

# RFQ 加速器束流接受度的计算\*

邢庆子<sup>1;1)</sup> 傅世年<sup>2</sup> 林郁正<sup>1</sup> 方守贤<sup>2</sup>

1 (清华大学工程物理系 北京 100084)

2 (中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

**摘要** 基于 RFQ 加速器中束流横向运动方程描述了一种计算其入口处束流接受度的方法. 针对特定结构参数的四翼型 RFQ 加速器, 给出了计算结果为: 加速质子束时的系统接受度在  $x-x'$  平面为  $0.0153\text{cm}\cdot\text{rad}$ , 在  $y-y'$  平面为  $0.0114\text{cm}\cdot\text{rad}$ . 此方法也适用于求解其它已知结构、使用射频场加速、线性横向电场的加速器的接受度.

**关键词** 接受度 RFQ 加速器 洁净核能

## 1 引言

在“国家重点基础研究发展规划”的洁净核能项目中, 将采用 RFQ 作为低能端的注入器. 从离子源运输到 RFQ 入口处的束流的发射度, 必须要处在 RFQ 加速器的接受度范围内, 才能保证束流的高传输效率. 同时, 求得 RFQ 的束流接受度, 对于设计从离子源到 RFQ 入口处的匹配段有着关键的作用. 因此, 找到一种有效的计算 RFQ 加速器束流接受度的方法, 是一项很有意义的工作.

## 2 接受度计算的基本思路

对于给定的加速结构, 由于结构对束流的几何限制, 在入口处存在一个相空间区域, 只有分布在该区域内的束流才能通过该加速结构. 这一区域被称为接受相图<sup>[1]</sup>.

由 RFQ 的结构设计结果数据, 可以求得在不同纵向坐标位置处, RFQ 加速结构  $x$  和  $y$  方向的横向几何尺寸. 假定求得的  $x$  方向正边尺寸曲线为  $\xi_1(z)$ , 则负边尺寸曲线为  $\xi_2(z) = -\xi_1(z)$ . 要使粒子在  $x$  方向通过的条件是, 束流在整个加速结构区间上不同纵向位置处的  $x$  方向包络半径, 均小于该

处结构的  $x$  方向尺寸, 即

$$\xi_2(z) < x(z) < \xi_1(z), \quad 0 \leq z \leq L_{\text{RFQ}}, \quad (1)$$

其中  $L_{\text{RFQ}}$  为 RFQ 的总长.

假定从 RFQ 入口到任一纵向位置  $z$  处的传输矩阵为  $M(z)$ , 粒子的初始条件为  $x_0, x'_0$ , 则在  $z$  处粒子的坐标为

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ x'(z) \end{pmatrix} = M(z) \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad M(z) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

(2) 代入 (1) 可得

$$\xi_2(z) < M_{11}(z)x_0 + M_{12}(z)x'_0 < \xi_1(z), \quad (3)$$

因此有

$$\frac{\xi_2(z) - M_{11}(z)x_0}{M_{12}(z)} < x'_0 < \frac{\xi_1(z) - M_{11}(z)x_0}{M_{12}(z)},$$

$$M_{12} > 0$$

$$\frac{\xi_1(z) - M_{11}(z)x_0}{M_{12}(z)} < x'_0 < \frac{\xi_2(z) - M_{11}(z)x_0}{M_{12}(z)},$$

$$M_{12} < 0.$$

当  $M_{12} = 0$  时, 若  $\xi_2(z) < M_{11}(z)x_0 < \xi_1(z)$ , 则  $x'_0$  的范围无限制; 若  $M_{11}(z)x_0 \leq \xi_2(z)$  或  $\xi_1(z) \leq M_{11}(z)x_0$ , 则  $x'_0$  无解. (4) 式可以表示为

$$f_2(x_0, z) < x'_0 < f_1(x_0, z),$$

2002-08-23 收稿, 2002-10-31 收修改稿

\* 国家重点基础研究规划项目 (G1999022600) 资助

1) E-mail: xqz98@mails.tsinghua.edu.cn

(5)式即为粒子在  $x$  方向通过需要满足的条件. 在整个区间  $0 \leq z \leq L_{RFQ}$  内, 若  $f_1(x_0, z_1) = f_{1min}(x_0, z)$ ,  $f_2(x_0, z_2) = f_{2max}(x_0, z)$ , 那么对于某一确定的  $x_0$  的值,  $x'_0$  的取值范围为

$$f_2(x_0, z_2) < x'_0 < f_1(x_0, z_1). \quad (6)$$

在 RFQ 入口处, 根据(6)式, 将所有可能的  $x_0$  值都求出对应的  $x'_0$  的取值范围, 则可在  $(x_0, x'_0)$  相平面内绘出接受相图. 接受度的大小即为相图面积除以  $\pi$ .

