

用改进的格点哈密顿量计算 2 + 1 维 $U(1)$ 规范场真空波函数*

江 俊 勤

(广东教育学院物理系 广州 510303)

罗向前 郭硕鸿 刘金明

(中山大学物理系 广州 510275)

摘要 从格点 $U(1)$ 规范场论中改进的哈密顿量出发, 推导出截断本征方程. 并对 2 + 1 维 $U(1)$ 规范场真空波函数进行数值计算, 验证了理论的预言: 对格点哈密顿量进行改进能使真空波函数的标度行为明显地改善.

关键词 格点规范 改进哈密顿量 真空波函数

1 引言

哈密顿量形式的格点规范理论的优点在于既能计算质量谱又能计算波函数^[1]. 由于获得好的真空波函数的重要性, 人们对规范场的真空波函数进行了不少研究^[2-6]. 对于格点 $U(1)$ 规范场论的哈密顿量可写成:

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_{x,i} E_i(x) E_i(x) - \frac{1}{2ag^2} \sum_p (U_p + U_p^+). \quad (1)$$

式中, a 为格距, g 为无量纲的裸耦合常数, 与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$, $E_i(x)$ 为规范场的色电场强, U_p 代表最小方块的 Wilson 圈图.

由于原始的 Kogut-Susskind 哈密顿量 (即 (1) 式) 中只含最小方块的 Wilson 圈, 因而 (1) 式与连续理论哈密顿量之间的有限格距误差较大, 这正是在过去一段时间内, 格点计算进展较慢的原因. 对格点哈密顿量进行改进的目的在于减小它与连续理论哈密顿量之间的有限格距误差, 从而减小格点计算量.

最近, 我们对格点哈密顿量进行了改进^[7,8], 并在 1 + 1 维情况下对费米子真空凝聚和介子质量谱进行了数值计算, 取得了好的结果^[9-11]. 本文在此基础上, 从改进的格点

1998-09-28 收稿

* 国家自然科学基金资助项目

$U(1)$ 规范场论哈密顿量出发,推导出相应的截断本征方程,并对2+1维 $U(1)$ 规范场真空波函数中参数 μ_0 和 μ_2 进行数值计算,所得结果的标度行为(与使用未改进哈密顿量的结果比较)明显地改善了.

2 哈密顿量及截断本征方程的改进

文献[8]已对哈密顿量的改进做出了全面的讨论.对于 $U(1)$ 规范场论而言,改进的哈密顿量为

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_{x,i} \left\{ \frac{1+C'^2}{(1-C')^2} E_i(x) E_i(x) - \frac{2C'}{(1-C')^2} U_i^+(x) E_i(x) U_i(x) E_i(x+i) \right\} - \frac{1}{g^2 a} \sum_{x,i < j} \left\{ C'_1 \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2} + C'_2 (R_{ij} + R_{ji}) \right\}. \quad (2)$$

式中,

$$P_{ij} = (U_p + U_p^+)/2, \quad P_{ji} = P_{ij}. \quad (3)$$

$$\sum_{x,i < j} R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \quad \rightarrow \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right), \quad \sum_{x,i < j} R_{ji} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \quad \leftarrow \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right). \quad (4)$$

$$C'_1 = \frac{5}{3}, \quad C'_2 = -\frac{1}{12}. \quad (5)$$

C' 满足^[8]:

$$C'^3 + 11C'^2 + 11C' + 1 = 0. \quad (6)$$

(6) 式有3个实根 $-1, -5 \pm 2\sqrt{6}$, 为了使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C'^n$ 收敛, 取

$$C' = -5 + 2\sqrt{6}. \quad (7)$$

记 $B'_1 = \frac{1+C'^2}{(1-C')^2}$, $B'_2 = -\frac{2C'}{(1-C')^2}$ 则

$$B'_1 = \frac{5}{6}, \quad B'_2 = \frac{1}{6}. \quad (8)$$

当取 $C'_1 = 1, C'_2 = 0, C' = 0$ 时, (2)式回到(1)式.

取真空波函数^[5,6]

$$|\Omega\rangle = e^R |0\rangle. \quad (9)$$

$|0\rangle$ 为裸真空, 定义为 $E_i(x)|0\rangle = 0$, R 由 Wilson 圈组成, 可按圈图的阶展开

$$R = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (10)$$

把(2)式代入本征方程 $H|\Omega\rangle = E_n|\Omega\rangle$, 并利用公式

$$e^{-R} H e^R = H - [R, H] + \frac{1}{2!} [R, [R, H]] - \frac{1}{3!} [R, [R, [R, H]]] + \dots \quad (11)$$

及对易关系

$$\begin{aligned} [E_i(y), U_j(x)] &= U_j(x) \delta_{xy} \delta_{ij}, \\ [E_i(y), U_j^+(x)] &= -U_j^+(x) \delta_{xy} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (12)$$

求得 N 阶截断本征方程为

$$\begin{aligned} & B_1 \left\{ \sum_{x, i} [E_i(x), [E_i(x), R]] + \sum_{n_1 + n_2 \leq N} [E_i(x), R_{n_1}] [E_i(x), R_{n_2}] \right\} + \\ & B_2 \left\{ \sum_{x, i} [E_i(x), [E_i(x+i), R]] + \sum_{n_1 + n_2 \leq N} [E_i(x+i), R_{n_1}] [E_i(x), R_{n_2}] \right\} - \\ & C_1 \frac{1}{g^4} \sum_{x, i < j} (P_{ij} + P_{ji}) - C_2 \frac{2}{g^4} \sum_{x, i < j} (R_{ij} + R_{ji}) = \frac{2a}{g^2} E_\Omega. \end{aligned} \quad (13)$$

(13) 式对于 2 + 1 维和 3 + 1 维 $U(1)$ 规范场适用.

