

矢量有限元方法精确计算轴对称 谐振腔高阶模*

韦 石 林郁正

(清华大学工程物理系 北京 100084)

摘要 采用矢量有限元方法计算了任意轴对称谐振腔高阶模的本征频率. 这种方法能够将数学模型和物理理论很好地结合起来, 避免了一般有限元方法计算谐振腔本征模式中可能出现伪根的问题, 并且可以通过采用二阶标量和矢量基函数, 在较少的网格数的情况下得到很高的计算精度. 基于该方法的程序 Cafe 为进一步精确研究下一代直线对撞机失谐结构的尾场奠定了基础.

关键词 直线对撞机 矢量有限元 高阶模

1 引言

下一代直线对撞机(NLC)为了获得超高能量和亮度的同时不可避免地引入了不希望得到的高阶模尾场, 为了消除它们的影响, 失谐结构和阻尼结构等多种加速结构应运而生. 由于失谐结构简单, 容易实现, 并且对尾场的抑制有效, 因此特别受到研究人员的重视. 但是, 失谐结构各个腔的尺寸都不相同(图 1), 而且每个加速结构中存在着多达 150—200 个腔, 当前国际上流行的计算程序很难满足要求, 很多研究人员正致力于发展新的计算方法^[1].

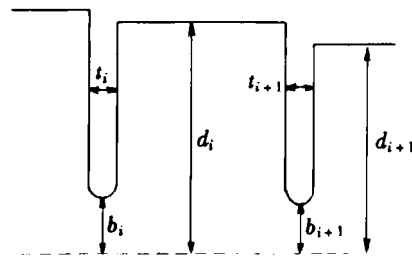


图 1 NLC 的一种失谐结构

SLAC 和 KEK 为了分析这种长腔链非均匀结构很早就提出等效电路法和场匹配法, 但由于在计算中对数学模型作了太多近似, 难以得到满意的结果. SLAC 在 90 年代中后期开始发展 W2 和 W3 程序, 它们能够得到很好的结果, 但是对软硬件的要求极高, 必须有超大内存的并行机, 难以推广使用^[2]. 与之同时, KEK 的 Yamamoto 博士发展了基于开路模展开的开模法^[3] (Open Mode Method), 把长腔链的问题转化为单腔开路模的叠加, 大大减少了计算量, 但是他仅仅利用等效电路法考虑了

2000-11-20 收稿

* 国家自然科学基金(19775030)资助

理想盘荷波导的情形,和实际情况相差较大,也无法满足我们的计算要求.

作为国内的研究人员,我们不但希望能够发展自己的长腔链计算方法,而且还希望通过它能得到真实加速结构的精确计算结果,从而达到解决实际问题的目的.因此,我们从 SLAC 和 KEK 的工作出发,提出了把开模法和矢量有限元方法结合起来解决长腔链问题的思想.作为这项工作的第一步,本文采用矢量有限元方法编写了轴对称高阶模的计算程序,并精确计算了轴对称谐振腔各高模的本征频率,为后续工作奠定了良好的基础.

2 Maxwell 方程的变分公式

矢量有限元方法^{4,5}是近十年来在电磁场计算中应用比较广泛的一种方法,只要选择了合适的基矢,那么所考虑结构的内部和外部边界都能够从数学上自然满足,从而能够很好地解决通常有限元方法中的伪根问题;又因为有限元方法的网格划分比较接近于实际结构,所以我们选择这种方法对谐振腔进行计算,能够得到很高的精度.

