

# 格点 $Z_3$ 规范场-Higgs场耦合体系的相结构

王家慧

(中国农业大学应用物理系 北京 100094)

**摘要** 用 Migdal-Kadanoff 重整化群方法研究了四维时空中的格点  $Z_3$  规范场与  $Z_3$ -Higgs 标量场耦合体系, 得到了该体系的耦合常数递推关系和相图. 结果表明  $Z_3$  耦合体系的耦合常数递推关系中的项与  $Z_2$ 、 $Z_4$  耦合体系的耦合常数递推关系中的项不存在一一对应关系.

**关键词** 格点规范理论 重整化群方法  $Z_3$  群 Higgs 场

## 1 引言

在格点规范理论中, 一个重要的问题是研究各种体系的相结构. 近几年来, 人们在用各种方法例如 Monte Carlo<sup>[1-3]</sup>、累积展开<sup>[4]</sup>、平均场<sup>[5]</sup>和 Migdal-Kadanoff 重整化群<sup>[6]</sup>等方法对纯物质场、纯规范场体系进行研究的同时, 也对规范场-物质场耦合体系的相结构进行了研究. 物质场包括 Higgs 场、轻子和夸克, 它们对规范场的动力学影响是不可忽略的. 在对规范场-Higgs 场耦合体系的研究中, 对  $Z_2$  规范场-Higgs 场体系<sup>[1,7]</sup>和  $U(1)$  规范场-Higgs 场体系<sup>[3,4]</sup>的研究最为常见.  $Z_2$  群和  $U(1)$  群分别是分立群和连续群中最简单的两个群. 本文用 Migdal-Kadanoff 重整化群方法对  $Z_3$  规范场-Higgs 场耦合体系进行了研究. 在四维时空中推导出耦合常数重整化递推关系, 进而给出了该体系的相图.

Migdal-Kadanoff 变换方法是格点规范理论中研究相变性质的一个有力工具, 它实际上是一种近似的实空间重整化群变换, 该方法表明, 人们可以从一个在  $d$  维时空中具有给定相邻两点间隔的理论出发, 在较大的时空间隔中寻找一个近似的等效理论. 文献 [8] 用 Migdal-Kadanoff 方法讨论了  $Z_N$  ( $N=2-6$ ) 纯规范场体系的相结构. 文献 [7] 对  $Z_2$  规范场-Higgs 场体系的相结构进行了研究. 在预先的工作中讨论了  $Z_4$  规范场-Higgs 场体系的相结构<sup>[9]</sup>. 本工作表明: 1. 用 Migdal-Kadanoff 变换方法得到的  $Z_3$  规范场-Higgs 场体系的相结构与  $Z_2$  和  $Z_4$  体系的相结构具有类似性; 2. 虽然  $Z_2$  和  $Z_4$  规范场-Higgs 场体系的耦合常数递推关系中的项存在一一对应关系, 但  $Z_3$  规范场-Higgs 场体系的耦合常数递推关系中的项与它们不存在一一对应关系.

## 2 模型

$Z_3$  群是一个分立群,  $Z_3 = \{\exp(i/2\pi/3), l = 0, 1, 2\}$ . 本文只局限于研究  $Z_3$  规范场与按基础表示变换的 Higgs 标量场的耦合体系. 在  $d$  维空间中, 每个坐标上定义 Higgs 场:

$$\phi(\mathbf{r}) = 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

每条链上定义规范场:

$$U_\mu(\mathbf{r}) = 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

规范场对应的作用量为  $d$  维空间中所有方块的四边周上链变量有序乘积之和. 如果对 Higgs 场只考虑相邻两点的相互作用, 则  $Z_3$  规范场-Higgs 场耦合体系的作用量为:

$$S[\phi(\mathbf{r}), U_\mu(\mathbf{r})] = \sum_{\mathbf{r}, \mu} \beta[\phi^{-1}(\mathbf{r}) U_\mu(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r} + \mu) + \text{h.c.}] + \sum_{\mathbf{r}, \mu, \nu} K[U_\mu(\mathbf{r}) U_\nu(\mathbf{r} + \mu) U_\mu^{-1}(\mathbf{r} + \nu) U_\nu^{-1}(\mathbf{r}) + \text{h.c.}] \quad (1)$$

一般地, 作用形式可表示为

$$K[U + \text{h.c.}] = K_0 + \frac{1}{2} K(U + \text{h.c.}),$$

$$\beta[\phi + \text{h.c.}] = \beta_0 + \frac{1}{2} \beta(\phi + \text{h.c.}),$$

$K_0$  和  $\beta_0$  是自由能标度因子,  $K$  和  $\beta$  为耦合常数,  $\beta = \beta(a)$ ,  $K = K(a)$ ,  $a$  为  $d$  维时空相邻两点的间距.