由以上可见, RFQ 在  $x-x'$  相平面内的接受度的计算, 可以分以下几步完成: 首先计算出 RFQ 在  $x$  方向上的结构尺寸  $\xi_{1x}(z)$  和  $\xi_{2x}(z)$ ; 然后求出在某一注入相位下, 由 RFQ 入口到任一纵向位置  $z$  处的传输矩阵  $M(z)$ , 这样, 如果给出某一  $x_0$  的值, 就可得到  $f_1(x_0, z)$  和  $f_2(x_0, z)$  的分布; 在整个区间  $0 \leq z \leq L_{RFQ}$  内, 分别求得它们的最小值  $f_{1min}(x_0, z)$  和最大值  $f_{2max}(x_0, z)$ , 即可得到对应此  $x_0$  值的  $x'_0$  的取值范围; 再根据 RFQ 入口处  $x_0$  值的范围, 可以求出对应一系列  $x_0$  值的  $x'_0$  的取值范围; 最后由  $x_0$  和  $x'_0$  的取值范围, 则可在  $(x, x')$  相平面内绘出接受相图, 从而求出接受度.  $y-y'$  相平面内接受度的计算方法与  $x-x'$  相同

### 3 RFQ 结构尺寸

RFQ 每个加速单元的参数由 PARMTEQM 程序产生. 其中匹配段部分使用完全四极对称的电极, 沿着束流前进的方向电极孔径逐渐减小. 在 PARMTEQM 的计算中, 匹配段电极极面曲线满足特定的方程; 在接受度的计算中, 使用二次曲线来近似.

匹配段后面电极极面沿  $z$  轴存在调制. 极面的曲线方程由 RFQ 近轴区的势函数决定. 在 PARMTEQM 的计算中考虑了势函数的高阶项; 但在接受度的计算中, 势函数仅取阶数最低的两项, 在  $x-z$  和  $y-z$  平面内的极面方程分别为

$$\begin{aligned} \frac{X}{a^2} x^2 + A I_0(kx) \cos kz &= 1, \\ -\frac{X}{a^2} y^2 + A I_0(ky) \cos kz &= -1, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $k = 2\pi/\beta\lambda$ ,  $\beta$  为同步粒子的相对速度,  $\lambda$  为射频波长,  $X$  为横向聚焦作用参数,  $A$  为纵向加速作用参数,  $a$  为加速单元的最小孔半径,  $I_0$  为零阶虚宗

量 Bessel 函数.

在 RFQ 结构尺寸的计算中做了以上两处近似, 仍能求得比较满意的接受度的结果.

### 4 传输矩阵 $M$

在笛卡儿坐标系中, RFQ 近轴区横向电场表达式为

$$\begin{cases} E_x = \left[ -\frac{XV_0}{a^2} x - \frac{kAV_0}{2} I_1(kr) \frac{x}{r} \cos kz \right] \cdot \\ \quad \sin(\omega t + \phi_0), \\ E_y = \left[ \frac{XV_0}{a^2} y - \frac{kAV_0}{2} I_1(kr) \frac{y}{r} \cos kz \right] \cdot \\ \quad \sin(\omega t + \phi_0) \end{cases}$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $V_0$  为相邻电极间的电压,  $\omega$  为 RFQ 的工作频率,  $\phi_0$  为粒子的注入相位,  $I_1$  为一阶虚宗量 Bessel 函数.

