第 27 卷 第 3 期
2003 年 3 月

高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.27, No.3
Mar., 2003

$S_f \supset S_{f-1}$约化系数的解析表式

戴连荣　潘峰
（辽宁师范大学物理系　大连　116029）

摘要　利用线性方程方法和解析延拓得到了导出置换群 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数解析表达式的一种简单的代数计算方法. 着重讨论了无重复度时 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数解析表达式的推导方法. 作为例子，给出了关于置换群内积$[f-1,1]\cdot[f-1,1]$和$[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]$有关的所有 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数的解析表达式.

关键词　置换群　约化系数　线性方程方法　解析表达式　CG 系数

1　引言

置换群 S_f 的 CG 系数在许多量子多体问题的计算中都有重要的应用. 文献[1—4]的结果显示，利用 Schur-Weyl 双关性关系，置换群 S_f 的 CG 系数可用来计算幺正群 $U(mn) \supset U(m) \times U(n)$ 的直接耦合系数和 $SU(mn) \supset SU(m) \times SU(n)$ 的母分系数(CFP)等等. 而这些幺正群的耦合系数在核结构[5]和强子的组分夸克模型[6—8]中是十分有用的工具. 目前，对少于或等于 6 个粒子系统所相应的这些系数都已经有大量的数值表可供查用[9—12]，但对于超过 6 个粒子的系统所涉及的系数还没有系统的结果. 例如，在讨论 6 夸克系统中的夸克－反夸克激发时[6]，就会遇到 $S_f(f \geqslant 8)$ 的 CG 系数；而如果以后要进一步研究 9 夸克所构成的 3 重子系统，就会遇到 $S_f(f \geqslant 9)$ 的 CG 系数. 在这种情况下，研究当 f 较大时置换群 CG 系数的简便计算方法就成为首先需要解决的问题.

计算 S_f 的 CG 系数有多种方法[1—5,9—12]. Vanagas 曾研究过一种推广的张量代数方法[5]，在该方法中物理系统的单体和二体算符可表示为置换群的不可约张量算子，从而就可利用 Wigner-Racah 的张量算符技术来计算相应的矩阵元和置换群的 CG 系数和拉卡系数. 通过该方法能够计算置换群 $S_f \supset S_{f-1}$ 的某些简单的约化系数的解析表达式. 但是，随着表示维数的增大，该方法就变得较为困难而难于被推广应用，所以以往的计算就沿着向数值解的方向发展. 现在 $S_f(f \leqslant 6)$ CG 系数的数值表主要是 Schindler 和 Mirman 的小数形式的表格[11,12]和陈金全等利用本征函数方法[9,10]得到的分数形式的表格. 最近，文献[13]利用 Hamermesh 的递推关系[1]又计算了 $S_f \supset S_{f-1}$ 当 $f \leqslant 6$ 时的约化系数，并给出了分数形式的表格. 显然，随着 f 的增大，利用上述方法的计算量将急剧增加，而且其结果所给出的数值表将越来越多，从而给计算和使用都带来很大的困难. 实际上，通过对 $f \leqslant 6$ 的数值表的仔细对照和分析可以发现，大量 f 不同的表格都具有类似的结构. 这反映了在计算某些特定 f 值的系数后对 f 进行解析延拓而得到任意 f 的相应系数是完全可能的.

本文利用线性方程方法得到了系统地计算置换群 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数解析表达式的代数方法. 线性方程方法已被证明是处理 Hecke, Brauer 和 Birman-Wenzl 代数等不可约表示和各种耦合系数和重新耦合系数的有效的解析计算方法[14—18]. 文献[18]提出了计算 Hecke 代数 $H_f(q)$ 张量约化系数的线性方程方法. 当 $q \to 1$ 时，这些约化系数就是置换群 S_f 的 CG 系数. 第 2 节，给出基于线性方程方法而得到置换群 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数解析表达式的代数计算步

2002－05－14 收稿
* 国家自然科学基金(10175031, 10047002)资助

骤．第 3 节，作为例子，给出了利用该方法得到的关于内积耦合$[f-1,1]\cdot[f-1,1]$和$[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]$的 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数的解析表达式．

2 线性方程方法

置换群 S_f 可用$f-1$ 个生成元$\{g_i; i=1,2,\cdots,f-1\}$来定义．这些生成元实际上就是邻近对换，并满足如下关系：

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, g_i g_j = g_j g_i \text{ for } |i-j| \geqslant 2, \tag{1}$$

和约束条件

$$g_i^2 = 1. \tag{2}$$

设有两同阶的置换群 $S_f^{(k)}$ $(k=1,2)$，其内积 $S_f^{(1)} \cdot S_f^{(2)}$ 通过其生成元 $g_i^{(k)} \in S_f^{(k)}$ 定义为

$$G_i = g_i^{(1)} g_i^{(2)} \in S_f^{(1)} \cdot S_f^{(2)}, \tag{3}$$

其中 $i=1,2,\cdots,f-1$．容易验证，新的算符 G_i $(i=1,2,\cdots,f-1)$仍然满足置换群的定义(1)和(2)．所以$\{G_i\}$生成同阶置换群 S_f．

