

# SU(2)非自治系统中的互补混沌 ——加速器中离子极化的稳定性\*

王顺金<sup>1;1)</sup> 郭袁俊<sup>2</sup>

1(四川大学物理系 成都 610064)

2(四川师范大学物理系 成都 610066)

**摘要** 利用 SU(2) 代数动力学方程研究了加速器中带自旋离子的极化对磁场的含时无规扰动的稳定性问题,发现低度极化的系统对磁场无规扰动十分敏感,而高度极化的系统对磁场无规扰动比较稳定;自旋守恒导致自旋纵向分量的无规涨落和横向分量的无规涨落存在着互补性. 这一结果表明,在产生离子束极化的实验中,在离子束低度极化的前期阶段,磁场应具有较高的稳定性,而在离子束极化度较高的后期阶段,磁场的稳定性要求可以放松;自旋纵向分量的无规涨落和横向分量的无规涨落的互补性有可能用来做成稳定离子极化的负反馈.

**关键词** SU(2)非自治系统 互补混沌 加速器中离子极化的稳定性

带自旋离子在加速器中沿回路运行,相对于磁极运动的粒子会感受到一个磁极产生的随时间变化的磁场. 由于加速器的磁极分布的离散性和对理论设计的偏差,以及供电电流的不稳定性,会产生一个含时的无规涨落的磁场分量. 因而,加速器中带自旋离子的极化问题,是离子自旋在随时间变化的磁场中的进动问题. 由于这个磁场含有无规分量,不但存在极化产生问题,还有一个极化的稳定性问题.

离子自旋在随时间变化的磁场中的进动问题,是一个典型的 SU(2)线性非自治量子动力系统问题. 所谓 SU(2)线性非自治量子系统,是指其哈密顿量为 SU(2)生成子的线性函数,而其迭加系数与时间有关. 它是具有重要意义的时间有关的量子系统问题<sup>[1-3]</sup>.

最近,用代数动力学方法<sup>[4]</sup>得到了 SU(2)线性非自治量子系统的解析解<sup>[1-3]</sup>. 本文应用得到的解析解,讨论加速器中带自旋离子的极化对磁场的含时无规扰动的稳定性问题.

离子自旋在随时间变化的磁场中的进动,可用

下述哈密顿量描述

$$\hat{H}(t) = B_1(t)\hat{j}_1 + B_2(t)\hat{j}_2 + B_3(t)\hat{j}_3 = B(t) \cdot \hat{j}, \quad (1)$$

其中系数  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  和  $B_3(t)$  均是时间的非奇异的实函数,  $\hat{j}_1$ ,  $\hat{j}_2$  和  $\hat{j}_3$  是自旋算符在离子随动坐标系中的分量,组成 SU(2)代数的生成算子,满足下面对易关系:

$$[\hat{j}_i, \hat{j}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{j}_k. \quad (2)$$

系统的代数动力学可以通过海森堡方程来定义<sup>[4]</sup>

$$\left\{ \frac{d\hat{j}_i}{dt} = \frac{1}{i}[\hat{j}_i, \hat{H}] \mid [\hat{j}_i, \hat{j}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{j}_k, \hat{H} = \hat{H}(\hat{j}_i, t) \right\}. \quad (3)$$

已经验证,线性系统(1)–(3)式具有时间有关的动力学对称性<sup>[1-3]</sup>. 系统随时间的演化由薛定谔方程决定(设  $\hbar = 1$ ):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mid \Psi(t) \rangle = \hat{H}(t) \mid \Psi(t) \rangle. \quad (4)$$

为求解上述方程,引进规范变换

$$\hat{U}_g(t) = \exp[i\nu_3(t)\hat{j}_3] \exp[i\nu_2(t)\hat{j}_2], \quad (5)$$

2003-04-28 收稿

\* 国家自然科学基金,教育部博士点基金,兰州重离子加速器国家实验室核理论基金资助

1) E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn

其中

$$\Psi(t) = \hat{U}_g^{-1}(t) \Psi(t). \quad (6)$$

经过规范变换(5)式,薛定谔方程变为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\Psi}(t)\rangle = \hat{H}(t) |\bar{\Psi}(t)\rangle, \quad (7)$$