对于矢量有限元方法而言,除了边界条件外,磁场和电场的计算过程完全相同,因此本文将只考虑电场情况.真空中电场的 Maxwell 方程为

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k^2 \mathbf{E} \quad (1)$$

它对应于变分方程 $\delta F(\mathbf{E}) = 0$ 的解,其中

$$F(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E})^* - k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] d\Omega \quad (2)$$

在 $r\theta z$ 坐标系中,对于轴对称结构,根据电场的对称性,可以令 $\mathbf{E}(r, \theta, z) = \mathbf{E}(r, z)e^{im\theta}$,则(2)式中的三维问题可以简化为 rz 坐标系中的二维问题:

$$F'(\mathbf{E}(r, z)) = \iint_{\Omega'} \left\{ r(\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_t) \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_t)^* + \frac{1}{r}(m\mathbf{E}_t - \nabla_{\perp} \tilde{E}_{\theta}) \cdot (m\mathbf{E}_t - \nabla_{\perp} \tilde{E}_{\theta})^* - k^2(r\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{E}_t^* + \frac{1}{r}\tilde{E}_{\theta}\tilde{E}_{\theta}^*) \right\} drdz, \quad (3)$$

其中 \mathbf{E}_t 是只含 r, z 变量的横向场, $\tilde{E}_{\theta} = -irE_{\theta}(r, z)$, $\nabla_{\perp} = z \frac{\partial}{\partial z} + r \frac{\partial}{\partial r}$

式(3)中含有 \tilde{E}_{θ} 和 \mathbf{E}_t 两个变量,同时采用标量和矢量基函数将它们展开,对于每个有限单元,令标量基函数为 $\{N^{\theta}\}$,矢量基函数为 $\{N^t\}$,则得到

$$\tilde{E}_{\theta} = \sum_{i=1}^n N_i^{\theta} e_i^{\theta} \quad \{N^{\theta}\}^T \{e^{\theta}\} = \{e^{\theta}\}^T \{N^{\theta}\} \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_t = \sum_{i=1}^n N_i^t \mathbf{e}_i^t = \{N^t\}^T \{e^t\} = \{e^t\}^T \{N^t\} \quad (5)$$

代入 $\delta F'(\mathbf{E}) = 0$,可以得到本征矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A_{\theta\theta} & A_{\theta t} \\ A_{t\theta} & A_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{\theta} \\ e_t \end{Bmatrix} = -k^2 \begin{bmatrix} B_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & B_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{\theta} \\ e_t \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_{\theta\theta}^c &= \iint_{\sigma'} \frac{1}{r} \nabla_{\perp} \{N_{\theta}^c\} \cdot \nabla_{\perp} \{N_{\theta}^c\}^T dr dz, & A_{\theta z}^c &= - \iint_{\sigma'} \frac{m}{r} \nabla_{\perp} \{N_{\theta}^c\} \cdot \{N_z^c\}^T dr dz, \\
 A_{z\theta}^c &= - \iint_{\sigma'} \frac{m}{r} \{N_z^c\} \cdot \nabla_{\perp} \{N_{\theta}^c\}^T dr dz, \\
 A_{zz}^c &= \iint_{\sigma'} \left\{ r (\nabla_{\perp} \times N_z^c) \cdot (\nabla_{\perp} \times N_z^c)^* + \frac{m^2}{r} \{N_z^c\} \cdot \{N_z^c\}^T \right\} dr dz, \\
 B_{zz}^c &= - \iint_{\sigma'} r \{N_z^c\} \cdot \{N_z^c\}^T dr dz, & B_{\theta\theta}^c &= - \iint_{\sigma'} \frac{1}{r} \{N_{\theta}^c\} \cdot \{N_{\theta}^c\}^T dr dz.
 \end{aligned}$$

因此, 只要求出上面的系数矩阵, 通过解广义本征值问题就可以得到 k^2 , 并求出模式的本征频率 ω , 进一步也可以得到结构内任意点的电场值.