内积的约化系列被称作置换群的 CG 系列，定义为

$$[\nu_1]\cdot[\nu_2] = \sum_{\nu}\{\nu_1\nu_2\nu\}[\nu], \tag{4}$$

其中$[\nu_1]$和$[\nu_2]$是 $S_f^{(1)}$ 和 $S_f^{(2)}$ 的不可约表示，$[\nu]$是 S_f 的不可约表示，而$\{\nu_1\nu_2\nu\}$是不可约表示$[\nu]$在约化中重复出现的次数．

设$|Y_{m_k}^{[\nu_k]}\rangle$ $(k=1,2)$是置换群 S_f^k 不可约表示$[\nu_k]$的基底，则 $S_f^1 \cdot S_f^2$ 的非耦合基底可记为[13]

$$|Y_{m_1}^{[\nu_1]}\rangle|Y_{m_2}^{[\nu_2]}\rangle, \tag{5}$$

其中 $Y_m^{[\nu]}$ 是标准杨盘，而$|Y_m^{[\nu]}\rangle$是不可约表示$[\nu]$正交基底的分量，m 就是其分量的指标，即基矢$|Y_m^{[\nu]}\rangle$满足正交条件$\langle Y_m^{[\nu]}|Y_{m'}^{[\nu]}\rangle = \delta_{mm'}$．$[\nu]\equiv[\nu_1\nu_2\cdots\nu_f]$并满足 $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \cdots \geqslant \nu_f$ 和$\sum_i \nu_i = f$ 代表具有f 个方块的杨图．不可约表示$[\nu]$的非耦合基(5)和耦合基之间存在幺正变换，即

$$|Y_m^{[\nu]};\tau\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2}|Y_{m_1}^{[\nu_1]}\rangle|Y_{m_2}^{[\nu_2]}\rangle, \tag{6}$$

其中 τ 是由于在约化 $S_f^{(1)}\cdot S_f^{(2)} \downarrow S_f$ 中存在重复度而引入的附加指标．(6)式中的系数 $C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2}$ 就是 $S_f^{(1)}\cdot S_f^{(2)} \downarrow S_f$ 的 CG 系数．CG 系数满足

1) 幺正条件

$$\sum_{m_1 m_2} C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2} C^{[\nu']m';\tau'}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2} = \delta_{\nu\nu'}\delta_{mm'}\delta_{\tau\tau'}, \tag{7a}$$

$$\sum_{m\tau} C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2} C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1';[\nu_2]m_2'} = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}. \tag{7b}$$

2) 对称性

$$C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2} = \epsilon(\nu_1\nu_2\nu) C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_2]m_2;[\nu_1]m_1}, \tag{8}$$

其中 $\epsilon(\nu_1\nu_2\nu)$是一个有待稍后确定的相因子

我们将利用文献[18]提出的线性方程方法(LEM)，即利用置换群生成元所导出的 CG 系数之间所满足的线性关系来计算 $S_f\cdot S_f \downarrow S_f$ 的 CG 系数．首先，令 $g_i Y_m^{[\nu]}$ 为 $Y_m^{[\nu]}$ 中通过数码 i 和 $i+1$ 对换而得到的标准杨盘，如果在数码 i 和 $i+1$ 对换后得到的是非标准杨盘，就把相应的基矢$|g_i Y_m^{[\nu]}\rangle$设为 0．于是，生成元$\{g_i^{(k)}, i=1,2,\cdots,f-1; k=1,2\}$作用在非耦合基$|Y_{m_1}^{[\nu_1]}\rangle|Y_{m_2}^{[\nu_2]}\rangle$上的结果可通过如下标准关系得到[18,19]

$$g_i|Y_m^{[\nu]}\rangle = \frac{1}{d_i}|Y_m^{[\nu]}\rangle + \left(\frac{(d_i+1)(d_i-1)}{d_i^2}\right)^{1/2}|(g_i Y_m^{[\nu]})\rangle, \tag{9}$$

其中 d_i 是在杨盘 $Y_m^{[\nu]}$ 中，从 i 到 $i+1$ 的轴距离，并规定向上和向右的移动方向为正．

将 $G_i = g_i^{(1)} g_i^{(2)}$ $(i=1,2,\cdots,f-1)$作用于(6)式，其(6)式的左端变为

$$\sum_{m';m_1'm_2'} (G_i)^{[\nu]}_{m'm} C^{[\nu]m';\tau}_{[\nu_1]m_1';[\nu_2]m_2'}|Y_{m_1'}^{[\nu_1]}\rangle|Y_{m_2'}^{[\nu_2]}\rangle, \tag{10}$$

