第25卷 第3期 高能物理与核物理 Vol.25, No.3
2001年3月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 2001

正交 qs 相干态的非经典性质*

陈昌远 刘友文
(盐城师范学院物理系 盐城 224002)

摘要 构造了正交 qs 相干态,并研究了它的压缩性质、反聚束效应等非经典性质. 数值计算了形变参数 q 和 s 对非经典性质的影响.

关键词 正交 qs 相干态 压缩性质 反聚束效应

1 引言

近年来,量子群和量子代数的研究引起了人们广泛的注意,其中令人感兴趣的是 qs 形变谐振子和 qs 相干态及其在量子光学中的应用. qs 形变谐振子和 qs 相干态是 Chakrabarti[1] 在 1991 年最先提出的,后来周焕强[2]等人构造了 $\hat{a}_{qs}^2$ 的本征态即偶奇 qs 相干态,王继锁[3]等人研究了偶奇 qs 相干态的非经典性质. 文献[4—6]构造了 qs 湮没算符高次幂 $\hat{a}_{qs}^k$ 的本征态并讨论了它的压缩性质、反聚束效应等非经典性质. 结果表明,这些非经典性质明显的受到形变参数 q 和 s 的影响.

本文构造了 $\hat{a}_{qs}^2$ 的另一个本征态 $|\alpha\rangle_{qs\perp}$,由于它和 qs 相干态 $|\alpha\rangle_{qs}$ 是正交的,所以称为正交 qs 相干态,并研究了它的压缩性质和反聚束效应等非经典性质. 结果表明,正交 qs 相干态的非经典性质明显的受到形变参数 q 和 s 的影响,但它与人们已经研究过的偶奇 qs 相干态是不一样的.

2 正交 qs 相干态

qs 形变谐振子的产生算符 $\hat{a}_{qs}^+$ 和湮没算符 $\hat{a}_{qs}$ 满足如下的对易关系[1—6]

$$\hat{a}_{qs}\hat{a}_{qs}^+ - s^{-1}q\hat{a}_{qs}^+\hat{a}_{qs} = (sq)^{-\hat{N}_{qs}}, \tag{1}$$

$$[\hat{N}_{qs}, \hat{a}_{qs}] = -\hat{a}_{qs}, \tag{2}$$

$$[\hat{N}_{qs}, \hat{a}_{qs}^+] = \hat{a}_{qs}^+, \tag{3}$$

式中 $\hat{N}_{qs}$ 为粒子数算符,即

$$\hat{N}_{qs} = \hat{a}_{qs}^+\hat{a}_{qs}. \tag{4}$$

2000-03-13 收稿
* 江苏省教育厅自然科学基金资助

在 Fock 空间$\left\{|n\rangle_{qs}=\frac{(\hat{a}_{qs}^{+})^{n}}{\sqrt{[n]_{qs}!}}|0\rangle_{qs}, n=0,1,2,\cdots\right\}$内,显然有

$$\hat{a}_{qs}^{+}|n\rangle_{qs}=\sqrt{[n+1]_{qs}}|n+1\rangle_{qs}, \tag{5}$$

$$\hat{a}_{qs}|n\rangle_{qs}=\sqrt{[n]_{qs}}|n-1\rangle_{qs}, \tag{6}$$

$$\hat{a}_{qs}|0\rangle_{qs}=0. \tag{7}$$

式中

$$[n]_{qs}!=[n]_{qs}[n-1]_{qs}\cdots[1]_{qs}, \tag{8}$$

$$[n]_{qs}=s^{1-n}\frac{q^{n}-q^{-n}}{q-q^{-1}}. \tag{9}$$

qs 相干态定义为湮没算符$\hat{a}_{qs}$的本征态

$$\hat{a}_{qs}|\alpha\rangle_{qs}=\alpha|\alpha\rangle_{qs}, \tag{10}$$

$$|\alpha\rangle_{qs}=\{\mathrm{e}_{qs}^{|\alpha|^{2}}\}^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{[n]_{qs}!}}|n\rangle_{qs}, \tag{11}$$

式中 $\mathrm{e}_{qs}^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{[n]_{qs}!}$ 为 qs 指数函数.