3 基函数的选择

矢量有限元基函数通常是建立在所选标量基函数之上的, 我们希望所选择的基函数能够满足: 导体表面边界条件的强加使得与导体面上棱边有关的未知量为零. 通常对于如图 2, 3 所示三角单元, 它的标量基函数 L_1, L_2, L_3 是分别对应于三个顶点的, 那么所选矢量有限元基函数 L_1^i, L_2^i, L_3^i 对应于三角元的三边, 可以证明, $e_i \cdot L_j^i = \delta_{ij}$:

$$\begin{aligned}
 L_1^i &= (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) l_1, \\
 L_2^i &= (L_2 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_2) l_2, \\
 L_3^i &= (L_3 \nabla L_1 - L_1 \nabla L_3) l_3.
 \end{aligned} \tag{7}$$

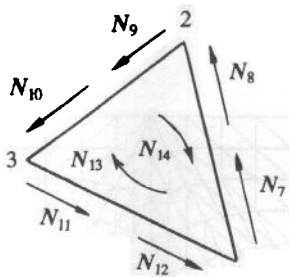


图 2 三角元二阶基矢

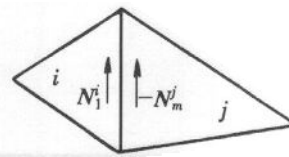


图 3 相邻三角元公共边上基矢方向必须一致

但在计算过程中发现, 采用一阶基函数不能达到精度要求, 因此在实际工作中采用了建立于一阶基函数之上的二阶标量和矢量基函数, 即

$$\begin{aligned}
 N_1^o &= L_1(2L_1 - 1), & N_2^o &= L_2(2L_2 - 1), & N_3^o &= L_3(2L_3 - 1) \\
 N_4^o &= 4L_1L_2, & N_5^o &= 4L_2L_3, & N_6^o &= 4L_3L_1, \\
 N_7^i &= L_1L_1^i, & N_8^i &= L_2L_1^i, & N_9^i &= L_2L_2^i, \\
 N_{10}^i &= L_3L_2^i, & N_{11}^i &= L_3L_3^i, & N_{12}^i &= L_1L_3^i,
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$N'_{13} = -2L_2L'_3, \quad N'_{14} = -2L_3L'_1.$$

值得注意的是,单独存在的每个三角单元各边上的基矢 N_7-N_{12} 都是逆时针方向,但在把各个单元的矩阵元素放入全局矩阵时,相邻三角单元的公共边对应的基矢必须方向一致,因此其中一个单元对应于该边的基矢将指向顺时针方向. 基矢 N'_{13} 和 N'_{14} 是三角单元内部的基函数,不存在两个基矢相邻的问题,引入它们的目的是将计算精度提高到 $O(h^4)^{6}$.

4 计算结果和 Mafia 程序的比较

Superfish¹⁾ 和 Mafia²⁾ 是目前场计算领域中最常用的程序,Superfish 虽然精度足够高

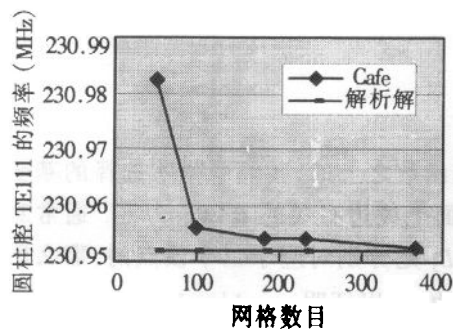


图 4 Cafe 程序的收敛性

(可达 10^{-5}),但无法计算双极子模;Mafia 可以计算双极子模,但精度都不能满足要求(10^{-3} — 10^{-4}),而且随着模式的升高迅速降低. 作者根据上述方法编制了程序 Cafe,它除了能计算轴对称谐振腔和波导的任意高阶模外,还具有相当高的精度和收敛速度(图 4). 通过对半径为 0.5m,长度为 1.0m 的圆柱腔的双极子模的本征频率的计算可以看出(图 5),Cafe 程序的计算效率和计算精度都超过了 Mafia 程序.