其中$(G_i)_{m'm}$是 G_i 在(9)式给出的标准基下的矩阵元．而(6)式的右端变为

$$\sum_{m_1 m_2 m_1' m_2'} C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2}(g_i^{(1)})_{m_1' m_1} \times (g_i^{(2)})_{m_2' m_2}|Y_{m_1'}^{[\nu_1]}\rangle|Y_{m_2'}^{[\nu_2]}\rangle, \tag{11}$$

其中$(g_i^{(k)})_{m'_i m_i}$ $(k=1,2)$是 $g_i^{(k)}$ 在 $S_f^{(k)}$ 的标准基下的矩阵元，其结果均可通过(9)式得到．结合(10)和(11)式，就可建立 CG 系数 $C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2}$ 之间所满足的线性关系，

$$\sum_{m'}(G_i)^{[\nu]}_{m'm} C^{[\nu]m';\tau}_{[\nu_1]m_1';[\nu_2]m_2'} = \sum_{m_1 m_2} C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2}(g_i^{(1)})_{m_1' m_1}(g_i^{(2)})_{m_2' m_2}. \tag{12}$$

这些关系和幺正条件(7)在相差一个相因子的情况下构成了求解 CG 系数 $C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2}$ 的充分条件．而相因子可通过如下条件来确定：即要求具有最小分量指标 m 和 m_1 后的不为 0 的 CG 系数为正，

$$(C^{[\nu]m;\tau}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2})|_{(m,m_1)=\min} > 0, \tag{13}$$

其中$(m, m_1) = \min$表示先取指标 m 为最小,再取 m_1 为最小. 于是,容易看到相因子

$$\epsilon(\nu_1\nu_2\nu) = \mathrm{sign}\left(\left(C^{[\nu]m;r}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2}\right)\Big|_{(m_2,m_1)=\min}\right). \tag{14}$$

利用该方法,容易得到如下的简单结果:

(1) 当$[\nu_1]$和$[\nu_2]$均为对称时,$[\nu_1] = [\nu_2] = [\nu]$,

$$C^{[\nu]}_{[\nu][\nu]} = 1. \tag{15a}$$

(2) 当$[\nu_1]$为对称,而$[\nu_2]$即不对称也不反对称时,

$$C^{[\nu]m}_{[\nu_1];[\nu_2]m_2} = \delta_{\nu\nu_2}\delta_{mm_2}. \tag{15b}$$

(3) 当$[\nu_1]$为反对称,而$[\nu_2]$为对称时,

$$C^{[\nu]}_{[\nu_1];[\nu_2]} = \delta_{\nu\nu_1}. \tag{15c}$$

但是利用以上方法仅能计算给定 f 时 S_f 的 CG 系数. 根据 Racah 因子分解引理,S_f 的 CG 系数可写为

$$C^{[\nu]\tau m}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2} = \sum_{\tau'}\left\langle\begin{matrix}[\nu_1][\nu_2]\\ [\nu_1'][\nu_2']\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\tau[\nu]\\ \tau'[\nu']\end{matrix}\right\rangle C^{\tau'[\nu']m'}_{[\nu_1']m_1';[\nu_2']m_2'}, \tag{16}$$

其中$\left\langle\begin{matrix}[\nu_1][\nu_2]\\ [\nu_1'][\nu_2']\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\tau[\nu]\\ \tau'[\nu']\end{matrix}\right\rangle$是 $S_f\supset S_{f-1}$ 的约化系数,而 $C^{\tau'[\nu']m'}_{[\nu_1']m_1';[\nu_2']m_2'}$是 S_{f-1} 的 CG 系数,τ'是用来标记内积$[\nu_1']\cdot[\nu_2']\downarrow[\nu']$重复度的指标. 在无多重度时,重复度指标 τ 和τ'是多余的,从而上式可简化为

$$C^{[\nu]m}_{[\nu_1]m_1;[\nu_2]m_2} = \left\langle\begin{matrix}[\nu_1][\nu_2]\\ [\nu_1'][\nu_2']\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[\nu]\\ [\nu']\end{matrix}\right\rangle C^{[\nu']m'}_{[\nu_1']m_1';[\nu_2']m_2'}. \tag{17}$$