在定域规范变换下:

$$\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \phi'(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}),$$

$$U_\mu(\mathbf{r}) \rightarrow U'_\mu(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) U_\mu(\mathbf{r}) V^{-1}(\mathbf{r} + \mu),$$

作用量  $S$  保持不变, 其中

$$V(\mathbf{r}) = 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

与 (1) 式相应的配分函数为

$$Z = \sum_{\{\phi, U\}} e^{\sum_{\mathbf{r}, \mu} \beta[\phi^{-1}(\mathbf{r}) U_\mu(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r} + \mu) + \text{h.c.}] + \sum_{\mathbf{r}, \mu, \nu} K[U_\mu(\mathbf{r}) U_\nu(\mathbf{r} + \mu) U_\mu^{-1}(\mathbf{r} + \nu) U_\nu^{-1}(\mathbf{r}) + \text{h.c.}]} \quad (2)$$

## 3 $\lambda$ 为 2 时的递推关系

实空间重整化群方法的一般思想就是从 (2) 式出发, 在较大的时空间隔中寻找一个近似的等效理论. 简单地讲, 如果在 (2) 式中仅保留那些坐标为  $(n_1\lambda a, n_2\lambda a, \dots, n_d\lambda a; n_1, n_2, \dots, n_d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \lambda$  为大于 1 的正整数) 点上的 Higgs 场变量和相邻两点上

的规范场变量,而对别的场变量进行求和,则(2)式所描述的体系的时空间隔扩大了 $\lambda$ 倍;但当 $d > 1$ 时,求和后的配分函数 $Z$ 中出现了破坏原来相互作用形式的项,如果对他们作近似处理,使它们具有 $Z$ 中原有的相互作用形式,则得到一个近似的配分函数

$$Z' = \sum_{\phi, U} e^{\sum_{r, \mu} \beta(\lambda a) [\phi^{-1}(r) U_{\mu}(r) \phi(r + \mu) + \text{h.c.}] + \sum_{r, \nu} K(\lambda a) [U_{\nu}(r) U_{\nu}(r + \mu) U_{\nu}^{-1}(r + \nu) U_{\nu}^{-1}(r) + \text{h.c.}]} \quad (3)$$

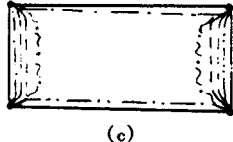
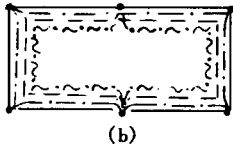
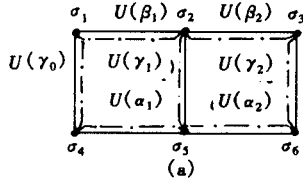


图 1

- · — 对应 $\beta$ ;
- 对应 $\beta$ ;
- ~ ~ ~ 对应 $\bar{\epsilon}$ ;
- · - · - 对应 $\beta_{1,2}$ .

比较(2)式和(3)式可看出,两式相互作用形式一致,但时空间隔扩大了 $\lambda$ 倍. 本文的目的就是找出两个递推关系

$$\beta(\lambda a) = R_{\beta}^{\lambda}[K(a), \beta(a)], \quad K(\lambda a) = R_K^{\lambda}[K(a), \beta(a)], \quad (4)$$

其中 $\lambda$ 表示时空间隔由 $a$ 变到 $\lambda a$ ,  $K(\lambda a)$ 和 $\beta(\lambda a)$ 是重整化后的耦合常数.