3 数值计算

本文以 2 + 1 维 $U(1)$ 规范场为例. 取一阶图为:

$$R_1 = C_1 \sum_p (U_p + U_p^+) = C_1 (\text{□} + \text{h.c.}). \quad (14-A)$$

由 $[E_i(x), R_1][E_i(x), R_1]$ 和 $[E_i(x+i), R_1][E_i(x), R_1]$ 可产生二阶 Wilson 圈:

$$R_2 = C_2 \text{□} + C_3 \text{□} + C_4 \text{□} + C_5 \text{□} + C_6 \text{□} + \text{h.c.} \quad (14-B)$$

再由 $[E_i(x), R_1][E_i(x), R_2]$ 和 $[E_i(x+i), R_1][E_i(x), R_2]$ 可产生三阶 Wilson 圈图, …….

把 (14) 式和 (10) 式代入 (13) 式, 得到 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ 的非线性方程组, 解方程组得 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$.

在连续极限下 ($a \rightarrow 0$) 长波行为真空波函数为^[6]:

$$|\Omega\rangle = \exp \left\{ -\mu_0 \iint F_{12}^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 - \mu_2 \iint F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right\}. \quad (15)$$

式中, $F_{12}(x_0, y_0)$ 为场强张量 (1, 2 表示空间的两个方向), D_1, D_2 为协变导数.

文献 [6] 给出了 (15) 式中 μ_0, μ_2 的表达式:

$$\mu_0 = g^2 a \sum_n C_n A_n, \quad A_n = (N_1 - N_2)^2. \quad (16)$$

$$\mu_2 = g^2 a^3 \sum_n C_n B_n,$$

$$B_n = \frac{1}{12} (N_1 - N_2)^2 - \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \left[\sum_{l=1}^{N_1} (x_l^2 + y_l^2) - \sum_{m=1}^{N_2} (\tilde{x}_m^2 + \tilde{y}_m^2) \right]. \quad (17)$$

式中, $N_1(N_2)$ 为圈图所含 $U_p(U_p^+)$ 的数目, (x_l, y_l) 为第 l 个 U_p 的中心相对坐标, $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)$ 为第 m 个 U_p^+ 的中心相对坐标.

根据重整化群的预言, μ_0 和 μ_2 与 β ($\equiv 1/g^2$) 的关系为指数关系, 为了讨论标度行为, 定义^[6]:

$$\mu'_0 = 2 \ln \left(\frac{\mu_0}{ga} \right), \quad \mu'_2 = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{\mu_2}{g^3 a^3} \right). \quad (18)$$

利用胶球质量 Ma 的标度行为

$$M^2 a^2 \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{k_1}{g^2} \exp \left(-\frac{k_2}{g^2} \right). \quad (19)$$

得 μ'_0, μ'_2 的标度行为

$$\begin{aligned} \mu'_0 &\xrightarrow{a \rightarrow 0} 2 \ln(\mu_0 M k_1^{-\frac{1}{2}}) + k_2 \beta, \\ \mu'_2 &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{2}{3} \ln(\mu_2 M^3 k_1^{-\frac{3}{2}}) + k_2 \beta. \end{aligned} \quad (20)$$

即在标度区间内, μ'_0 和 μ'_2 的标度行为将是斜率为 k_2 的直线^[5]. 关于 (19) 式或 (20) 式中 k_1 和 k_2 的值, 人们已从其它多种方法获得 (见文献 [5] 之讨论), 各种方法求得的 k_2 值基本相同: $k_2 = 5.0$ (称为期望值).

把 C_1, C_2, \dots 的值代入 (16)、(17) 式求得 μ_0, μ_2 , 再代入 (18) 式求得 μ'_0 和 μ'_2 与 $1/g^2$ 的关系.

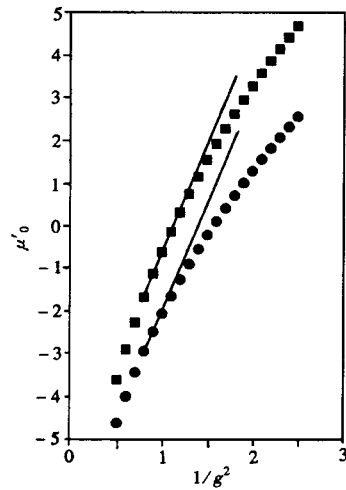
4 结果和讨论

取 $N = 2$ (即本文仅计算到 2 阶截断), 得图 1 和图 2 所示结果.