$S_f\supset S_{f-1}$的约化系数满足幺正条件

$$\sum_{\nu_1'\nu_2'\tau'}\left\langle\begin{matrix}[\nu_1][\nu_2]\\ [\nu_1'][\nu_2']\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\tau[\nu]\\ \tau'[\nu']\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}[\nu_1][\nu_2]\\ [\nu_1'][\nu_2']\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\bar{\tau}[\bar{\nu}]\\ \tau'[\nu']\end{matrix}\right\rangle = \delta_{\nu\bar{\nu}}\delta_{\tau\bar{\tau}}, \tag{18a}$$

$$\sum_{\tau\nu}\left\langle\begin{matrix}[\nu_1][\nu_2]\\ [\nu_1'][\nu_2']\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\tau[\nu]\\ \tau'[\nu']\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}[\nu_1][\nu_2]\\ [\bar{\nu}_1'][\bar{\nu}_2']\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\tau[\nu]\\ \bar{\tau}'[\nu']\end{matrix}\right\rangle = \delta_{\bar{\nu}_1'\nu_1'}\delta_{\bar{\nu}_2'\nu_2'}\delta_{\tau'\bar{\tau}'}. \tag{18b}$$

计算 $S_f\supset S_{f-1}$约化系数解析表达式的方法可归纳为如下几个步骤:首先,利用线性方程方法得到置换群 S_f 当f 最小并保证表示$[\nu_1]$,$[\nu_2]$和$[\nu]$存在时,关于内积$[\nu_1]\cdot[\nu_2]\downarrow[\nu]$的 CG 系数之间所满足的线性关系(12). 例如,不可约表示$[f-1,1]$当$f\geqslant 2$时存在,而不可约表示$[f-2,1,1]$仅当$f\geqslant 3$时存在,$[f-2,2]$在$f\geqslant 4$存在等等. 然后,在无多重度时,利用(17)和(12)式得到 $S_f\supset S_{f-1}$约化系数之间所满足的线性关系. $S_f\supset S_{f-1}$约化系数是f相关的. 可以通过对f的解析延拓,即在给定f时的$S_f\supset S_{f-1}$约化系数中,将给定的f用任意f来替代. 事实上,人们容易发现具有相同耦合的约化系数之间所满足的关系都是相同的. 所以就可通过f的解析延拓从具有给定f值的约化系数得到任意f值的约化系数. 在这一步中,人们需要利用(12)式给出的轴距离 d_{f-1}关于f的一般表达式. 最后,就可利用这些延拓后的关于任意f值的约化系数之间的关系和约化系数所满足的幺正关系

$$\sum_{\nu_1'\nu_2'}\left\langle\begin{matrix}[\nu_1][\nu_2]\\ [\nu_1'][\nu_2']\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[\nu]\\ [\nu']\end{matrix}\right\rangle^2 = 1, \tag{19}$$

在相差一个相因子的情况下来计算这些约化系数. 本文关于置换群 CG 系数的相归约和文献[19]取得一致. 以下,利用符号$[\nu]_p$来表示$[\nu][\nu']$关于$S_f\supset S_{f-1}$的约化$[\nu]\downarrow[\nu']$,其中 p 为最大的数码f在杨图$[\nu]$中所在的行编号. 例如,$[f-1,1][f-1]\equiv[f-1,1]_2$,$[f-1,1][f-2,1]\equiv[f-1,1]_1$ 等等. 这一标记方法将大大简化最后的结果. 下面,将给出两个例子来说明这一解析计算方法.

例 1. 导出 $S_f\supset S_{f-1}$关于内积$[f-1,1]\cdot[f-1,1]\downarrow[f]_1$的约化系数.

由于 $S_f\supset S_{f-1}$的相关约化$[f-1,1]\downarrow[f-2,1]$仅当$f\geqslant 3$时出现,所以本例要取$f=3$开始计算. 需要考虑如下展开式

$$|[3]_1\rangle = \sum_{m_1m_2} C^{[3]}_{m_1m_2}|Y^{[21]}_{m_1}Y^{[21]}_{m_2}\rangle. \tag{20a}$$

步骤 1. 将 $G_1 = g_1^{(1)}g_1^{(2)}$ 作用于式(20a)得到

$$|[3]_1\rangle = c_1|Y_1^{[21]}Y_1^{[21]}\rangle + c_2|Y_2^{[21]}Y_2^{[21]}\rangle. \tag{20b}$$

通过 G_1 的作用后容易看到,其他 CG 系数明显为 0.

步骤 2. 对以上结果进行如下延拓:$[3]\to[f]$,和$[21]\to[f-1,1]$. 于是,(20b)变为

$$|[f]_1\rangle = c_1|[f-1,1]_1[f-1,1]_1\rangle + c_2|[f-1,1]_2[f-1,1]_2\rangle. \tag{20c}$$