先考虑 $\lambda = 2$ , 空间维数 $d = 2$ 的情形. 图 1(a)中,实线表示纯规范场,黑点表示 Higgs 场,点划线表示与 Higgs 场相互作用的规范场. 考虑两邻近元格公共链上的规范场 $U(\gamma_1)$ 求和,

$$I = \sum_{U(\gamma_1)} e^{K[U(\alpha)U(\gamma_1) + \text{h.c.}] + K[U(\beta)U^{-1}(\gamma_1) + \text{h.c.}] + \beta\phi_2^{-1}U(\gamma_1)\phi_5 + \text{h.c.}} \quad (5)$$

其中  $U(\alpha) = U(\beta_1)U^{-1}(\alpha_1)U^{-1}(\gamma_0)$ ,

$$U(\beta) = U(\beta_2)U(\gamma_2)U^{-1}(\alpha_2).$$

引入 $Z_3$ 群的特征标展开:

$$e^{K[U + \text{h.c.}]} = a_0 + a_1(U + \text{h.c.}), \quad (6)$$

$$\text{其中 } a_0 = \frac{1}{3}(e^{K_0 + K} + 2e^{K_0 - \frac{1}{2}K}), \quad a_1 = \frac{1}{3}(e^{K_0 + K} - e^{K_0 - \frac{1}{2}K}),$$

$$e^{\beta[\phi + \text{h.c.}]} = b_0 + b_1(\phi + \text{h.c.}), \quad (7)$$

$$\text{其中 } b_0 = \frac{1}{3}(e^{\beta_0 + \beta} + 2e^{\beta_0 - \frac{1}{2}\beta}), \quad b_1 = \frac{1}{3}(e^{\beta_0 + \beta} - e^{\beta_0 - \frac{1}{2}\beta}),$$

那么(5)式成为

$$\begin{aligned} I = \sum_{U(\gamma_1)} [a_0 + a_1(U(\alpha)U(\gamma_1) + \text{h.c.})][a_0 + a_1(U(\beta)U^{-1}(\gamma_1) + \text{h.c.})] \cdot \\ [b_0 + b_1(\phi_2^{-1}U(\gamma_1)\phi_5 + \text{h.c.})] = \\ 3a_0^2b_0 + 3a_0a_1b_1[(\phi_2^{-1}U(\beta)\phi_5 + \text{h.c.}) + (\phi_2^{-1}U^{-1}(\alpha)\phi_5 + \text{h.c.})] + \\ 3a_1^2b_0(U(\alpha)U(\beta) + \text{h.c.}) + 3a_1^2b_1(\phi_2^{-1}U(\alpha)U^{-1}(\beta)\phi_5 + \text{h.c.}), \end{aligned} \quad (8)$$

设 $I$ 的指数形式为:

$$\begin{aligned} I = e^{\bar{K}_0 + \frac{1}{2}\bar{K}(U(\alpha)U(\beta) + \text{h.c.}) + \bar{\beta}_0 + \frac{1}{2}\bar{\beta}(\phi_2^{-1}U^{-1}(\alpha)\phi_5 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2}\bar{\beta}(\phi_2^{-1}U(\beta)\phi_5 + \text{h.c.})} \cdot \\ e^{\frac{1}{2}\bar{\epsilon}(\phi_2^{-1}U(\alpha)U^{-1}(\beta)\phi_5 + \text{h.c.})} \end{aligned} \quad (9)$$

比较两式右边,得

$$\bar{\beta}(K, \beta) = \frac{2}{9} \ln \frac{(a_0^2b_0 + 4a_0a_1b_1 + 2a_1^2b_0 + 2a_1^2b_1)(a_0^2b_0 + a_0a_1b_1 - a_1^2b_0 - a_1^2b_1)}{(a_0^2b_0 - 2a_0a_1b_1 + 2a_1^2b_0 - a_1^2b_1)(a_0^2b_0 - 2a_0a_1b_1 - a_1^2b_0 + 2a_1^2b_1)}, \quad (10)$$

$$\bar{\xi}(K, \beta) = \frac{2}{9} \ln \frac{(a_0^2 b_0 + 4a_0 a_1 b_1 + 2a_1^2 b_0 + 2a_1^2 b_1)(a_0^2 b_0 - 2a_0 a_1 b_1 - a_1^2 b_0 + 2a_1^2 b_1)^2}{(a_0^2 b_0 - 2a_0 a_1 b_1 + 2a_1^2 b_0 - a_1^2 b_1)(a_0^2 b_0 + a_0 a_1 b_1 - a_1^2 b_0 - a_1^2 b_1)^2}, \quad (11)$$

$$\bar{K}(K, \beta) = \frac{2}{9} \ln \frac{(a_0^2 b_0 + 4a_0 a_1 b_1 + 2a_1^2 b_0 + 2a_1^2 b_1)(a_0^2 b_0 - 2a_0 a_1 b_1 + 2a_1^2 b_0 - a_1^2 b_1)^2}{(a_0^2 b_0 + a_0 a_1 b_1 - a_1^2 b_0 - a_1^2 b_1)^2 (a_0^2 b_0 - 2a_0 a_1 b_1 - a_1^2 b_0 + 2a_1^2 b_1)}. \quad (12)$$