下面仅考虑  $x$  方向的情况,  $y$  方向与此类似. 当  $r$  比较小时,  $I_1(kr) \approx \frac{kr}{2}$ , 可写出粒子的横向运动方程为<sup>[2]</sup>

$$\frac{1}{\beta\gamma} \frac{d}{dz} \left( \beta\gamma \frac{dx}{dz} \right) + h(z)x = 0, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{B}{4L_c^2} \sin(\omega t + \phi_0) + \frac{\Delta}{4L_c^2}, \\ L_c &= \frac{1}{2} \beta\lambda, \\ B &= \frac{qXV_0\lambda^2}{m_0 c^2 a^2 \gamma}, \\ \Delta &= \frac{q\pi^2 AV_0}{m_0 c^2 \beta^2 \gamma} \cos kz \sin(\omega t + \phi_0). \end{aligned} \quad (12)$$

由于注入相位的不同, 会导致轴上粒子加速情况的变化, 因此考虑到一般性, 在公式推导中不使用同步粒子所应满足的  $kz = \omega t$  关系. (10) 式中的  $B$  和  $\Delta$  分别为无量纲交变聚焦作用参数和数值变化不大的散焦或聚焦作用参数, 可以写成纵向坐标位置  $z$  的函数;  $t$  为粒子到达  $z$  处所需的时间, 仅与离子电荷  $q$ 、注入相位  $\phi_0$  和  $z$  有关, 也可写成  $z$  的函数. 因此  $h$  函数可使用纵向坐标  $z$  作为变量, 同时可以方便计算. 只需跟踪轴线上注入相位已知的一个粒子的运动, 就可记录该粒子感受到的聚焦或散

焦作用,从而求出  $h$  函数. 在计算中可将每个加速单元分成若干区间,在每个区间中的  $h$  函数用方波近似;粒子在每个区间中的能量增益,等于粒子在该区间中点处受到的电场力乘以区间长度. 轴线上粒子受到的纵向电场力为

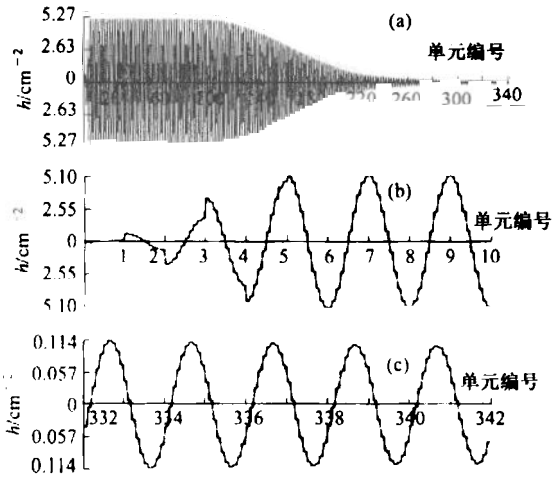


图 1 (a)  $h$  函数( $x$  向)沿纵向加速单元变化曲线;  
(b) 前 10 个加速单元中  $h$  函数沿纵向变化曲线;  
(折线为方波近似,前 6 个加速单元为径向匹配段)  
(c) 最后 10 个加速单元中  $h$  函数沿纵向变化曲线  
(折线为方波近似)

$$R = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{h(z)} \cdot dl) & \frac{1}{\sqrt{h(z)}} \sin(\sqrt{h(z)} \cdot dl) \\ -\sqrt{h(z)} \sin(\sqrt{h(z)} \cdot dl) & \cos(\sqrt{h(z)} \cdot dl) \end{pmatrix}, & h(z) > 0, \\ \begin{pmatrix} \text{ch}(\sqrt{|h(z)|} \cdot dl) & \frac{1}{\sqrt{|h(z)|}} \text{sh}(\sqrt{|h(z)|} \cdot dl) \\ \sqrt{|h(z)|} \text{sh}(\sqrt{|h(z)|} \cdot dl) & \text{ch}(\sqrt{|h(z)|} \cdot dl) \end{pmatrix}, & h(z) < 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & dl \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & h(z) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

其中  $dl$  为区间长度. 于是,从 RFQ 入口到第  $m$  个加速单元中的第  $n$  个区间结束处(假定每个加速单元分成  $N$  个区间),系统的传输矩阵  $M(z)$  可以写为

$$M_{mn} = (R_{m_n} \cdots R_{m_2} R_{m_1}) \cdots (R_{2_N} \cdots R_{2_2} R_{2_1}) (R_{1_N} \cdots R_{1_2} R_{1_1}). \quad (17)$$