步骤 3. 将 $G_2\to G_{f-1}$作用于式(20c),(20c)的左端变为

$$c_1|[f-1,1]_1[f-1,1]_1\rangle + c_2|[f-1,1]_2[f-1,1]_2\rangle, \tag{20d}$$

而式(20c)的右端变为

$$c_1\Big(\frac{1}{(f-1)^2}|[f-1,1]_1[f-1,1]_1\rangle$$

$$\frac{f(f-2)}{(f-1)^2}|[f-1,1]_2[f-1,1]_2\rangle +$$

$$\frac{\sqrt{f(f-2)}}{(f-1)^2}\Big(\big|[f-1,1]_1[f-1,1]_2\rangle +$$

$$\big|[f-1,1]_2[f-1,1]_1\rangle\Big)\Big) +$$

$$c_2\Big(\frac{1}{(f-1)^2}\big|[f-1,1]_2[f-1,1]_2\rangle +$$

$$\frac{f(f-2)}{(f-1)^2}\big|[f-1,1]_1[f-1,1]_1\rangle -$$

$$\frac{\sqrt{f(f-2)}}{(f-1)^2}\Big(\big|[f-1,1]_1[f-1,1]_2\rangle +$$

$$\big|[f-1,1]_2[f-1,1]_1\rangle\Big)\Big). \tag{20e}$$

结合式(20d)和(20e)，得到

$$c_1 = c_2. \tag{20f}$$

由于解析性和连续性，式(20f)对 $f \geqslant 3$ 也成立．所以对任意 f，式 20(c)可写为

$$\big|[f]_1\rangle = C_f\big|[f-1,1]_2[f-1,1]_2\rangle +$$

$$C_f\sum_{m_1 m_2}\big|Y^{[f-1,1]_1}_{m_1}Y^{[f-1,1]_1}_{m_2}\rangle =$$

$$C_f\big|[f-1,1]_2[f-1,1]_2\rangle +$$

$$\frac{C_f}{C_{f-1}}\Big(\big|[f-1,1]_1[f-1,1]_1\rangle\Big)^{[f]_1}, \tag{20g}$$

其中

$$C_f = c_1 = \langle[f-1,1]_2[f-1,1]_2\big|[f]_1\rangle,$$

$$c_2 = \frac{C_f}{C_{f-1}} = \langle[f-1,1]_1[f-1,1]_1\big|[f]_1\rangle \tag{21}$$

就是在耦合中所出现的约化系数．

步骤 4．最后，利用幺正条件(19)，可以得到 C_f^2 所满足的递推关系为

$$C_f^2 = \frac{C_{f-1}^2}{C_{f-1}^2 + 1}. \tag{22}$$

由初始值 $C_2^2 = 1$，最后得到

$$\langle[f-1,1]_2[f-1,1]_2\big|[f]_1\rangle = +\sqrt{\frac{1}{f-1}},$$

$$\langle[f-1,1]_1[f-1,1]_1\big|[f]_1\rangle = +\sqrt{\frac{f-2}{f-1}}, \tag{23}$$

其中相因子由相归约取为 $C_f > 0$，这和文献[19]中所取的相归约一致．而关于约化 $[f-1,1]\cdot[f-1,1]\downarrow[f-1,1]_2$ 的系数可通过幺正条件

$$\sum_{[\nu]_p}\langle[\nu_1]_{p1}[\nu_2]_{p2}\big|[\nu]_p\rangle^2 = 1 \tag{24}$$

得到．最后的结果见表 3．

例 2．导出 $S_f \supset S_{f-1}$ 关于内积 $[f-1,1]\cdot[f-1,1]\downarrow[f-1,1]_1$ 的约化系数．本例中取 $f = 4$．将 $G_1 = g_1^{(1)}g_1^{(2)}$ 作用于和(20a)类似的展开式后，得到

$$\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle = a_1\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle + a_2\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle +$$

$$a_3\Big(-\sqrt{\frac{1}{f-2}}\left|\begin{matrix}134\\2\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}134\\2\end{matrix}\right\rangle +$$

$$\sqrt{\frac{f-3}{f-2}}\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle\Big). \tag{25}$$

其中 $C^{[21]_1}_{[21]_1[21]_1}$ 和 $C^{[21]_1}_{[21]_2[21]_2}$ 已用 $C^{[f-1,1]_1}_{[f-1,1]_1[f-1,1]_1}$ 和 $C^{[f-1,1]_1}_{[f-1,1]_2[f-1,1]_2}$ 分别替代，并应用了通过例 1 计算出的解析表达式，而

$$a_1 = \langle[f-1,1]_1[f-1,1]_2\big|[f-1,1]_1\rangle,$$

$$a_2 = \langle[f-1,1]_2[f-1,1]_1\big|[f-1,1]_1\rangle, \tag{26}$$

$$1,1]_1[f-1,1]_1\big|[f-1,1]_1\rangle,$$

$$\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle = \sqrt{\frac{f-2}{f-1}}\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle -$$

$$\sqrt{\frac{1}{(f-1)(f-2)}}\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle -$$

$$\sqrt{\frac{f-3}{(f-1)(f-2)}}\left|\begin{matrix}134\\2\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}134\\2\end{matrix}\right\rangle. \tag{27}$$

将 $G_3 \to G_{f-1} = g_{f-1}^{(1)}g_{f-1}^{(2)}$ 作用于式(25)后，式(25)的左端变为

$$G_{f-1}\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{f-1}\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle + \sqrt{\frac{f(f-2)}{(f-1)^2}}\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle, \tag{28}$$