$\bar{K}_0$  和  $\bar{\beta}_0$  与相变无关, 没必要求出.  $I$  中出现了与原有相互作用形式不同的项  $\bar{\beta}(\phi_2^{-1} U^{-1}(\alpha)\phi_5 + \text{h.c.})$ ,  $\bar{\beta}(\phi_2^{-1} U(\beta)\phi_5 + \text{h.c.})$  和  $\bar{\xi}(\phi_2^{-1} U(\alpha) U^{-1}(\beta)\phi_5 + \text{h.c.})$ , 值得一提的是  $\bar{\xi}$  项在  $Z_2^{[7]}$  和  $Z_4^{[9]}$  耦合体系中并不存在. 将这些项飘移到  $\beta(\phi_3^{-1} U(\gamma_2)\phi_6 + \text{h.c.})$  所在位置, 即作变换:

$$\begin{aligned} & \bar{\beta}(\phi_2^{-1} U^{-1}(\alpha)\phi_5 + \text{h.c.}) + \bar{\beta}(\phi_2^{-1} U(\beta)\phi_5 + \text{h.c.}) + \bar{\beta}_1(\phi_2^{-1} U(\alpha) U^{-1}(\beta)\phi_5 + \text{h.c.}) \\ & \rightarrow (2\bar{\beta} + \bar{\xi})(\phi_3^{-1} U(\gamma_2)\phi_6 + \text{h.c.}), \end{aligned}$$

则图 1 (b) 所对应的作用项为:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{\phi_2, \phi_5} e^{\bar{K}_0 + \frac{1}{2} \bar{K}(U(\alpha)U(\beta) + \text{h.c.}) + \bar{\beta}_0 + \frac{1}{2}(\bar{\beta} + 2\bar{\beta} + \bar{\xi})(\phi_1^{-1} U(\gamma_0)\phi_4 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2}(\bar{\beta} + 2\bar{\beta} + \bar{\xi})(\phi_3^{-1} U(\gamma_2)\phi_6 + \text{h.c.})} \\ \cdot \frac{1}{e^2} \beta(\phi_1^{-1} U(\beta_1)\phi_2 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2} \phi_2^{-1} U(\beta_2)\phi_3 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2} \beta(\phi_4^{-1} U(\alpha_1)\phi_5 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2} \beta(\phi_5^{-1} U(\alpha_2)\phi_6 + \text{h.c.}) \end{aligned} \quad (13)$$

这样就完成了对  $U(\gamma_1)$  的求和; 接着对  $x$  方向的 Higgs 场重整化, 即对  $\phi_2$  和  $\phi_5$  求和, 这可按一维情形进行; 这样就完成了  $x$  方向的抽取变换, 得到新的耦合常数,

$$\begin{aligned} \Pi = e^{\bar{K}_0 + \frac{1}{2} K_1(U(\alpha)U(\beta) + \text{h.c.}) + \bar{\beta}_0 + \frac{1}{2} \beta_{1x}(\phi_1^{-1} U(\gamma_0)\phi_4 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2} \beta_{1y}(\phi_3^{-1} U(\gamma_2)\phi_6 + \text{h.c.})} \\ \cdot \frac{1}{e^2} \beta_{1x}(\phi_1^{-1} U(\beta_1)U(\beta_2)\phi_3 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2} \beta_{1x}(\phi_4^{-1} U(\alpha_1)U(\alpha_2)\phi_6 + \text{h.c.}) \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 = \bar{K}[K, \beta], \quad \beta_{1x} = \beta'[\beta], \quad \beta_{1y} = \beta + 2\bar{\beta} + \bar{\xi}, \quad (15) \\ \beta'(\beta) = \frac{2}{3} \ln \frac{b_0^2 + 2b_1^2}{b_0^2 - b_1^2}, \end{aligned}$$

这里和以后下标 1, 2... 表示完成了对  $x, y...$  方向抽取变换后的耦合常数, 下标  $x, y...$  表示相应方向的耦合常数. 图 1 (c) 对应 (15) 式.