作为有限元方法的沿袭,对图 1 中失谐结构的某一个加速腔 ($a = 10.0025\text{mm}$, $b = 40.9\text{mm}$, $D = 35.0088\text{mm}$, $t = 5.0013\text{mm}$) 而言,其网格划分可以比较准确的反映实际的圆弧边界(图 6),表 1 中列出了 Cafe 程序和 Mafia 程序对该结构双极子模的计算结果,证明了 Cafe 程序的正确性.

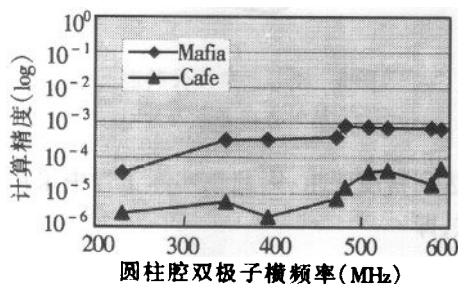


图 5 Cafe 和 Mafia 程序的精度比

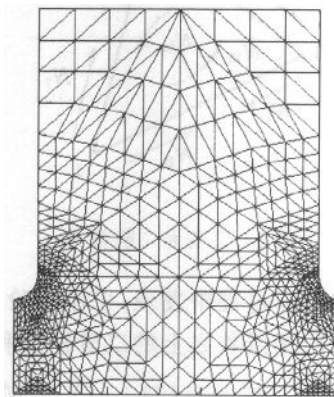


图 6 盘荷波导腔的网格划分

1) Reference Manual for the Poisson/Superfish Group of Codes, 1987

表 1 盘荷波导单腔双极子模的本征频率 (MHz)

模式序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mafia	4432.448	5348.700	6575.975	7899.146	8141.756	9488.240	9924.209	10715.660	11067.740	11558.710
Cafe	4432.175	5344.537	6573.259	7900.406	8147.088	9495.722	9916.079	10719.166	11094.933	11579.351

注意: 表 1 中 Mafia 采用的网格点数是 6500, Cafe 所取网格数是 195.

5 结论

Cafe 程序能精确计算轴对称结构的任意高阶模, 为下一步长腔链失谐结构尾场的分析以及三维加速结构的高阶模计算奠定了良好的基础.

参考文献 (References)

- 1 LI Zheng-Hai, Ko K, Vinay S T et al. Modeling Large Heterogeneous RF Structures. In: National Accelerator Facility ed. Computational Accelerator Physics. Virginia: Williamsburg Press. 1997. 39—44
- 2 ZHAN Xiao-Wei. Transverse Wakefield Analysis For the NLC&JLC Detuned Structures on a Parallel Computer. In: National Accelerator Facility ed. Computational Accelerator Physics. Virginia: Williamsburg Press. 1997. 389—393
- 3 Yanamoto M, KEK Preprint, Sept 1994. 94—95
- 4 JIN Jian-Ming. Finite Element Method for Electromagnetic Fields. Xi'an: Press of Xidian University, 1998. 164—167 (in Chinese)
(金建铭. 电磁场有限元方法. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998. 164—167)
- 5 Zoltan J C. IEEE Transactions on Magnetics. 1991, 27(5)
- 6 Eric M N. SLAC-PUB-5881, Aug. 1992
- 7 Weiland T. Mafia Version 4. In: National Accelerator Facility ed. Computational Accelerator Physics. Virginia: Williamsburg Press. 1997. 65—70

Accurate Computation on High Order Modes of Axial-symmetric Cavity with Vector Finite Element Method *

WEI Shi LIN Yu-Zheng

(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract Eigenfrequencies of high order modes in the axial-symmetric cavities are computed with a vector finite element method. Mathematics models and physics theories are combined in a rational way, which avoids the spurious modes caused by ordinary finite element methods. Using quadratic scalar and vector basis functions, high accuracy of results are available with few meshes. A code named Cafe is presented. It provides a good base for further research of wakefields of the detuned structures in next generation linear collider.

Key words linear collider, vector finite element, high order mode

Received 20 November 2000

* Supported by National Natural Science Foundation of China (19775030)