而式(25)的右端变为

$$\Big(-\frac{a_1}{(f-1)^2} + a_2\frac{f(f-2)}{(f-1)^2} + a_3\sqrt{\frac{f(f-3)}{(f-1)^4}}\Big)$$

$$\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle +$$

$$\Big(a_1\frac{f(f-2)}{(f-1)^2} - \frac{a_2}{(f-1)^2} + a_3\sqrt{\frac{f(f-3)}{(f-1)^4}}\Big)$$

$$\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle +$$

$$\Big(-a_1\sqrt{\frac{f(f-2)}{(f-1)^4}} - a_2\sqrt{\frac{f(f-2)}{(f-1)^4}} +$$

$$a_3\frac{f\sqrt{(f-2)(f-3)}}{(f-1)^2}\Big)\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}123\\4\end{matrix}\right\rangle +$$

$$\Big(a_1\sqrt{\frac{f(f-2)}{(f-1)^4}} + a_2\sqrt{\frac{f(f-2)}{(f-1)^4}} + \frac{a_3}{(f-1)^2}\sqrt{\frac{f-3}{f-2}}\Big)$$

$$\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}124\\3\end{matrix}\right\rangle - a_3\sqrt{\frac{1}{f-2}}\left|\begin{matrix}134\\2\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}134\\2\end{matrix}\right\rangle. \tag{29}$$

结合(25)和(27)—(29)式,得到

$$a_1 = a_2 = -\sqrt{\frac{1}{(f-1)(f-2)}},$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{f(f-3)}{(f-1)(f-2)}}. \tag{30}$$

利用这一方法,人们可以通过最小 f 时 $S_f \supset S_{f-1}$ 的约化系数的计算并解析延拓为任意 f 后得到任意 f 时 $S_f \supset S_{f-1}$ 的约化系数. 对最小 f 的要求是,只要相应约化系数所涉及的表示存在即可. 在计算中幺正条件(24)和

$$\sum_{p_1 p_2} \langle [\nu_1]_{p_1} [\nu_2]_{p_2} | [\nu]_p \rangle^2 = 1 \tag{31}$$

总是有用的. 某些计算结果将在下一节给出.

3　$S_f \supset S_{f-1}$ 的无多重性约化系数

作为上节所介绍方法应用的例子,本节给出 $S_f \supset S_{f-1}$ 关于内积 $[f-1,1]\cdot[f-1,1]$ 和 $[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]$ 的约化系数,这些系数都是无多重性的. 事实上,本方法不需要事先知道(4)式中的内积约化规则,因为线性方程方法本身能完全决定约化规则. 某些相关的内积约化规则见表1. 利用表2给出的维数公式容易检验表1中这些约化公式的正确性. $S_f \supset S_{f-1}$ 关于内积 $[f-1,1]\cdot[f-1,1]$ 和 $[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]$ 的约化系数的所有解析表达式由表3—7给出. 需要指出,表3的计算需要利用 $f=3$ 的特例来进行推导,然后经对 f 的解析延拓而得到任意 f 时的代数表达式;而表4,5需要利用 $f=4$ 的情况来计算,再进行解析延拓;而表6,7则需要计算 $f=5$ 的情况;等等. 在计算过程中,始终利用文献[19]所定义的 S_fCG 系数的相归约. 显而易见,在利用本文的方法时,与其他表示的内积耦合有关的约化系数的解析计算要用到更高阶置换群耦合系数的计算过程. 例如,在计算与内积 $[f-2,2]\cdot[f-2,2]\downarrow[f-4,3,1]$ 有关的约化系数表达式时,需要用到 $f=7$ 时相同约化系数的计算过程;而如要计算与内积 $[f-2,2]\cdot[f-2,2]\downarrow[f-4,4]$ 有关的约化系数,则要用到 $f=8$ 时相应系数的计算过程;等等. 所以,其计算过程也将随之变得越来越复杂. 两个与所讨论内积有关的平凡约化系数是

$$\langle [f-2,1,1]_1 [f-1,1]_1 | [f-3,2,1]_1 \rangle = 1,$$

$$\langle [f-2,1,1]_1 [f-1,1]_1 | [f-3,1,1]_1 \rangle = 1.$$

表1　置换群 S_f 的部分内积约化规则

$[f-1,1]\cdot[f-1,1] = [f]+[f-1,1]+[f-2,1,1]+[f-2,2]$

$[f-1,1]\cdot[f-2,2] = [f-1,1]+[f-2,2]+[f-2,1,1]+[f-3,3]+[f-3,2,1]$

$[f-2,1,1]\cdot[f-1,1] = [f-1,1]+[f-2,2]+[f-2,1,1]+[f-3,2,1]+[f-3,1^3]$

$[f-2,2]\cdot[f-2,2] = [f]+[f-1,1]+2[f-2,2]+[f-2,1,1]+[f-3,3]+2[f-3,2,1]+[f-3,1^3]+[f-4,4]+[f-4,3,1]+[f-4,2,2]$