采取同样步骤对  $y$  方向进行抽取变换, 得

$$K_2 = \bar{K}[K_1, \beta_{1x}], \quad \beta_{2x} = \beta_{1x} + 2\bar{\beta}[K_1, \beta_{1x}] + \bar{\xi}[K_1, \beta_{1x}], \quad \beta_{2y} = \beta'[\beta_{1y}], \quad (16)$$

推广到四维时空. 注意到递推关系是各向异性的, 选  $xy$  平面和  $x$  方向为代表. 选一个边长为  $2a$  的三维立方体, 将与  $xy$  平面垂直的平面上的规范场相互作用移到相应表面, 采用  $d = 2$  时的步骤, 完成对  $x, y$  方向的抽取变换, 再重复别的方向的抽取变换, 得

$$K_1^{xy} = \bar{K}[K, \beta], \quad \beta_{1x} = \beta'[\beta], \quad \beta_{1y} = \beta + 2\bar{\beta}[K, \beta] + \bar{\xi}[K, \beta], \quad (17)$$

$$K_2^{xy} = \bar{K}[K_1^{xy}, \beta_{1x}], \quad \beta_{2x} = \beta_{1x} + 2\bar{\beta}[K_1^{xy}, \beta_{1x}] + \bar{\beta}_1[K_1^{xy}, \beta_{1x}], \quad (18)$$

$$K_3^{xy} = 2K_2^{xy}, \quad \beta_{3x} = \beta_{2x} + 2\bar{\beta}[2K_1^{xy}, \beta_{2x}] + \bar{\xi}[2K_1^{xy}, \beta_{2x}], \quad (19)$$

$$K_4^{xy} = 2K_3^{xy}, \quad \beta_{4x} = \beta_{3x} + 2\bar{\beta}[4K_1^{xy}, \beta_{3x}] + \bar{\xi}[4K_1^{xy}, \beta_{3x}], \quad (20)$$

这里  $K_4^{xy}$  和  $\beta_{4x}$  正是要求的  $K(2a)$  和  $\beta(2a)$ .

#### 4 $\lambda$ 为任意情形

用 Migdal-Kadanoff 变换方法得到的递推关系是各向异性的, 只有当  $\lambda$  趋于 1 时, 各向异性才能消失. 因此必需考虑  $\lambda$  为任意时的递推关系.

先考虑  $d = 2$  的情形, 选  $xy$  平面和  $x$  方向为代表, 推导递推关系. 将图 2(a) 中  $22'$  至  $(\lambda - 1)(\lambda - 1)'$  共  $(\lambda - 2)$  条链上的 Higgs 耦合移到  $\lambda\lambda'$  处 (见图 2(b)). 对  $22'$  到  $(\lambda - 1)(\lambda - 1)'$  共  $(\lambda - 2)$  条链上的规范场求和, 得图 2(c) 右侧大元格上的规范场耦合常数:

$$K' = \frac{2}{3} \ln \frac{a_0^{\lambda-1} + 2a_1^{\lambda-1}}{a_0^{\lambda-1} - a_1^{\lambda-1}}, \quad (21)$$

这里  $a_0$  和  $a_1$  如 (6) 式所示.

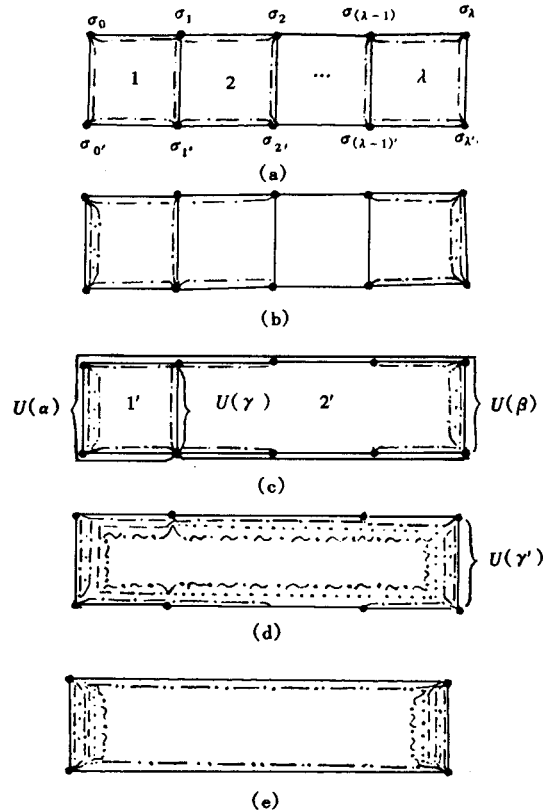


图 2

--- 对应  $\beta$ ; - - - 对应  $\bar{\beta}$ ; ... 对应  $\bar{\beta}$ ; ~ ~ ~ 对应  $\bar{\xi}$ ; - · · - 对应  $\beta_x$ .