粒子横向运动方程可写为

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{mn} \\ \Gamma'_{mn} \end{pmatrix} = M_{mn} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma'_0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中  $\Gamma_0 = x_0 \sqrt{\beta_0 \gamma_0}$ ,  $\Gamma_{mn} = x_{mn} \sqrt{\beta_{mn} \gamma_{mn}}$ ,  $x_0$  和  $x'_0$  分别为粒子在 RFQ 入口处的  $x$  向坐标和散角,  $x_{mn}$  和  $x'_{mn}$  分别为粒子在第  $m$  个加速单元中第  $n$  个区间结束处的  $x$  向坐标和散角;  $\beta_0$  和  $\gamma_0$  分别为粒子在入

$$E_z = \frac{kAV_0}{2} I_0(kr) \sin kz \sin(\omega t + \phi_0). \quad (13)$$

当每个加速单元中的区间数足够多时,便可获得相当正确的结果. 图 1 给出了针对洁净核能项目 RFQ 加速器的结构参数,当注入相位为  $-90^\circ$  的情况下,轴线上质子感受到的  $x$  向  $h$  函数沿纵向加速单元变化的曲线图. 其中径向匹配段包括 6 个加速单元,每个加速单元分为 10 个区间. 可以看出,  $h$  函数由径向匹配段中的非周期分布逐渐变化到匹配段后面的周期分布;  $h$  函数的幅值由小迅速增大,然后保持不变,在 RFQ 的中部幅值开始逐渐减小,在 RFQ 的出口处  $h$  函数幅值最小,但仍近似为周期分布. 令:

$$\Gamma = x \sqrt{\beta \gamma}, \quad (14)$$

(14) 式代入(9)式,并考虑到  $\beta \gamma$  随  $z$  的变化较小,忽略含有  $\left[\frac{d}{dz}(\beta \gamma)\right]^2$  及  $\frac{d^2}{dz^2}(\beta \gamma)$  的高阶项,可以得到

$$d^2 \Gamma / dz^2 + h(z) \Gamma = 0, \quad (15)$$

这样,在每个加速单元内的小区间内,  $h$  函数近似不变,则可由(15)式求得在该区间内的传输矩阵

口处的相对速度和相对论因子,  $\beta_{mn}$  和  $\gamma_{mn}$  分别为粒子在第  $m$  个加速单元中第  $n$  个区间结束处的相对速度和相对论因子,式中的导数均为对纵向坐标  $z$  求导. 由(18)式可得

$$x'_0 = \frac{\sqrt{\frac{\beta_{mn} \gamma_{mn}}{\beta_0 \gamma_0}} \cdot x_{mn} - M_{11} \cdot x_0}{M_{12}}, \quad (19)$$

又有

$$\xi_{2mn}(z) < x_{mn} < \xi_{1mn}(z). \quad (20)$$

根据(19)式和(20)式,便可求得对于某一  $x_0$  值,为满足粒子在第  $m$  个加速单元中第  $n$  个区间结束处不在  $x$  方向丢失的条件,对  $x'_0$  的取值的限制范围.

### 5 计算结果

表 1 给出了接受度计算过程中的主要参数. 对于洁净核能项目 RFQ 加速器, 入口处的最大孔半径为 7.165cm, 但结果表明接受度椭圆处在  $x$  轴  $-0.5\text{cm}$  至  $+0.5\text{cm}$  范围内. 因此为节约计算时间, 取入口处  $x, y$  起始值和结束值分别为  $-0.5\text{cm}$  和  $+0.5\text{cm}$ . 表 2 给出了注入相位为  $-90^\circ$  时的 RFQ 接受度的计算结果.