$[f-2,1,1]\cdot[f-2,2] = [f-1,1]+[f-2,2]+2[f-2,1,1]+[f-3,3]+2[f-3,2,1]+[f-3,1^3]+[f-4,3,1]+[f-4,2,1^2]$

$[f-2,1,1]\cdot[f-2,1,1] = [f]+[f-1,1]+2[f-2,2]+[f-2,1,1]+[f-3,3]+2[f-3,2,1]+[f-3,1^3]+[f-4,2,2]+[f-4,2,1^2]+[f-4,1^4]$

表2　部分置换群 S_f 不可约表示的维数公式

$\dim([f]) = 1$
$\dim([f-1,1]) = f-1$
$\dim([f-2,2]) = f(f-3)/2$
$\dim([f-2,1^2]) = (f-1)(f-2)/2$
$\dim([f-3,2,1]) = f(f-2)(f-3)/3$
$\dim([f-3,1^3]) = (f-1)(f-2)(f-3)/6$
$\dim([f-3,3]) = f(f-1)(f-5)/6$
$\dim([f-4,4]) = f(f-1)(f-2)(f-7)/24$
$\dim([f-4,2,1^2]) = f(f-2)(f-3)(f-5)/8$
$\dim([f-4,2^2]) = f(f-1)(f-4)(f-5)/12$
$\dim([f-4,3,1]) = f(f-1)(f-3)(f-6)/8$
$\dim([f-4,1^4]) = (f-1)(f-2)(f-3)(f-4)/24$

表3　$[f-1,1]\cdot[f-1,1]\downarrow[f]+[f-1,1]$ 的约化系数

	$[f]_1$	$[f-1,1]_2$
$[f-1,1]_2[f-1,1]_2$	$\sqrt{\frac{1}{f-1}}$	$\sqrt{\frac{f-2}{f-1}}$
$[f-1,1]_1[f-1,1]_1$	$\sqrt{\frac{f-2}{f-1}}$	$-\sqrt{\frac{1}{f-1}}$

表4　$[f-1,1]\cdot[f-1,1]\downarrow[f-1,1]+[f-2,2]+[f-2,1,1]$ 的约化系数

	$[f-1,1]_1$	$[f-2,2]_2$	$[f-2,1,1]_3$
$[f-1,1]_2[f-1,1]_1$	$-\sqrt{\frac{1}{(f-1)(f-2)}}$	$\sqrt{\frac{f(f-3)}{2(f-1)(f-2)}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$[f-1,1]_1[f-1,1]_2$	$-\sqrt{\frac{1}{(f-1)(f-2)}}$	$\sqrt{\frac{f(f-3)}{2(f-1)(f-2)}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
$[f-1,1]_1[f-1,1]_1$	$\sqrt{\frac{f(f-3)}{(f-1)(f-2)}}$	$\sqrt{\frac{2}{(f-1)(f-2)}}$	0

表 5　$[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]\downarrow[f-1,1]+[f-2,2]+[f-2,1,1]$ 的约化系数

	$[f-1,1]_2$	$[f-2,2]_2$	$[f-2,1,1]_3$
$[f-1,1]_2[f-2,1,1]_3$	$\sqrt{\frac{1}{f-2}}$	$\sqrt{\frac{f(f-3)}{2(f-1)(f-2)}}$	$\sqrt{\frac{f-3}{2(f-1)}}$
$[f-1,1]_1[f-2,1,1]_3$	0	$-\sqrt{\frac{f-2}{2(f-1)}}$	$\sqrt{\frac{f}{2(f-1)}}$
$[f-1,1]_1[f-2,1,1]_1$	$-\sqrt{\frac{f-3}{f-2}}$	$\sqrt{\frac{f}{2(f-1)(f-2)}}$	$\sqrt{\frac{1}{2(f-1)}}$

表 6　$[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]\downarrow[f-2,2]+[f-3,2,1]$ 的约化系数

	$[f-2,2]_1$	$[f-3,2,1]_3$
$[f-1,1]_1[f-2,1,1]_3$	$-\sqrt{\frac{1}{(f-1)^2}}$	$\sqrt{\frac{f(f-2)}{(f-1)^2}}$
$[f-1,1]_1[f-2,1,1]_1$	$-\sqrt{\frac{f(f-2)}{(f-1)^2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{(f-1)^2}}$

表 7　$[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]\downarrow[f-2,1,1]+[f-3,2,1]+[f-3,1^3]$ 的约化系数

