and Teaching in Fundamental Sciences(Physics), Huazhong Normal University, Wuhan 430079, China)

2(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract　In the present investigation of high energy multiparticle production, the method of event by event ananysis has received wide interest. Inasmuch as the limited number of particles in a single event, an important problem is that the elimination of statistical fuctuations has to be worked out first of all. In the current literature, the elimination of statistical fuctuations has been only considered in lower order moments (not above the third order). In the present paper, the elimination of statistical fuctuations is studied in higher order moments and a general expression for the elimination of statistical fluctuations in the moments of arbitrary order is given.

Key words　high energy multiparticle production, event-by-event analysis, statistical fluctuation

Received 19 March 2004

* Supported by NSFC(90103019, 10375025)

1) E-mail: liuls@iopp.ccnu.edu.cn