仿照文献[7—9]的做法,引入如下的叠加态

$$|\alpha\rangle_{qs\perp}=c(-\mathrm{e}_{qs}^{-|\alpha|^{2}}|\alpha\rangle_{qs}+\mathrm{e}_{qs}^{|\alpha|^{2}}|-\alpha\rangle_{qs}), \tag{12}$$

式中 c 为归一化常数. 利用归一化条件得

$$c=[\sinh_{qs}(|\alpha|^{2})\cosh_{qs}(|\alpha|^{2})]^{-\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

式中

$$\sinh_{qs}(|\alpha|^{2})=\frac{\mathrm{e}_{qs}^{|\alpha|^{2}}-\mathrm{e}_{qs}^{-|\alpha|^{2}}}{2},\quad \cosh(|\alpha|^{2})=\frac{\mathrm{e}_{qs}^{|\alpha|^{2}}+\mathrm{e}_{qs}^{-|\alpha|^{2}}}{2} \tag{14}$$

分别为 qs 双曲正弦函数和 qs 双曲余弦函数.

由(11)式和(12)式可得

$${}_{qs}\langle\alpha|\alpha\rangle_{qs\perp}=0, \tag{15}$$

因此称态$|\alpha\rangle_{qs\perp}$为 qs 正交相干态. 由于

$$\hat{a}_{qs}^{2}|\alpha\rangle_{qs\perp}=\alpha^{2}|\alpha\rangle_{qs\perp}, \tag{16}$$

所以正交 qs 相干态和偶奇 qs 相干态一样都是$\hat{a}_{qs}^{2}$本征态,然而可以证明正交 qs 相干态和偶奇 qs 相干态并不正交,即

$${}_{qs}^{e}\langle\alpha|\alpha\rangle_{qs\perp}\neq 0,\quad {}_{qs}^{o}\langle\alpha|\alpha\rangle_{qs\perp}\neq 0. \tag{17}$$

3 压缩性质

类似于通常单模电磁场高阶压缩的定义[8—12],引入如下两个算符

$$\hat{w}_{1}=\frac{1}{2}(\hat{a}_{qs}^{+M}+\hat{a}_{qs}^{M}),\quad \hat{w}_{2}=\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{a}_{qs}^{+M}-\hat{a}_{qs}^{M}), \tag{18}$$

$\hat{w}_1$ 和 $\hat{w}_2$ 分别表示光场复振幅 M 次幂的实部和虚部. 容易证明,$\hat{w}_1$ 和 $\hat{w}_2$ 满足如下的对易关系和测不准关系

$$[\hat{w}_1,\hat{w}_2]=\frac{1}{2}[\hat{a}_{qs}^{M},\hat{a}_{qs}^{+M}], \tag{19}$$

$$\langle(\Delta\hat{w}_1)^2\rangle\langle(\Delta\hat{w}_2)^2\rangle\geqslant\frac{1}{16}\langle[\hat{a}]_{qs}^{M},\hat{a}_{qs}^{+M}\rangle^2. \tag{20}$$

若

$$\langle(\Delta\hat{w}_i)^2\rangle-\frac{1}{4}\langle[\hat{a}_{qs}^{M},\hat{a}_{qs}^{+M}]\rangle<0\qquad(\mathrm{i}=1,2), \tag{21}$$

成立,则称光场存在 M 次方压缩效应.

利用(10)式到(14)式,在 qs 相干态 $|\alpha\rangle_{qs\perp}$ 上可以得到

$$_{\perp qs}\langle\alpha|\hat{a}_{qs}^{M}|\alpha\rangle_{qs\perp}=(-1)^M\alpha^M, \tag{22}$$

$$_{\perp qs}\langle\alpha|\hat{a}_{qs}^{2M}|\alpha\rangle_{qs\perp}=\alpha^{2M}, \tag{23}$$

$$_{\perp qs}\langle\alpha|\hat{a}_{qs}^{+M}|\alpha\rangle_{qs\perp}=(-1)^M(\alpha^*)^M, \tag{24}$$

$$_{\perp qs}\langle\alpha|\hat{a}_{qs}^{+2M}|\alpha\rangle_{qs\perp}=(\alpha^*)^{2M}, \tag{25}$$

$$_{\perp qs}\langle\alpha|\hat{a}_{qs}^{+M}\hat{a}_{qs}^{M}|\alpha\rangle_{qs\perp}=\{1+2B[1-(-1)^M]\}|\alpha|^{2M}, \tag{26}$$

$$_{\perp qs}\langle\alpha|\hat{a}_{qs}^{+2M}\hat{a}_{qs}^{2M}|\alpha\rangle_{qs\perp}=|\alpha|^{4M}, \tag{27}$$