	$[f-2,1,1]_1$	$[f-3,2,1]_2$	$[f-3,1^3]_3$
$[f-1,1]_2[f-2,1,1]_1$	$-\sqrt{\frac{f-3}{2(f-1)}}$	$\sqrt{\frac{f(f-3)}{2(f-1)(f-2)}}$	$\sqrt{\frac{1}{f-2}}$
$[f-1,1]_1[f-2,1,1]_3$	$-\sqrt{\frac{1}{2(f-1)}}$	$\sqrt{\frac{f}{2(f-1)(f-2)}}$	$-\sqrt{\frac{f-3}{f-2}}$
$[f-1,1]_1[f-2,1,1]_1$	$-\sqrt{\frac{f}{2(f-1)}}$	$-\sqrt{\frac{f-2}{2(f-1)}}$	0

4　结论

本文利用线性方程方法和对置换群 S_f 的阶 f 的解析延拓得到了导出置换群 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数解析表达式的一种简单的代数方法．本文着重讨论了无重复度时 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数解析表达式的推导方法．作为例子，给出了关于置换群内积 $[f-1,1]\cdot[f-1,1]$ 和 $[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]$ 有关的所有 $S_f \supset S_{f-1}$ 约化系数的解析表达式．显然，解析计算的结果使相关约化系数的表格大大减少．虽然本文仅介绍了无重复度的情况，但本方法也可被方便地推广到有重复度的情形．类似于线性方程方法应用于 Hecke 代数的情形[14]，具有不同重复度指标的约化系数将满足相同的线性关系式(12)．所以，具有不同重复度指标的 $S_f \supset S_{f-1}$ 的约化系数必须满足相互正交的条件．在这种情况下，有重复度的 $S_f \supset S_{f-1}$ 的约化系数的解将不再惟一．其数值将完全取决于所选用的相位约定和与此相关的对称性质[18,19]．但我们仍可利用本文的方法选择最小的 f 来进行计算，并经解析延拓而得到任意 f 时带重复度的 $S_f \supset S_{f-1}$ 的约化系数．从表 1 可以看到，当 $f \geq 6$ 时才出现有重复度的最简单情况．所以要计算带重复度的 $S_f \supset S_{f-1}$ 的约化系数至少要计算当 $f \geq 6$ 时的相应约化系数，对此我们将另文讨论．

参考文献(References)

1　Hamermesh M. Group Theory and Its Applications to Physical Problems. Reading, MA: Addison-Wesley, 1962

2　CHEN J Q. J. Math. Phys., 1981, **22**: 1

3　CHEN J Q, GAO M J. J. Phys., 1984, **A17**: 1941

4　Harvey M. Nucl. Phys., 1981, **A352**: 301

5　Vanagas V. Algebraic Method in Nuclear Theory. Vilnius: Mintis, 1972

6　Helminen C, Riska D O. Nucl. Phys., 2002, **A699**: 624

7　Straub U, ZHANG Z Y, Bauer K B et al. Phys. Lett., 1988, **B200**: 241

8　ZHANG Z Y, YU Y W, SHEN P N et al. Nucl. Phys., 1997, **A625**: 59

9　CHEN J Q, GAO M J, SHI Y J et al. Nucl. Phys., 1984, **A419**: 77

10　GAO M J, CHEN J Q. J. Phys., 1985, **A22**: 189

11　Schindler S, Mirman. J. Math. Phys., 1977, **18**: 1678

12　Schindler S, Mirman. J. Math. Phys., 1977, **18**: 1697

13　Stancu F, Pepin S. Few-Body Systems, 1999, **26**: 113

14　PAN Feng, CHEN J Q. J. Phys., 1993, **A26**: 4299

15　PAN Feng, CHEN J Q. J. Math. Phys., 1993, **A34**: 4305

16　PAN Feng. J. Phys., 1995, **A28**: 3139

17　DAI L R, PAN Feng, Draayer J P. J. Phys., 2001, **A34**: 6585

18　PAN Feng, Commun. Theor. Phys., 1999, **31**: 113

19　CHEN J Q. Group Representation Theory for Physicists. Singapore: World Scientific, 1989

Analytical Expressions for Reduced Coefficients of $S_f \supset S_{f-1}$

DAI Lian-Rong PAN Feng

(Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

Abstract An algebraic routine for the evaluation of analytical expressions of multiplicity-free reduced coefficients of $S_f \supset S_{f-1}$ is formulated based on the linear equation method and the analytical continuation of the rank f. As examples, ISFs of $S_f \supset S_{f-1}$ for the coupling $[f-1,1]\cdot[f-1,1]$ and $[f-1,1]\cdot[f-2,1,1]$ are tabulated. It is obvious that the number of ISF tables is greatly reduced in comparison with numerical results calculated by using other methods.

Key words permutation group, reduced coefficients, linear equation method, analytical expressions, CG coefficients

Received 14 May 2002

* Supported by National Natural Science Foundation of China (10175031, 10047002)