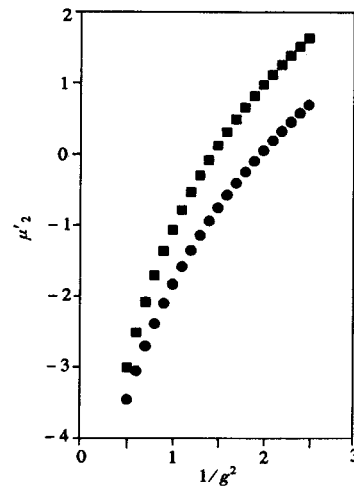
从图 1 可见, 使用改进的哈密顿量 (2) 式时, μ'_0 的标度行为明显地改善了: 象文献 [5] 一样取标度区间为 $[0.8, 1.6]$, 则使用 (2) 式时 μ'_0 的直线回归斜率为 $k_2 = 4.5$, 而使用 (1) 式时 $k_2 = 3.8$.

从图 2 可见, 尽管使用 (2) 式求得的 μ'_2 的标度行为不如 μ'_0 的好 (要求计算更高阶圈图), 但与使用 (1) 式的结果相比有很明显的改善.

为了达到期望的标度行为 (即斜率为 $k_2 = 5.0$ 的直线关系) 必须计算更高阶圈图, 文献 [5] 使用未改进的哈密顿量计算到 5 阶截断 (共 356 种圈图) 时, μ'_0 和 μ'_2 的标度行为仍不好; 计算到 6 阶截断 (圈图个数急增到 2456 种, 非线性方程组未知量也为 2456 个, 计算量极

图1 μ'_0 与 $1/g^2$ 的关系

■ 使用改进哈密顿量的结果,
● 使用未改进哈密顿量的结果,
— 期望的标度行为.

图2 μ'_2 与 $1/g^2$ 的关系

■ 使用改进哈密顿量的结果,
● 使用未改进哈密顿量的结果.

大)时, μ'_0 才有好的标度行为, 而 μ'_2 的标度行为仍不太好. 本文使用改进的哈密顿量计算到 2 阶截断时, μ'_0 到 μ'_2 (尤其是 μ'_0) 就显示出较好的标度行为, 这一结果初步显示了改进哈密顿量的优越性.

进一步的工作是研究高阶截断计算时 μ'_0 和 μ'_2 的收敛性以及对于哈密顿量做 Tadpole 改进后对 μ'_0 和 μ'_2 的影响.

参 考 文 献

- 1 Luo Xiangqian et al. Mod. Phys. Lett., 1996, **A11**:2435; Nucl. Phys., 1997, **B(Proc. Suppl.)**53:243
- 2 Chen Qizhou et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1994, **18(5)**:418; 1995, **19(5)**:398 (陈启洲等. 高能物理与核物理, 1994, **18(5)**: 418; 1995, **19(5)**: 398)
- 3 Liu Jinming, Luo Xiang, Fang Xiyan et al. Nucl. Phys., 1998, **B(Proc. Suppl.)**63A-C:257; Guo Shuohong et al. Phys. Rev., 1994, **D49**:507; Arisue H. Phys. Lett., 1992, **B280**:85; Greensite J. Nucl. Phys., 1980, **B166**:113
- 4 Chen Qizhou et al. Commun. Theor. Phys., 1997, **27**:337
- 5 Fang Xiyan, Liu Jinming, Guo Shuohong. Phys. Rev., 1996, **D53**:1532
- 6 Jiang Junqin, Luo Xiangqian. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, **23(8)**:774 (江俊勤, 罗向前. 高能物理与核物理, 1999, **23(8)**: 774)
- 7 Luo Xiangqian et al. Phys. Rev., 1994, **D50**:501
- 8 Luo Xiangqian, Guo Shuohong et al. Phys. Rev., 1999, **D59**:034503
- 9 Jiang Junqin. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, **22(10)**:891 (江俊勤. 高能物理与核物理, 1998, **22(10)**: 891)
- 10 Jiang Junqin. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, **23(4)**:347 (江俊勤. 高能物理与核物理, 1999, **23(4)**: 347)
- 11 Jiang Junqin, Luo Xiangqian. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, **23(7)**:644 (江俊勤, 罗向前. 高能物理与核物理, 1999, **23(7)**: 644)

**Calculation of the Vacuum Wave Function in 2 + 1
Dimensional $U(1)$ Gauge Theory by Using the
Improved Lattice Hamiltonian ***

Jiang Junqin

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303)

Luo Xiangqian Guo Shuohong Liu Jinming

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract The truncated eigenvalue equation is derived from the improved $U(1)$ lattice gauge field Hamiltonian. The vacuum wave function in 2 + 1 dimensional $U(1)$ model is computed. The numerical results conform our expectation that the scaling behavior of the vacuum wave function can be greatly improved by improving the lattice Hamiltonian.

Key words lattice gauge, improved Hamiltonian, vacuum wave function

Received 28 September 1998

* Project Supported by National Natural Science Foundation of China