其中规范哈密顿量  $\hat{H}(t)$  为

$$\hat{H}(t) = \hat{U}_g^{-1} \hat{H}(t) \hat{U}_g - i \hat{U}_g^{-1} \partial \hat{U}_g / \partial t. \quad (8)$$

将规范变换(5)式代入方程(8),并利用代数关系式

$$\begin{aligned} \exp\{-i\nu_i(t)\hat{j}_i\} \hat{j}_j \exp\{i\nu_i(t)\hat{j}_i\} = \\ \hat{j}_j \cos\nu_i(t) + \varepsilon_{ijk} \hat{j}_k \sin\nu_i(t), \\ i \neq j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (9)$$

可得规范变换后的哈密顿量

$$\hat{H}(t) = f(t)\hat{I}(0) = f(t)\hat{j}_3, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} f(t) = [B_2(t)\sin\nu_3(t) - \\ B_1(t)\cos\nu_3(t)] / \sin\nu_2(t), \end{aligned} \quad (11)$$

而规范变换参数  $\nu_2(t)$  和  $\nu_3(t)$  满足,

$$\begin{aligned} \nu_3 \sin\nu_2 + B_1 \cos\nu_2 \cos\nu_3 - B_2 \cos\nu_2 \sin\nu_3 + \\ B_3 \sin\nu_2 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\nu_2 + B_1 \sin\nu_3 + B_2 \cos\nu_3 = 0. \quad (13)$$

显然,  $\nu_2(t)$  和  $\nu_3(t)$  满足的运动方程是高度非线性的. 但是, 可通过动力学不变算子把方程线性化<sup>[4]</sup>. 施行规范变换的逆变换, 容易求得动力学不变的 Cartan 算子,

$$\begin{aligned} \hat{I}(t) = \hat{U}_g^{-1} \hat{I}(0) \hat{U}_g^{-1}(t) = \alpha_1(t)\hat{j}_1 + \\ \alpha_2(t)\hat{j}_2 + \alpha_3(t)\hat{j}_3, \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\alpha_i$  与  $\nu_i$  由非线性变换联系起来,

$$\alpha_1(t) = -\sin\nu_2(t)\cos\nu_3(t), \quad (15)$$

$$\alpha_2(t) = \sin\nu_2(t)\sin\nu_3(t), \quad (16)$$

$$\alpha_3(t) = \cos\nu_2(t). \quad (17)$$

$\alpha_i$  满足守恒条件

$$\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \alpha_3^2(t) = 1 \quad (18)$$

和运动方程

$$\dot{\alpha}_1(t) + B_3(t)\alpha_2(t) - B_2(t)\alpha_3(t) = 0, \quad (19)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) + B_1(t)\alpha_3(t) - B_3(t)\alpha_1(t) = 0, \quad (20)$$

$$\dot{\alpha}_3(t) + B_2(t)\alpha_1(t) - B_1(t)\alpha_2(t) = 0. \quad (21)$$

在三维参数空间,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的运动方程是线性的; 由于约束条件(18)式, 实际的运动在二维空间进行, 仍然是非线性的.

上述  $SU(2)$  动力系统, 由于  $j^2$  守恒, 只有磁量子数  $m$  可变, 因而是一维系统. 按照动力学理论,

一维自治系统是可积的, 不会出现混沌; 但一维非自治系统一般是不可积的, 有可能出现混沌. 本文研究的  $SU(2)$  动力系统是非自治的, 可以研究出现混沌运动的情况.