式中

$$B=(\mathrm{e}_{qs}^{-|\alpha|^2})^2/[(\mathrm{e}_{qs}^{|\alpha|^2})^2-(\mathrm{e}_{qs}^{-|\alpha|^2})^2]. \tag{28}$$

利用上述各平均值的值,对于正交 qs 相干态,得到

$$\langle(\Delta\hat{w}_1)^2\rangle-\frac{1}{4}\langle[\hat{a}_{qs}^{+M},\hat{a}_{qs}^{M}]\rangle=$$

$$\langle(\Delta\hat{w}_2)^2\rangle-\frac{1}{4}\langle[\hat{a}_{qs}^{+M},\hat{a}_{qs}^{M}]\rangle=\begin{cases}0 & (M=2n,n=1,2,\cdots)\\ 2B|\alpha|^{2M} & (M=2n+1,n=0,1,\cdots).\end{cases} \tag{29}$$

由于 $\mathrm{e}_{qs}^{x}>\mathrm{e}_{qs}^{-x}$,因此 $B>0$. 这样由(29)式可知,正交 qs 相干态仅是光场振幅偶次幂的最小测不准态,而无高阶压缩效应,且 $\hat{w}_1$ 和 $\hat{w}_2$ 在正交 qs 相干态中是等起伏的.

4　反聚束效应

对于通常的电磁场,文献[11]把二阶相关函数推广了高阶,并研究了部分光场的高阶反聚束效应[8,9,12]. 我们把此概念推广到 qs 电磁场,定义 qs 电磁场的高阶相关函数为

$$g^{(M)}(0)=\frac{_{\perp qs}\langle|\hat{a}_{qs}^{+M}\hat{a}_{qs}^{M}|\rangle_{qs\perp}}{_{\perp qs}\langle|\hat{a}_{qs}^{+}\hat{a}_{qs}|\rangle_{qs\perp}^{M}}, \tag{30}$$

若 $g^{(M)}(0)<1$,则称 qs 光场存在 M 阶反聚束效应. 若 $g^{(2)}(0)<1$,即为文献[3,5]所称的反聚束效应.

利用(26)式和(27)式易得

$$g^{(M)}(0)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+4B)^{M}} & (M=2n,n=1,2,\cdots)\\[2mm] \dfrac{1}{(1+4B)^{M-1}} & (M=2n+1,n=1,2,\cdots).\end{cases} \tag{31}$$

由于 $B>0$,所以正交 qs 相干态总是存在 M 阶反聚束效应的,而且 $2n+1$ 阶的反聚束效应与 $2n$ 阶的反聚束效应相同. 当 $q\to1$ 并且 $s=1$,qs 形变谐振子就演变为一般谐振子,此时,B 随 $|\alpha|^2$ 是单调下降的,$g^{(M)}(0)$从0单调上升趋近于1. 为了考察形变参数 q 和 s 对反聚束效应的影响,我们数值计算了不同的 q 和 s 值时的二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$,图1为 $s=5$ 时,不同的 q 对应的二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$随 $|\alpha|^2$ 的变化(由于用 q^{-1}替代 q,$[n]_{qs}$ 不变,因此只需考虑 q 从0到1的变化);图2为 $q=0.3$ 时,不同的 s 对应的二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$随 $|\alpha|^2$ 的变化. 从图1和图2可以看出,q 和 s 形变参数的引入,使相关函数 $g^{(M)}(0)$随 $|\alpha|^2$ 的变化,从单调上升演化为振荡变化,$|\alpha|^2$ 越大,振荡的周期越长. 当 s 一定时,q 越小,振荡的幅度越大,振荡周期也越长;反之,q 越大,振荡的幅度越小,振荡周期也越短. 当 q 一定时,s 越小,振荡的幅度越小,振荡周期也越短;反之,s 越大,振荡的幅度越大,振荡周期越长. 只有当 $q\to1$ 和 $s=1$ 时,振荡才消失.