表 1 接受度计算参数

RMS 段中加速单元个数	6
每个加速单元中区间数	20
注入相位(度)	$-90^\circ$
入口处 $x$ 起始值	$-0.5\text{cm}$
入口处 $x$ 结束值	$0.5\text{cm}$
入口处 $y$ 起始值	$-0.5\text{cm}$
入口处 $y$ 结束值	$0.5\text{cm}$
$x, y$ 方向步数	100

表 2 接受度计算结果

$x-x'$ 接受度	$0.0226\text{cm}\cdot\text{rad}$
$\alpha_x$	$-0.905$
$\beta_x$	$3.23\text{cm}/\text{rad}$
$\gamma_x$	$0.564\text{rad}/\text{cm}$
$y-y'$ 接受度	$0.0226\text{cm}\cdot\text{rad}$
$\alpha_y$	$-1.34$
$\beta_y$	$4.25\text{cm}/\text{rad}$
$\gamma_y$	$0.661\text{rad}/\text{cm}$

图 2 给出了注入相位为  $-90^\circ$  时的  $x-x'$  和  $y-y'$  的接受相图, 可以看出两者相差不大. 在接受度范围以外, 求得  $x'_0$  的最大值小于它的最小值, 因此  $x'_0$  无解, 程序中令  $x'_0 = 0$ , 对应接受相图两侧  $x$  轴和  $y$  轴上的零点.

图 3 给出了注入相位从  $-180^\circ$  变化到  $+180^\circ$  (每次变化  $30^\circ$ ),  $x-x'$  和  $y-y'$  的接受相图. 除  $90^\circ$  附近小范围内接受度明显减小之外, 其它注入相位的接受相图和接受度变化不大, 由此可见, 对于时间无关的束流发射度, 径向匹配段基本实现了匹配功能. 在注入相位为  $90^\circ$  时,  $x-x'$  和  $y-y'$  接受度存在极小值, 分别为  $0.0193\text{cm}\cdot\text{rad}$  和  $0.0178\text{cm}\cdot\text{rad}$ . 这一结果表明, 与纵向相空间稳定区类似, 在  $360^\circ$  范围内, 与同步相位 ( $-90^\circ$ ) 相差最大的注入相位 ( $90^\circ$  或  $-270^\circ$ ) 处, 横向接受度最小.

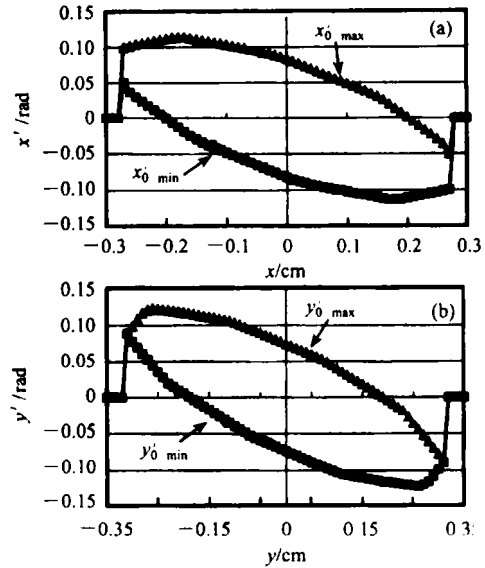


图 2 (a)  $x-x'$  接受相图; (b)  $y-y'$  接受相图

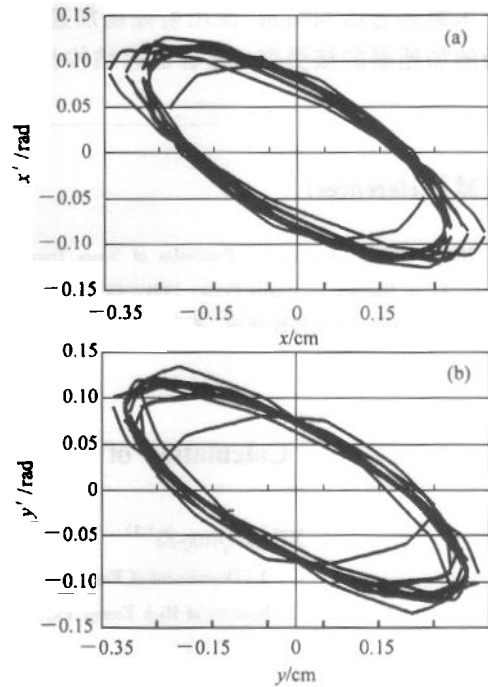


图 3 (a) 不同注入相位的  $x-x'$  接受相图; (b) 不同注入相位的  $y-y'$  接受相图

以上求得的是某一注入相位时 RFQ 的接受度, 但入口处束流为连续束, 相位在整个  $2\pi$  周期内连续分布, 因此必须计算出所有注入相位情况下系统的接受度, 将所有接受度椭圆画在一起, 找出它们相互重合的部分, 并求出面积最大的内切椭圆, 才是系统真正的接受度. 结果表明, 对于洁净核能项目 RFQ 加速器, 加速质子束时, 在  $x-x'$  平面接受度为  $0.0153\text{cm}\cdot\text{rad}$ ,  $\alpha_x = -1.12$ ,  $\beta_x = 4.08\text{cm}/\text{rad}$ ,  $\gamma_x =$