下面求解时间有关的薛定谔方程(4)和(7). 设  $|jm\rangle$  是  $\hat{j}_3$  的本征值为  $m$  的本征态. 则  $\hat{I}(t)$  的本征解为,

$$\hat{I}(t) |\phi_{jm}(t)\rangle = m |\phi_{jm}(t)\rangle, \quad (22)$$

$$|\phi_{jm}(t)\rangle = \hat{U}_g(t) |jm\rangle =$$

$$\sum_m D'_{m'm}(0, -\nu_2, 0) \exp(im'\nu_3) |jm'\rangle, \quad (23)$$

$D'_{m'm}$  是  $j$ -级 Wigner 函数. 方程(7)具有以下解:

$$|\bar{\Psi}_m(t)\rangle = \exp[-i\Theta_m(t)] |jm\rangle, \quad (24)$$

$$\Theta_m(t) = m \int_0^t f(t') dt'. \quad (25)$$

而方程(4)的解(称为动力学非绝热基矢)为

$$\begin{aligned} |\Psi_m(t)\rangle = \hat{U}_g |\bar{\Psi}_m(t)\rangle = \\ \exp[-i\Theta_m(t)] |\phi_{jm}(t)\rangle \end{aligned} \quad (26)$$

与不变算子  $\hat{I}(t)$  的本征矢仅相差一个时间相关的相位  $\Theta_m(t)$ . 薛定谔方程(4)的一般解可以写为非绝热基矢的展开式

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_m C_m |\Psi_m(t)\rangle, \quad (27)$$

这里  $C_m$  是时间无关的展开系数, 仅由初始条件决定. 因而系统全部动力学信息都包含在基矢  $|\Psi_m(t)\rangle$  中.

下面讨论在随时间变化的磁场中的带自旋粒子的极化问题. 对这一问题, 设

$$B_1(t) = B \sin\omega_1 t \cos\Omega_1 t, \quad (28)$$

$$B_2(t) = B \sin\omega_2 t \sin\Omega_2 t, \quad (29)$$

$$B_3(t) = B_{30} + B \cos\omega_3 t. \quad (30)$$

其中

$$\omega_i = 2\pi\eta_i, \quad \Omega_i = 2\pi\beta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (31)$$

表 1 (31)式中的频率的取值

| 条件  | 参数         |            |            |              |              | 图示     |
|-----|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------|
|     | $\eta_1$   | $\eta_2$   | $\eta_3$   | $\beta_1$    | $\beta_2$    |        |
| I   | 1          | 2          | 5          | 3            | 9            | 图 1(a) |
| II  | 1          | 2          | 5          | $\sqrt{3}$   | $\sqrt{5.7}$ | 图 1(b) |
| III | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ | 1            | 4            | 图 1(c) |
| IV  | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{4.3}$ | $\sqrt{0.8}$ | 图 1(d) |

设  $B = 1, B_{30} = 0, \eta_i$  和  $\beta_i$  的取值如表 1 所示. 由方程组(19)–(21)式在初始条件  $\alpha_1(0) = 0.6, \alpha_2(0) = 0.7$  和  $\alpha_3(0) = -\sqrt{0.15}$  的解  $\alpha_i(t)$ , 可得在 I–IV 种情况下  $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$  曲线, 如图 1 所示.

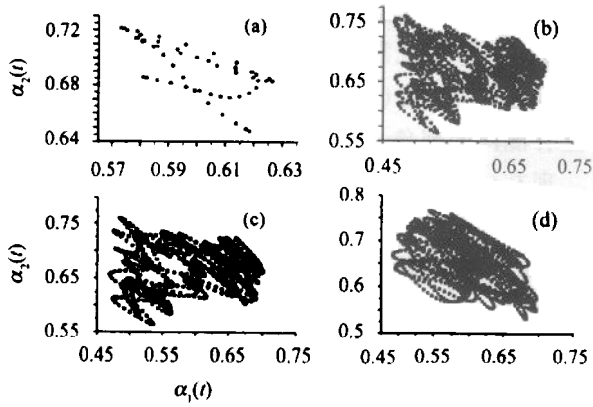


图 1  $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$  曲线

由图可见, 当  $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 =$  有理数比,  $\Omega_1 : \Omega_2 =$  有理数时,  $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$  为数目有限的点分布在一条光滑曲线上, 如图 1(a) 所示; 当其中之一为无理数时, 则它们分布于二维平面内一个区域, 比较混乱, 如图 1(b, c) 所示; 当二者均为无理数时, 则它们密布于二维平面内一个区域(时间足够长将布满该区域), 出现混沌, 如图 1(d) 所示.