以  $U(\gamma)$  表示图 2(c) 公共链上的规范场, 以  $U(\alpha)$  和  $U(\beta)$  分别表示公共链左、右两侧链上规范场顺序乘积, 以下采用类似于  $\lambda = 2$  的方法, 完成下式求和,

$$I = \sum_{U(\gamma)} e^{K[U(\gamma)U(\alpha) + \text{h.c.}] + K'[U(\beta)U^{-1}(\gamma) + \text{h.c.}] + \beta[\phi_1^{-1}U(\gamma)\phi_1 + \text{h.c.}]} =$$

$$3a_0c_0b_0 + 3a_0c_1b_1(\phi_1^{-1}U(\beta)\phi_1 + \text{h.c.}) + 3a_1c_0b_1(\phi_1^{-1}U^{-1}(\alpha)\phi_1 + \text{h.c.}) +$$

$$3a_1c_1b_0(U(\alpha)U(\beta) + \text{h.c.}) + 3a_1c_1b_1(\phi_1^{-1}U(\alpha)U^{-1}(\beta)\phi_1 + \text{h.c.}), \quad (22)$$

这里  $c_0 = \frac{1}{3}(e^{K'_0 + K'} + 2e^{K'_0 - \frac{1}{2}K'})$ ,  $c_1 = \frac{1}{3}(e^{K'_0 + K'} - e^{K'_0 - \frac{1}{2}K'})$ ,  $a_0, a_1, b_0$  和  $b_1$  如 (6) 和 (7) 两式所示.

设  $I$  的指数形式为:

$$I = e^{\bar{k}_0 + \frac{1}{2}\bar{k}(U(\alpha)U(\beta) + \text{h.c.}) + \bar{b}_0 + \frac{1}{2}\bar{\beta}(\phi_1^{-1}U^{-1}(\alpha)\phi_1 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2}\bar{\beta}(\phi_1^{-1}U(\beta)\phi_1 + \text{h.c.}) + \frac{1}{2}\bar{\xi}(\phi_1^{-1}U(\alpha)U^{-1}(\beta)\phi_1 + \text{h.c.})}. \quad (23)$$

比较上两式, 可得

$$\bar{K}(K, \beta) = \frac{2}{9} \ln \frac{M_1 M_4^2}{M_2 M_3 M_5}, \quad (24)$$

$$\bar{\xi}(K, \beta) = \frac{2}{9} \ln \frac{M_1 M_5^2}{M_2 M_3 M_4}, \quad (25)$$

$$\bar{\beta}(K, \beta) = \frac{2}{9} \ln \frac{M_1 M_2^2}{M_3 M_4 M_5}, \quad (26)$$

$$\bar{\beta}(K, \beta) = \frac{2}{9} \ln \frac{M_1 M_3^2}{M_2 M_4 M_5} \quad (27)$$

其中

$$M_1 = 3a_0c_0b_0 + 6a_0c_1b_1 + 6a_1c_0b_1 + 6a_1c_1b_0 + 6a_1c_1b_1,$$

$$M_2 = 3a_0c_0b_0 - 3a_0c_1b_1 + 6a_1c_0b_1 - 3a_1c_1b_0 - 3a_1c_1b_1,$$

$$M_3 = 3a_0c_0b_0 + 6a_0c_1b_1 - 3a_1c_0b_1 - 3a_1c_1b_0 - 3a_1c_1b_1,$$

$$M_4 = 3a_0c_0b_0 - 3a_0c_1b_1 - 3a_1c_0b_1 + 6a_1c_1b_0 - 3a_1c_1b_1,$$

$$M_5 = 3a_0c_0b_0 - 3a_0c_1b_1 - 3a_1c_0b_1 - 3a_1c_1b_0 + 6a_1c_1b_1,$$

$I$  中出现了与原有相互作用形式不同的项  $\bar{\beta}(\phi_1^{-1}U(\alpha)\phi_1 + \text{h.c.})$ 、 $\bar{\beta}(\phi_1^{-1}U(\beta)\phi_1 + \text{h.c.})$  和  $\bar{\xi}(\phi_1^{-1}U(\alpha)U^{-1}(\beta)\phi_1 + \text{h.c.})$ .  $\bar{\xi}$  项是  $Z_3$  耦合体系特有的,  $Z_2$  和  $Z_4$  耦合体系没有相应项. 将它们飘到  $\lambda\lambda'$  位置 (见图 2(d)), 即作变换:

$$\begin{aligned} & \bar{\beta}(\phi_1^{-1}U^{-1}(\alpha)\phi_1 + \text{h.c.}) + \bar{\beta}(\phi_1^{-1}U(\beta)\phi_1 + \text{h.c.}) + \bar{\xi}(\phi_1^{-1}U(\alpha)U^{-1}(\beta)\phi_1 + \text{h.c.}) \\ & \rightarrow (\bar{\beta} + \bar{\beta} + \bar{\xi})(\phi_1^{-1}U(\gamma')\phi_1 + \text{h.c.}), \end{aligned}$$

使它们具有原有相互作用形式; 接着对  $\phi_1$  至  $\phi_{\lambda-1}$  和  $\phi_{\lambda'}$  至  $\phi_{(\lambda-1)'}$  的进行求和, 就完成了对  $x$  方向的抽取变换 (见图 2(e)), 此时

$$K_1^y = \bar{K}[K, \beta],$$

$$\beta_{1x} = \frac{2}{3} \ln \frac{b_0^\lambda + 2b_1^\lambda}{b_0^\lambda - b_1^\lambda},$$

$$\beta_{1y} = (\lambda - 1)\beta + \bar{\beta}[K, \beta] + \bar{\beta}[K, \beta] + \bar{\xi}[K, \beta].$$

对  $y$  方向抽取变换后, 得

$$K_2^y = \bar{K}[K_1^y, \beta_{1x}],$$

$$\beta_{2x} = (\lambda - 1)\beta_{1x} + \bar{\beta}[K_1^{xy}, \beta_{1x}] + \bar{\beta}[K_1^{xy}, \beta_{1x}] + \bar{\xi}[K_1^{xy}, \beta_{1x}].$$

推广到四维时空. 选一个边长为  $\lambda a$  的四维立方体, 将与  $xy$  平面垂直的平面上的规范场相互作用移到相应表面, 采用  $d = 2$  时的步骤, 完成对  $x, y$  方向的抽取变换, 再重复别的方向的抽取变换, 得

$$K_1^{xy} = \bar{K}[K, \beta], \beta_{1x} = \frac{2}{3} \ln \frac{b_0^{\lambda} + 2b_1^{\lambda}}{b_0^{\lambda} - b_1^{\lambda}}, \quad (28)$$

$$K_2^{xy} = \bar{K}[K_1^{xy}, \beta_{1x}], \beta_{2x} = (\lambda - 1)\beta_{1x} + \bar{\beta}[K_1^{xy}, \beta_{1x}] + \bar{\beta}[K_1^{xy}, \beta_{1x}] + \bar{\xi}[K_1^{xy}, \beta_{1x}], \quad (29)$$

$$K_3^{xy} = \lambda K_2^{xy}, \beta_{3x} = (\lambda - 1)\beta_{2x} + \bar{\beta}[\lambda K_1^{xy}, \beta_{2x}] + \bar{\beta}[\lambda K_1^{xy}, \beta_{2x}] + \bar{\xi}[\lambda K_1^{xy}, \beta_{2x}], \quad (30)$$

$$K_4^{xy} = \lambda K_3^{xy}, \beta_{4x} = (\lambda - 1)\beta_{3x} + \bar{\beta}[\lambda^2 K_1^{xy}, \beta_{3x}] + \bar{\beta}[\lambda^2 K_1^{xy}, \beta_{3x}] + \bar{\xi}[\lambda^2 K_1^{xy}, \beta_{3x}], \quad (31)$$

这里  $K_4^{xy}$  和  $\beta_{4x}$  正是要求的  $K(\lambda a)$  和  $\beta(\lambda a)$ . 不难验证:  $\lambda = 2$  时, (28—31) 与 (17—20) 式相同.