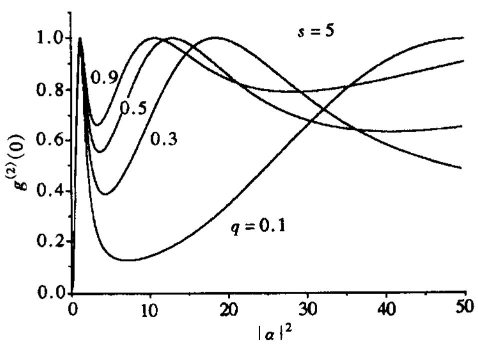

图1 $s=5$ 时,不同的 q 对应的二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$随 $|\alpha|^2$ 的变化

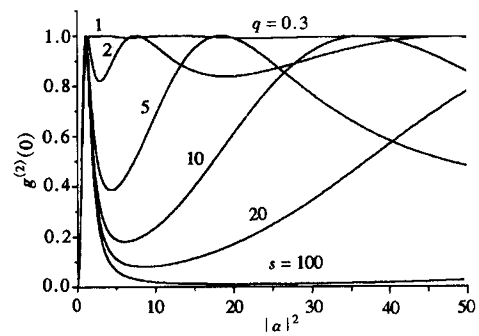

图2 $q=0.3$ 时,不同的 s 对应的二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$随 $|\alpha|^2$ 的变化

5 结论

本文引入了正交 qs 相干态,并讨论了它的非经典性质,发现正交 qs 相干态无压缩效应,它仅为 qs 光场偶次幂的最小测不准态,但它存在高阶反聚束效应. 形变参数 q 和 s 对反聚束效应有明显的影响,形变参数 q 和 s 的引入,使相关函数 $g^{(M)}(0)$随 $|\alpha|^2$ 的变化,从单调上升演化为振荡变化,且 q 和 s 的值影响着振荡的幅度和周期.

参考文献(References)

1 Chakrabarti R, Jagnnathan R. J. Phys. 1991, **A24**(3): L711—L718

2 ZHOU Huan-Qiang, HE Jing-Song, ZHANG Xin-Ming. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1995, **19**(3): 251—257

(in Chinese)
(周焕强,贺劲松,张新明. 高能物理与核物理,1995,**19**(3):251—257)
3 WANG Ji-Suo,SUN Chang-Yong,ZHAO Ming-Jian. Acta Optica Sinica,1997,**17**(3):293—297 (in Chinese)
(王继锁,孙长勇,赵铭健. 光学学报, 1997,**17**(3):293—297)
4 WANG Ji-Suo,SUN Chang-Yong,TENG Ai-Ping. High Energy Phys. and Nucl. Phys.,1997,**21**(9):793—800 (in Chinese)
(王继锁,孙长勇,滕爱萍. 高能物理与核物理,1997,**21**(9):793—800)
5 HE Jin-Yu,WANG Ji-Suo,SUN Chang-Yong. Acta Sinica Quantum Optica,1997,**3**(4):199—204 (in Chinese)
(贺金玉,王继锁,孙长勇. 量子光学学报,1997,**3**(4):199—204)
6 WANG Ji-Suo,SUN Chang-Yong,Commun. Theor. Phys.,1997,**27**(4):443—448
7 PENG Shi-An,GUO Guang-Can. Chinese Science Bulletin,1990,**35**(8):579—583(in Chinese)
(彭石安,郭光灿. 科学通报,1990,**35**(8):579—583)
8 CHEN Chang-Yuan,SUN Dong-Sheng. Acta Photonica Sinica,1998,**27**(11):975—978(in Chinese)
(陈昌远,孙东升. 光子学报,1998,**27**(11):975—978)
9 LIU You-Wen,CHEN Chang-Yuan. Chinese Journal of Quantum Electronics,2000,**17**(1):22—25(in Chinese)
(刘友文,陈昌远. 量子电子学报,2000,**17**(1):22—25)
10 ZHANG Z M,XU L,CHAI J L et al. Phys. Lett.,1990,**A150**(1):27—30
11 DU S D,GONG C D. Phys. Lett.,1992,**A168**(4):296—300
12 CHEN Chang-Yuan,LIU You-Wen. Acta Photonica Sinica,1999,**28**(3):198—201 (in Chinese)
(陈昌远,刘友文. 光子学报,1999,**28**(3):198—201)

Nonclassical Properties of the Orthogonal *qs*-Coherent State*

CHEN Chang-Yuan　LIU You-Wen
(*Department of Physics, Yancheng Teachers College, Yancheng* 224002, *China*)

Abstract The orthogonal qs-coherent state is constructed and its nonclassical properties such as squeezing property, antibunching effect are studied. The effects of q and s variables on these nonclassical properties are calculated numerically.

Key words orthogonal qs-coherent state, squeezing property, antibunching effect

Received 13 March 2000
* Supported by Natural Science Foundation of the Education Department of Jiangsu Province