考虑自旋为 1/2 的粒子的极化问题. 假定初始时刻粒子处在右手螺旋态, 即

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_{m=\frac{1}{2}}(0)\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (32)$$

则由(26)式,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m=\pm\frac{1}{2}} \exp[-i\Theta_{\frac{1}{2}}(t) + im'\nu_3(t)] \cdot D_{m, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(0, -\nu_2, 0) \left| \frac{1}{2}, m' \right\rangle, \quad (33)$$

利用 D 函数以及公式

$$\begin{aligned} \langle j, m \pm 1 | \hat{j}_1 | j, m \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}, \\ \langle j, m \pm 1 | \hat{j}_2 | j, m \rangle &= \mp \frac{i}{2} \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}, \end{aligned} \quad (34)$$

可得角动量的三分量  $\hat{j}_i$  的平均值:

$$\begin{aligned} j_1(t) &= \langle \Psi(t) | \hat{j}_1 | \Psi(t) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \sin\nu_2(t) \cos\nu_3(t) = \frac{1}{2} \alpha_1(t), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} j_2(t) &= \langle \Psi(t) | \hat{j}_2 | \Psi(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sin\nu_2(t) \sin\nu_3(t) = \frac{1}{2} \alpha_2(t), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} j_3(t) &= \langle \Psi(t) | \hat{j}_3 | \Psi(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cos\nu_2(t) = \frac{1}{2} \alpha_3(t). \end{aligned} \quad (37)$$

粒子的极化度由  $j_3(t)$  表示

$$P(t) = j_3(t) = \frac{1}{2} \alpha_3(t).$$

下面计算  $\vec{j}$  在  $\vec{\alpha}$  方向的投影的平均值, 其垂直分量和平行分量为:

$$I_{\perp}(t) = j_1(t)\alpha_1(t) + j_2(t)\alpha_2(t) = \frac{1}{2} [\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t)], \quad (38)$$

$$I_{\parallel}(t) = j_3(t)\alpha_3(t) = \frac{1}{2} \alpha_3^2(t). \quad (39)$$

当参数取上表 I—IV 的值时,  $I_{\perp}(t) - t$  和  $I_{\parallel}(t) - t$  的关系图如图 2 所示.

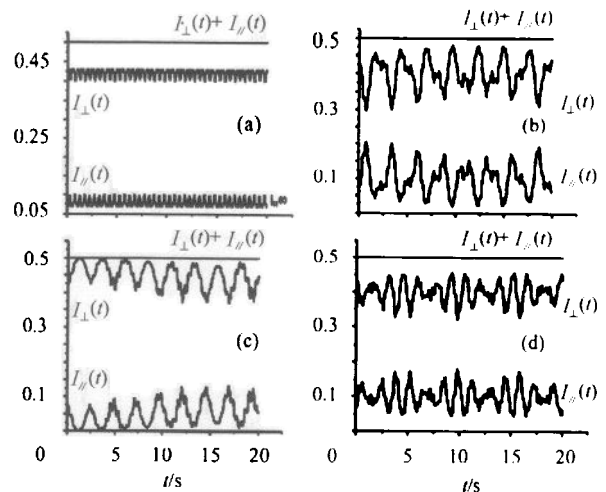


图 2  $I_{\perp}(t) - t$  和  $I_{\parallel}(t) - t$  曲线

表 2 给出图 2 中各曲线的分形维度. 由图 2 和表 2 可见, 当  $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 =$  有理数,  $\beta_1 : \beta_2 =$  有理数时,  $I_{\perp}(t) - t, I_{\parallel}(t) - t$  为规则的曲线, 如图 2 和表 2 中的(a)所示; 当其中之一为无理数时, 则它们变为不规则的曲线, 具有分形特征, 如图 2 和表 2 中的(b), (c)所示; 当二者均为无理数时, 则它们变为极不规则的曲线, 具有最大的分形维度, 如图 2 和表 2 的(d)所示.