## 5 相图和讨论

由固定点的定义

$$K(\lambda a) = K(a), \beta(\lambda a) = \beta(a), \quad (32)$$

在 (31) 式中取  $\lambda = 1.01$ , 可得 5 个固定点

$$A: (K_c, 0) = (0.677, 0), \quad B: (\infty, \beta_c) = (\infty, 0.093),$$

$$C: (0, 0), \quad D: (\infty, 0), \quad E: (0.707, 0.228),$$

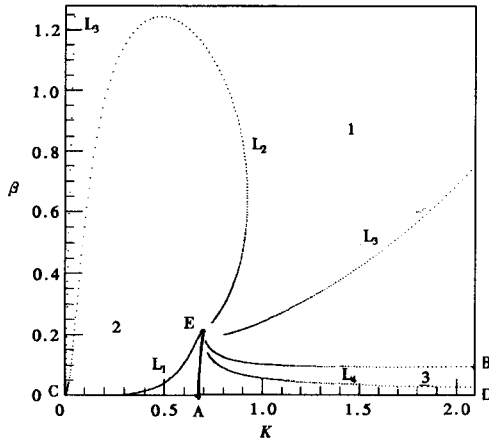


图 3

1 Higgs相; 2 禁闭相; 3 自由电荷相.

用 Migdal-Kadanoff 变换方法得到的  $Z_3$  规范场-Higgs 场体系的相结构与用该方法得到的  $Z_2$  和  $Z_4$  规范场-Higgs 场体系的相结构具有相似性; 但  $Z_3$  规范场-Higgs 体系的耦合常数递推关系 (28—31) 中的  $\bar{\xi}$  项在  $Z_2$  和  $Z_4$  规范场-Higgs 场体系的耦合常数递推关系中没有对应项.

这里  $K_c$  和  $\beta_c$  分别是纯规范场和纯 Higgs 场的相变点.

图 3 是根据 (31) 式作出的重整化轨迹和相变结构, 图中的轨迹线上的点分别代表逐次迭代的结果, 它们反映了重整化流的速率. 一般认为该系统应存在三个相——禁闭相、Higgs 相和自由电荷相, 但这里禁闭相和 Higgs 相是连通的. 相结构是这样划分的, 在 Higgs-禁闭相, 所有流线流向 C 点, 如  $L_1$ 、 $L_2$  和  $L_3$ , 在自由电荷相, 所有流线流向 D 点, 如  $L_4$ , EA 和 EB 是两相分界线. 但用 Migdal-Kadanoff 变换方法不能计算 EA 和 EB 是几级相变, 也不能估计固定点的误差范围.

## 参 考 文 献

- 1 Creutz M. Phys. Rev., 1980, **D21**:1006
- 2 Saumen Datta, Rajiv V Gavai. Phys. Lett., 1997, **B392**:172
- 3 Cruz A et al. Phys. Lett., 1998, **B416**:163
- 4 Wang Jie et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, **12**:329  
(王杰等. 高能物理与核物理, 1998, **12**: 329)
- 5 Brezin E, Drouffe J M. Nucl. Phys., 1982, **B200**:93
- 6 Migdal A A. JETP (sov. Phys.), 1976, **42**:413; 743; Kadanoff L P. Ann. Of Phys., 1976, **100**:359;  
Martinelli G, Parisi G. Nucl. Phys., 1981, **B180**:201; Chung-I Tan, Zai-Xin Xu. Phys. Rev., 1984, **D30**:455
- 7 Bian Jianguo. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1989, **13**:29  
(卞建国. 高能物理与核物理, 1989, **13**: 29)
- 8 Xu Zaixin. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1988, **12**:169  
(徐在新. 高能物理与核物理, 1988, **12**: 169)
- 9 Wang Jiahui. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1995, **19**:519  
(王家慧. 高能物理与核物理, 1995, **19**: 519)

## Phase Structure of $Z_3$ Lattice Gauge Theory Coupled With the Higgs Field

Wang Jiahui

(Department of Applied Physics, China Agricultural University, Beijing 100094)

**Abstract** In the scheme of Migdal-Kadanoff renormalization group transformation, the phase structure of  $Z_3$  lattice gauge theory coupled with the Higgs field in four dimension space is studied. The phase diagram shows that among the three of the Higgs region, confined region and free charge region, the first two regions are smoothly connected with each other.

**Key words** lattice gauge theory, Migdal-Kadanoff renormalization group transformation,  $Z_3$  group, Higgs field.