0.553rad/cm; 在  $y-y'$  平面接受度为 0.0114cm·rad,  $\alpha_y = -1.37$ ,  $\beta_y = 5.06\text{cm/rad}$ ,  $\gamma_y = 0.570\text{rad/cm}$ . 计算中忽略了注入相位为  $90^\circ$  时的结果, 认为它对系统总的接受度影响不大. 动力学模拟的结果也表明了这种忽略是可以的.

## 6 结论

进行粒子动力学模拟可以验证本文方法求出的 RFQ 接受度. 我们使用国际通用的 PARMTEQ 程序, 针对洁净核能 RFQ 加速器结构参数进行动力学模拟, 其中模拟粒子数取 5000, 束流流强为 30mA, 粒子初始分布处在本文计算得出的 RFQ 接受相图区域内, 如图 4 所示. 在 RFQ 出口处, 模拟结果得到了高的传输效率(96.7%).

除求解 RFQ 加速器的接受度外, 本文的方法也适用于求解其它已知结构、使用射频场加速、线性横向电场的加速器的接受度. 随着加速结构长度的增

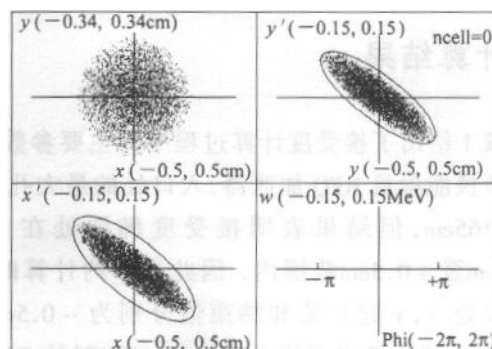


图 4 RFQ 接受相图及粒子初始分布

加, 每个加速单元中区间数的增加, 入口处  $x_0, y_0$  取值范围的增大以及步数的增多, 将需要更多的计算机内存及计算时间. 但在计算机功能日益强大的今天, 使用这种方法进行计算是很容易的事情.

李泉凤和罗紫华两位老师与作者进行了很多有益的讨论, 在此表示感谢.

## 参考文献 (References)

- XIA Hui-Qin, LIU Chun-Liang. Principles of Beam Transportation. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1991. 43-44 (in Chinese) (夏慧琴, 刘纯亮. 束流传输原理. 西安: 西安交通大学出版社, 1991. 43-44)
- LUO Zi-Hua, LUO Ying-Xiong, WANG Lin-Lin. HEP & NP, 1982, 6(6):688-696 (in Chinese) (罗紫华, 罗应雄, 王林林. 高能物理与核物理, 1982, 6(6):688-696)

## Calculation of Beam Acceptance for RFQ Accelerators\*

XING Qing-Zi<sup>1,1)</sup> FU Shi-Nian<sup>2</sup> LIN Yu-Zheng<sup>1</sup> FANG Shou-Xian<sup>2</sup>

1 (Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

2 (Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

**Abstract** A method based on the transverse particle motion equation is described for the calculation of beam acceptance for RFQ accelerators. The result is given for a four-vane type RFQ accelerator with specific structure parameters. The system acceptance for proton beam is 0.0153 cm·rad in  $x-x'$  phase space, and 0.0114 cm·rad in  $y-y'$  phase space. The method can also be applied for the calculation of acceptance for other RF accelerators with known structures and linear transverse electric fields.

**Key words** acceptance, RFQ accelerator, clean nuclear power

Received 23 August 2002, Revised 31 October 2002

\* Supported by Major State Basic Research Development Program (G1999022600)

1) E-mail: xqz98@mails.tsinghua.edu.cn