表 2 图 2 中各曲线的分形维度  $D$

| 条件       | a              |                    | b              |                    | c              |                    | d              |                    |
|----------|----------------|--------------------|----------------|--------------------|----------------|--------------------|----------------|--------------------|
|          | $I_{\perp}(t)$ | $I_{\parallel}(t)$ | $I_{\perp}(t)$ | $I_{\parallel}(t)$ | $I_{\perp}(t)$ | $I_{\parallel}(t)$ | $I_{\perp}(t)$ | $I_{\parallel}(t)$ |
| 分形维度 $D$ | 1.0099         | 1.0099             | 1.5606         | 1.5606             | 1.5495         | 1.5495             | 1.6440         | 1.6440             |

由表 2 可见, 随着外界磁场的无规度的增加, 其分形维数的值也增大, 并且,  $I_{\perp}(t)$  与  $I_{\parallel}(t)$  的分形维度相等.

然而, 由于该  $SU(2)$  非自治系统具有动力学对称性和不变算子  $I(t)$ , 这两条具有分形特征的不规则曲线却是互补的, 它们之和等于常数, 即

$$I(t) = I_{\perp}(t) + I_{\parallel}(t) = \frac{1}{2} [\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \alpha_3^2(t)] = \frac{1}{2}. \quad (40)$$

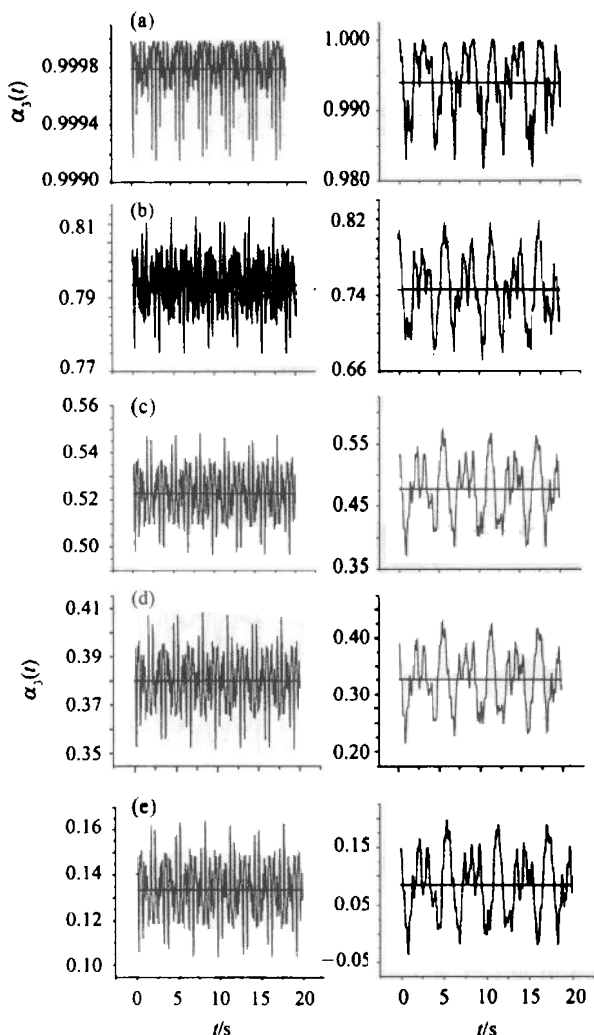


图 3 在不同频率和不同初始极化条件下,极化矢量随时间的变化

- (a)  $\alpha_1(0) = 0, \alpha_2(0) = 0, \alpha_3(0) = 1;$
- (b)  $\alpha_1(0) = 0, \alpha_2(0) = 0.6, \alpha_3(0) = 0.8;$
- (c)  $\alpha_1(0) = 0.6, \alpha_2(0) = 0.6, \alpha_3(0) = 0.529;$
- (d)  $\alpha_1(0) = 0.6, \alpha_2(0) = 0.7, \alpha_3(0) = 0.387;$
- (e)  $\alpha_1(0) = 0.7, \alpha_2(0) = 0.7, \alpha_3(0) = 0.141.$

这说明, 尽管参数取为表 1 中 II—IV 的值时,  $I_{\perp}(t), I_{\parallel}(t)$  出现混沌, 然而它们合起来却为一常量. 即是说, 在  $SU(2)$  线性非自治量子系统中出现了互补混沌的现象.

现在讨论粒子极化对磁场无规扰动的稳定性. 在 (28—30) 式中, 设  $B = 0.5, B_{30} = 2$ , 表示恒定磁场为  $B_{30} = 2$ , 受时间分量  $B$  的扰动. 在 I 和 IV 两种频率条件, 在不同初始极化条件下, 极化矢量  $2P(t) = \alpha_3(t)$  随时间的变化见图 3 (a)—(e). 由图可见: 1) 对规则频率条件 I (左图), 极化矢量稳定性好; 对不规则频率条件 IV (右图), 极化矢量稳定差; 2) 当  $\alpha_3(0) = 1$  时, 极化对扰动相当稳定, 随初始极化度的减少, 稳定性越来越差.

至此, 我们讨论了  $SU(2)$  线性非自治量子系统中的混沌问题, 并且发现了一个非常重要而有趣的结果:  $SU(2)$  线性非自治量子系统中存在着互补混沌. 这一结果有助于人们进一步认识混沌问题, 无论在理论上还是在实际问题的研究中都有一定的意义.

$SU(2)$  线性非自治量子系统可描述加速器束流中离子的极化. 这一结果表明, 在产生离子束极化的实验中, 在离子束低度极化的前期阶段, 磁场应具有较高的稳定性, 而在离子束极化度较高的后期阶段, 磁场的稳定性要求可以放松; (40) 式表示的自旋纵向分量的无规涨落和横向分量的无规涨落的互补性有可能用来做成稳定离子极化的负反馈.

此外, 根据磁场效应与转动系中科里奥利力效应的相似性, 人们发现  $SU(2)$  线性非自治量子系统也可描述转动平均场对粒子自旋取向的影响. 在核物理中, 曾有人报道<sup>[5]</sup>, 高速转动平均场会导致粒子自旋的无规进动, 与本文的结论是一致的.

## 参考文献 (References)

- |  |   |
|--|---|
| <p>1 WANG S J, ZUO W. Phys. Lett., 1994, <b>A196</b>:13</p> <p>2 WANG S J. Phys. Rev., 1990, <b>A42</b>:5107</p> <p>3 ZUO Wei, WANG S J. Acta Physica Sinica, 1995, <b>44</b>(8):1177 (in Chinese)</p> | <p>(左维, 王顺金. 物理学报, 1995, <b>44</b>(8):1177)</p> <p>4 WANG S J, LI L F, Weiguny A. Phys. Lett., 1994, <b>A180</b>:189</p> <p>5 Leander G A et al. Nucl. Phys., 1983, <b>A400</b>:97c</p> |
|--|---|

## Complementary Chaos and Spin Polarization Stability in Cyclotrons Studied from the Nonautonomous $SU(2)$ Dynamical System

WANG Shun-Jin<sup>1,1)</sup> GUO Yuan-Jun<sup>2</sup>

1 (Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

2 (Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

**Abstract** Complementary chaos and spin polarization stability in cyclotrons are studied from the nonautonomous  $SU(2)$  dynamical system by the algebraic dynamical method. The results are as follows: for the case of initially low polarization, the magnetically induced polarization is sensitive to the irregular perturbation, while for the case of initially high polarization, the magnetically induced polarization is stable with respect to the irregular perturbation. The fluctuations of the transverse and longitudinal components of the spin polarization are complementary to each other due to the existence of an invariant of the  $SU(2)$  dynamical system, which can be used as a feedback signal to control the spin polarization stability.

**Key words**  $SU(2)$  nonautonomous quantum system, complementary chaos, stability of ion polarization in cyclotron

Received 28 April 2003

\* Supported by National Natural Science Foundation, Doctoral Education Fund of the Education Ministry, Nuclear Theory Fund of HIRFL of China

1) E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn