

关于 Berry 几何位相理论的推广*

张忠灿 方祯云 胡陈果 孙世军

(重庆大学理学院物理系 重庆 400044)

摘要 对于可参数化时间 t 的周期 Hamiltonian 系统, 由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的“严格”演变以获得 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的问题. 结果表明, 存在“四种类型”的演变态, 它们都可以满足在参数 \vec{R} 空间中的同一条闭合曲线 C 上作这样的“严格演变”, 并且还都可以获得同一个 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$; 而 Berry 发现这一几何相 $\gamma_n(C)$ 时所考虑和采用的“演变态”, 恰好属于本文“四种类型”的“严格”演变态之一的 adiabatic approximation 情形. 据此, 可以把 Berry 几何位相理论推广到本文所研究的“四种类型”的“严格”演变中.

关键词 几何相 几何相因子 循环演变周期 能级变化跃迁

1 引言

自 Berry 从理论上预言几何相因子 $\exp\{i\gamma_n(C)\}$ 的存在^[1]以来, D.Suter 等人用核磁共振实验^[2], R.Tycko 等人用核四极共振实验^[3], T.Bitter 等人 and D.J.Richardson 等人都采用中子在旋转磁场中的进动实验^[4,5], 从不同的角度作了验证. 此外, 在光学^[6]、原子分子物理学^[7]、固体物理学^[8]、规范场理论^[9]以及在物理学科的其他许多领域中^[10], 几何位相的存在及其相关的物理问题已经是国内外许多实验物理学工作者和理论物理学工作者感兴趣的研究问题^[11]. 直至今日, 关于几何位相问题仍然是国内外许多学者所关注或研究的现代物理前沿科学的热点课题.

回顾 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 从理论上的最初导出, 是来自 Berry 从 adiabatic approximation 考虑而采用由同一能级 $E_n(\mathbf{R}(t))$ 所表征的“演变态”: $|\Psi(t)\rangle =$

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))\right\} \cdot \exp(i\gamma_n(t)) \cdot |n(\mathbf{R}(t))\rangle$$
 中获得的^[1]. 然而, “演变态” $|\Psi(t)\rangle$ 由

于是“近似意义下”的演变态, 它除了可以被用来(以“十分简捷”的推导方式)导出 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 之外, 是不可以用于由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的“严格”演变, 以便从理

1998-04-28收稿, 1999-03-04收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目19575074和19835040

论上“严格”实现 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的。

从 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的“严格”演变后,可以从理论上“严格”获得 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ ^[12]。按照这样的观点,可将能够“严格”获得 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的“严格”演变态按初、末条件归成“四种类型”;而 Berry 最初用来推导出 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的“演变态” $|\Psi(t)\rangle$,恰好属于其中第一种类型的“严格”演变态的 adiabatic approximation[参见本文第 2 节]。因而,从“严格”实现 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的高度上来考虑,Berry 几何位相理论完全可以推广到本文所研究的“四种类型”的 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的“严格”演变中。

2 Berry 几何位相理论的推广

2.1 “严格的”演变态作 adiabatic limit 演变以实现 Berry 几何相

能够由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的演变获得 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的含时 Hamiltonian 系统 $\hat{H}(\mathbf{R}(t)); [\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)]$ 里,在随时间 t 的演变过程中,必须出现“态矢(能级)变化跃迁”;因而,归一化的演变态的“严格”表述形式应为^[13]

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_m C_m(t) |m(\mathbf{R}(t))\rangle; [\hat{H}(\mathbf{R}(t)) |m(\mathbf{R}(t))\rangle = E_m(\mathbf{R}(t)) |m(\mathbf{R}(t))\rangle], \quad (1a)$$

其中,

$$\langle m'(\mathbf{R}(t)) |m(\mathbf{R}(t))\rangle = \delta_{m'm}, \sum_m |C_m(t)|^2 = 1. \quad (1b)$$

由演变态 $|\Psi(t)\rangle$ 满足 Schrödinger 方程,应得出

$$\begin{aligned} \frac{\dot{C}_n(t)}{C_n(t)} = & - \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| n(\mathbf{R}(t)) \right\rangle - \frac{i}{\hbar} E_n(\mathbf{R}(t)) - \\ & \sum_{m(\neq n)} \frac{C_m(t)}{C_n(t)} \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| m(\mathbf{R}(t)) \right\rangle. \end{aligned}$$

两边作对时间段 $0 \rightarrow t$ 的积分后,取指数得到

$$\begin{aligned} \frac{C_n(t)}{C_n(0)} = & \exp \left\{ - \frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt' \right\} \exp \left(\left\{ - \int_0^t \left\langle n(\mathbf{R}(t')) \left| \frac{d}{dt'} \right| n(\mathbf{R}(t')) \right\rangle dt' \right\} - \right. \\ & \left. \sum_{m(\neq n)} \int_0^t \frac{C_m(t')}{C_n(t')} \left\langle n(\mathbf{R}(t')) \left| \frac{d}{dt'} \right| m(\mathbf{R}(t')) \right\rangle dt' \right). \quad (2) \end{aligned}$$

当演变态 $|\Psi(t)\rangle$ 经 $0 \rightarrow T$ 演变后,由(2)式将得到

$$C_n(T) = [C_n(0) \exp\{\Gamma_n^R(T)\}] \exp \left\{ - \frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(\mathbf{R}(t)) dt \right\} \exp\{i[\gamma_n(C) + \Gamma_n^I(T)]\}, \quad (3a)$$

$$\text{其中, } \gamma_n(C) = i \int_0^T \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| n(\mathbf{R}(t)) \right\rangle dt = i \oint_C \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R}, \quad (3b)$$

为 Berry 几何相^[1], 而 $\Gamma_n^R(T)$ 和 $\Gamma_n^I(T)$ 分别为对复数值

$$\Gamma_n(T) = - \sum_{m(\neq n)} \int_0^T \frac{C_m(t)}{C_n(t)} \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| m(\mathbf{R}(t)) \right\rangle dt, \quad (3c)$$

所取的“实部”和“虚部”:

$$\Gamma_n^R(T) = \text{Re}\{\Gamma_n(T)\}, \quad \Gamma_n^I(T) = \text{Im}\{\Gamma_n(T)\}. \quad (3d)$$

实指数值 $\exp\{2\Gamma_n^R(T)\}$ 将表征经 $0 \rightarrow T$ 演变后, 处于能量本征态 $|n(\mathbf{R}(0))\rangle = |n(\mathbf{R}(T))\rangle$ 上的两几率之比:

$$\exp\{2\Gamma_n^R(T)\} = |C_n(T)|^2 / |C_n(0)|^2. \quad (4)$$

而实数值(相角) $\Gamma_n^I(T)$ 则表征经 $0 \rightarrow T$ 演变后, 产生于能量本征态 $|n(\mathbf{R}(0))\rangle = |n(\mathbf{R}(T))\rangle$ 上的非动力学部分的总相角 $[\gamma_n(C) + \Gamma_n^I(T)]$ 对其中的 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的偏差.

利用 (3c), 可得到复数值 $\Gamma_n(T)$ 的“模”满足如下“不等式关系”:

$$|\Gamma_n(T)| \leq \sum_{m(\neq n)} \int_0^T \frac{|C_m(t)|}{|C_n(t)|} \left| \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| m(\mathbf{R}(t)) \right\rangle \right| |dt| \leq \sum_{m(\neq n)} M_{mn}(T) \int_0^T \left| \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| m(\mathbf{R}(t)) \right\rangle \right| dt; \quad (|dt| = dt), \quad (5a)$$

其中, $M_{mn}(T)$ 为演变态 $|\Psi(t)\rangle$ 在循环演变一周 $0 \leq t \leq T$ 的时间里, $\left[\frac{|C_m(t)|}{|C_n(t)|} \right]_{0 \leq t \leq T}$ 的上

确界:

$$\left| \frac{C_m(t)}{C_n(t)} \right| \leq M_{mn}(T); \quad (0 \leq t \leq T, m \neq n). \quad (5b)$$

因而, $M_{mn}(T)$ 仅依赖于 $m, n (m \neq n)$ 和 T .

注意到 (5a) 中的积分可表成参数 \mathbf{R} 空间里的“回路积分”:

$$\int_0^T \left| \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| m(\mathbf{R}(t)) \right\rangle \right| dt = \int_0^T \left| \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \nabla_{\mathbf{R}} \right| m(\mathbf{R}(t)) \right\rangle \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right| dt = \oint_C \left| \left\langle n(\mathbf{R}) \left| \nabla_{\mathbf{R}} \right| m(\mathbf{R}) \right\rangle \cdot d\mathbf{R} \right|; \quad (m \neq n). \quad (6)$$

因而, 积分值 (6) 仅依赖于 $m, n (m \neq n)$ 和参数 \mathbf{R} 空间里的闭合曲线 C , 而不依赖于描绘曲线 C 的时间参变量 t . 这表明, 当“缓慢演变 $\rightarrow 0$ 即 $T \rightarrow +\infty$ ”时, 由 (6) 所表示的积分值“不变”; 因而,

$$\int_0^T \left| \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| m(\mathbf{R}(t)) \right\rangle \right| dt = K_{mn}(C); \quad (7)$$

其中, $K_{mn}(C)$ 为与 T 无关的并由 m, n 和 C 所确定的常数; 且 $m \neq n$.

下面研究沿参数 R 空间里的同一条闭合曲线 $C \Rightarrow R(t) = \{R_1(t), R_2(t), \dots\}; (0 \leq t \leq T)$ 作“缓慢演变 ~ 0 ”即 $T \gg 1$ 的“所有”Hamiltonian 系统:

$$\{\hat{H}(R(t'))|_{t'=g(t)}; [g(t) \text{ 为任何一个单调递增实函数, 且 } g(0) = 0]\}. \quad (8)$$

显然, 当 $g(t) = t$ 时, $\hat{H}(R(t')) = \hat{H}(R(t))$.

两个 Hamiltonian 系统 $\hat{H}(R(t'))$ 和 $\hat{H}(R(t))$ 随时间演变的快慢比较, 可利用图 1. 给予说明.

由图 1 可以清楚地看出, 当 $T' > T$ 时, Hamiltonian 系统 $\hat{H}(R(t'))$ 随时间 t' 的演变较 Hamiltonian 系统 $\hat{H}(R(t))$ 随时间 t 的演变“缓慢”. 这是因为, 在参数 R 空间中, 由 $R = R(g(t'))|_{0 \leq t' \leq T'}$ 与 $R = R(t)|_{0 \leq t \leq T}$ 显然“描绘”出的都是同一条闭合曲线 C ; 但“走完”该闭合曲线 C , 前者“所用的时间 T' ”较后者“所用的时间 T ”长. 若将“某”演变周期 T' 考虑为不变, 而将 T' “考虑为‘任意周期变量’—— $T < T' < +\infty$ ”, 则当 $T' \rightarrow +\infty$ 时, 将得到沿参数 R 空间里的同一条闭合曲线 C 上作“缓慢演变 $\rightarrow 0$ ”即无限缓慢演变 (adiabatic-limit) 的 Hamiltonian 系统 $\hat{H}(R(t'))|_{0 \leq t' \leq T' \text{ 且 } T' \rightarrow +\infty}$. 若采用原时间变量 t 来表征, 则为 Hamiltonian $\hat{H}(R(g^{-1}(t))|_{0 \leq t \leq T \text{ 且 } T' = g(T) \rightarrow +\infty}$.

特例: 取 $t' = g(t) = \varepsilon^{-1}t$; ($\varepsilon > 0$ 为实常数) 时, $t' = g(t)$ 在 $t'-O-t$ 平面里为一直线. 若 $0 < \varepsilon < 1$. 则 $T' > T$; 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 则 $T' \rightarrow +\infty$ 即实现“缓慢演变 $\rightarrow 0$ ”即无限缓慢演变. 而这样的 Hamiltonian 系统 (采用原时间 t 来表征) 为 $\hat{H}(R(\varepsilon t))|_{0 \leq t \leq T', T' = (T/\varepsilon) \rightarrow +\infty}$ [注: 在以下讨论无限缓慢演变时, 将上述分析讨论中所引入的周期变量 $T' \rightarrow +\infty$, 改表成 $T \rightarrow +\infty$].

关于在参数 R 空间里的同一条闭合曲线 C 上作演变的“所有”Hamiltonian 系统 $\{\hat{H}(R(t'))\}$ 的详细说明解释, 可参见附录 I.

由“不等式关系”(5a), 并利用(7); 则可以得出:

$$\text{若 } M_{mn}(T) \text{ 满足 } \lim_{\substack{\text{缓慢演变} \rightarrow 0 \\ \text{即 } T \rightarrow +\infty}} M_{mn}(T) = 0; \quad (m \neq n), \quad (9)$$

$$\text{则必有 } \lim_{\substack{\text{缓慢演变} \rightarrow 0 \\ \text{即 } T \rightarrow +\infty}} \Gamma_n^r(T) = 0, \text{ 即 } \lim_{\substack{\text{缓慢演变} \rightarrow 0 \\ \text{即 } T \rightarrow +\infty}} [\Gamma_n^R(T) \text{ 和 } \Gamma_n^I(T)] = 0. \quad (10)$$

$$\text{这一结果将表明 } \lim_{\substack{\text{缓慢演变} \rightarrow 0 \\ \text{即 } T \rightarrow +\infty}} [C_n(T) / C_n(0)] = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} E_n(R(t)) dt \right\} \exp \{i \gamma_n(C)\}.$$

即 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 将由“严格的”演变态 $|\Psi(t)\rangle$ 作 adiabatic-limit 演变后而“严格”实现出.

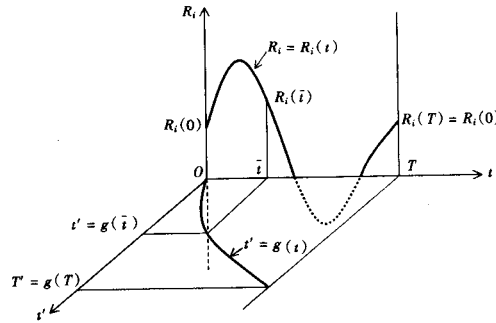


图 1 R_i - O - t 平面上的曲线 $R_i = R_i(t)$, 与 t' - O - t 平面上的曲线 $t' = g(t)$ 的“叠置”表示图

$$R(t) = \{R_i(t) | i=1, 2, \dots\}.$$

2.2 关于由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 实现 Berry 几何相的“演变态”的推广

条件 (9) 为由“严格的”演变态 $|\Psi(t)\rangle$ 作 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 演变后, 实现 Berry 几何相的“根本条件”; 而这一条件的另一表述形式为

$$\lim_{\substack{\text{缓慢演变} \rightarrow 0 \\ \text{即 } T \rightarrow +\infty}} |C_n(t)| = 1 \xleftrightarrow{\text{(互为等价)}} \lim_{\substack{\text{缓慢演变} \rightarrow 0 \\ \text{即 } T \rightarrow +\infty}} |C_m(t)| = 0; (m \neq n). \quad (11)$$

可以满足条件 (11) 的“严格的”演变态 $|\Psi(t)\rangle$, 显然可以按照含时系数 $C_n(t)$ 的初值 $C_n(0)$ 与末值 $C_n(T)$ 在 adiabatic-limit 变化下, 归成如下四类: (一类) $|C_n(0)| \equiv 1$, 和 $|C_n(T)| \equiv 1$; (二类) $|C_n(0)| \equiv 1$, 而 $|C_n(T)| \rightarrow 1$; (三类) $|C_n(0)| \rightarrow 1$, 而 $|C_n(T)| \equiv 1$; (四类) $|C_n(0)| \rightarrow 1$ 和 $|C_n(T)| \rightarrow 1$. 于是, 相应地便可以存在按如下四种类型的初、末态条件作“严格的”non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的演变:

1) 演变态 $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow |\Psi^{(0)}(t)\rangle$ 满足第一种类型的初、末态条件:

$$|\Psi^{(0)}(0)\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle, |\Psi^{(0)}(T)\rangle = e^{i\alpha} \cdot |n(\mathbf{R}(T))\rangle; [|n(\mathbf{R}(T))\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle] \quad (12)$$

时, 作 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的演变.

由这种演变态 $|\Psi^{(0)}(t)\rangle$ 作 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的演变后, 所 (获得) 实现 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 也正好是 Berry 于 1984 年建立几何位相理论时所考虑的演变情形^[1]. 但 Berry 在从理论上推导出 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 时, 所采用的是“adiabatic approximation”方法 [忽略掉矩阵元 $\langle n(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} | m(\mathbf{R}(t)) \rangle$ 的贡献——即用 $\langle n(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} | m(\mathbf{R}(t)) \rangle = 0$ 来“近似”替代 $\langle n(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} | m(\mathbf{R}(t)) \rangle \sim 0; (m \neq n)$]. 这相当于忽略掉 $\Gamma_n^-(T)$ [或 $\Gamma_n^R(T)$ 和 $\Gamma_n^+(T)$]——参见 (3c, d); 亦即, 用 $\Gamma_n^-(T) = 0$ [$\Gamma_n^R(T) = 0$ 和 $\Gamma_n^+(T) = 0$] 来“近似”替代 $\Gamma_n^-(T) \sim 0$ [或 $\Gamma_n^R(T) \sim 0$ 和 $\Gamma_n^+(T) \sim 0$]. 这样一来, 在 (3a) 式右边的非动力学部分的总相角将“直接”以 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的形式出现:

$$C_n(T) = C_n(0) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(\mathbf{R}(t)) dt \right\} \exp \{ i \gamma_n(C) \}, \quad (13)$$

其中, 按 Berry 原文中的考虑, 相当于在本文中应有 $C_n(0) = 1 [|\psi(0)\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle]$. 亦

即, 取 $\gamma_n(0) = 0$; 因而, $C_n(T) = e^{i\alpha}$; $\left[\alpha = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(\mathbf{R}(t)) dt + \gamma_n(C) \right]$ 即 $|\Psi^{(0)}(T)\rangle = e^{i\alpha}$

$|n(\mathbf{R}(T))\rangle$. 而 (13) 式的获得, 显然也可以采用同一能级 $E_n(\mathbf{R}(t))$ 上的能量本征波函数 $|\Psi(t)\rangle$ [参见引言], 并“近似地”视 $|\Psi(t)\rangle$ 为满足第一种类型的初、末态条件 (12) 的演变态 $|\Psi^{(0)}(t)\rangle$ [即 $|\Psi(t)\rangle \approx |\Psi^{(0)}(t)\rangle$]; 其中, 取 $\gamma_n(0) = 0$ 后, 从理论上 (满足 Schrödinger 方程) “十分简捷地”作推导后得出, 进而导出 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$. 这正是 Berry 所作出, 并在 1984 年发表的杰出工作^[1]的“思想精华”.

2) 演变态 $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow |\Psi^{(0)}(t)\rangle$ 满足第二种类型的初、末态条件:

$$|\Psi^{(I)}(0)\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle, |\Psi^{(I)}(T)\rangle \xrightarrow[\text{(即 } T \rightarrow +\infty \text{)}]{\text{(缓慢演变-0)}} e^{i\alpha} |n(\mathbf{R}(T))\rangle; [|n(\mathbf{R}(T))\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle] \quad (14)$$

时,作 non-adiabatic 到adiabatic-limit 的演变.

3) 演变态 $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow |\Psi^{(III)}(t)\rangle$ 满足第三种类型的初、末条件:

$$|\Psi^{(III)}(0)\rangle \xrightarrow[\text{(即 } T \rightarrow +\infty \text{)}]{\text{(缓慢演变-0)}} |n(\mathbf{R}(0))\rangle, |\Psi^{(III)}(T)\rangle = e^{i\alpha} |n(\mathbf{R}(T))\rangle; [|n(\mathbf{R}(T))\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle] \quad (15)$$

时,作 non-adiabatic 到adiabatic-limit 的演变.

4) 演变态 $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow |\Psi^{(IV)}(t)\rangle$ 满足第四种类型的初、末条件:

$$|\Psi^{(IV)}(0)\rangle \xrightarrow[\text{(即 } T \rightarrow +\infty \text{)}]{\text{(缓慢演变-0)}} |n(\mathbf{R}(0))\rangle, |\Psi^{(IV)}(T)\rangle \xrightarrow[\text{(即 } T \rightarrow +\infty \text{)}]{\text{(缓慢演变-0)}} e^{i\alpha} |n(\mathbf{R}(T))\rangle; [|n(\mathbf{R}(T))\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle] \quad (16)$$

时,作 non-adiabatic 到adiabatic-limit 的演变.

因而,由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 实现 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的“演变态” $|\Psi(t)\rangle$,不但可以是 Berry 在 adiabatic approximation 框架下所考虑的“演变态”: $|\Psi(t)\rangle$; [注: $|\Psi(t)\rangle$ 态是本文中第一种类型的演变态的 adiabatic approximation——即 $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow |\Psi^{(I)}(t)\rangle \approx |\Psi(t)\rangle$; 其中,取 $\gamma_n(0) = 0$], 而且还可以是(推广到)除此之外的其他三种“演变态”: $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow |\Psi^{(II)}(t)\rangle, |\Psi^{(III)}(t)\rangle$ 和 $|\Psi^{(IV)}(t)\rangle$.

关于可以存在“四种类型”的演变态的具体说明解释,可参见附录 II.

2.3 关于推广 Berry 几何位相理论的意义

系统由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的“严格”演变后,可以获得 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$; 这使得 Berry 最初所考虑的实现 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的一种演变方式,可以扩展为本文研究的四种演变方式. 这便进一步推广了 Berry 几何位相理论. 此外,由于这种推广是基于“量子能级变化跃迁”物理背景,因而实现 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的具体方式是由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的“严格”演变; 这样 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 便是与“量子能级变化跃迁”存在关联的. 这又将丰富了 Berry 几何位相理论.

3 结束语

研究从理论上“严格”实现 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的问题,是 Berry 几何位相理论发展的必然趋势,曾引起过国内外许多理论物理学工作者的关注和研究. 早在 1987 年, Aharonov 和 Anandan 就指出^[12]; This phase(系指 A-A 相)tends to the Berry phase in the adiabatic limit if $H(t) \equiv H[\mathbf{R}(t)]$ is chosen accordingly. 这是最早提出由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的“严格”演变后,实现(获得)Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 的一种理论模式. 国内倪光炯等同志也在这方面作出了具有影响的工作^[14,15],证实了对于可参数化 $t \rightarrow \mathbf{R}(t)$ 的周期 Hamiltonian 系统 $\hat{H}(t) \rightarrow \hat{H}(\mathbf{R}(t)); [\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)]$, Berry 几何相 $\gamma_n(C)$ 是由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的“严格”演变后获得. 我们对本文中的四种类型的演变态 $|\Psi^{(j)}(t)\rangle$; ($j = \text{I, II, III, IV}$) 作了具体的实例计算(略)后,也同样证实了这一点. 因此,可以这样说,对于经众多实验验证的 Berry 几何相 $\gamma_n(C)$,在理论上也存在着多种实现方式的诱人之处.

本工作得到倪光炯教授许多有益的指导和热忱的帮助,我们在此致以诚挚的谢意!

参 考 文 献

- 1 Berry M V. Proc. Roy. Soc. Lond. 1984, **A392**:45—57
- 2 Suter D, Mueller K T, Pines A. Phys. Rev. Lett., 1988, **60**(13):1218—1220
- 3 Tycko R. Phys. Rev. Lett., 1987, **58**(22):2281—2284
- 4 Bitter T, Dubbers D. Phys. Rev. Lett. 1987, **59**(3):251—254
- 5 Richardson D J, Kilvington A I et al. Phys. Rev. Lett., 1988, **61**(18):2030—2033
- 6 Chiao R Y, Wu Y S. Phys. Rev. Lett., 1986, **57**(8):933—936; Tomita A, Chiao R Y. Phys. Rev. Lett., 1986, **57**(8):937—940; Simon R, Kimble H J, Sudarshan E C G. Phys. Rev. Lett., 1988, **61**(1):19—22; Breuer H P, Dietz K, Holthaus M. Phys. Rev., 1993, **A47**(1):725—728
- 7 Zygelman B. Phys. Rev. Lett., 1990, **64**(3):256—259; Mead C A. Phys. Rev. Lett., 1987, **59**(2):161—164; Moody J, Shapere A, Wilczek F. Phys. Rev. Lett., 1986, **56**(9):893—896; Delacrétaz G, Grant E R et al. Phys. Rev. Lett., 1986, **56**(24):2598—2601
- 8 Zak J. Phys. Rev., 1989, **B40**(5):3156—3161; Bird D M, Preston A R. Phys. Rev. Lett., 1988, **61**(25):2863—2866
- 9 Li H Z. Phys. Rev. Lett., 1987, **58**(6):539—542; Isler K, Paranjape M B. Phys. Rev., 1990, **D41**(2):561—563
- 10 Nikam R S, Ring P. Phys. Rev. Lett., 1987, **58**(10):980—983; Nikam R S, Ring P et al. Phys. Lett., 1990, **B35**(3,4):215—220; Liang J Q. Phys. Lett., 1989, **A142**(1):11—13
- 11 Samuel J, Bhandari R. Phys. Rev. Lett., 1988, **60**(23):2339—2342; Jordan T F. Phys. Rev., 1988, **A38**(3):1590—1592
- 12 Aharonov Y, Anandan J. Phys. Rev. Lett., 1987, **58**(16):1593—1596
- 13 Dittrich W, Reuter M. Classical and Quantum Dynamics. Springer-Verlag, Berlin: 2nd Edition 1994:301—306
- 14 Ni G J, Chen S Q, Shen Y L. Phys. Lett., 1995, **A197**:100—106
- 15 Chen S Q, Ni G J. Phys. Lett., 1993, **A178**:339—341

附录 I

关于在参数 R 空间里的“同一条闭合曲线 C ”上作演变的“所有”Hamiltonian 系统的解释说明

以三维参数 $R = (R_1, R_2, R_3)$ 空间为例,来解释在“同一条闭合曲线 $C \Rightarrow R(t) = \{R_1(t), R_2(t), R_3(t)\}; (0 \leq t \leq T)$ 上作演变的“所有”Hamiltonian 系统 $\{\hat{H}(R(t')) \big|_{t'=g(t)}\}; [g(t)$ 为任何一个单调递增实函数,且 $g(0) = 0$; 于是,若表 $g(T) = T'$ 后,则 $0 \leq t' \leq T'$].

在三维参数 R 空间里,闭合曲线 C 可以采用 [以时间 $t(0 \leq t \leq T)$ 为“参变量”的]三个独立的参数方程描绘给出:

$$C \Rightarrow R_i = R_i(t); [0 \leq t \leq T \text{ 且 } R_i(T) = R_i(0)], (i = 1, 2, 3). \quad (\text{I-1})$$

由于 (I-1) 中的三个方程均满足周期条件“ $R_i(T) = R_i(0), (i = 1, 2, 3)$ ”,因而在三维参数 $R = (R_1, R_2, R_3)$ 空间里,由这三个方程 (I-1) 便“构成了”一条闭合曲线 C (例如,图 2 所表的曲线 C). 显然 Hamiltonian 系统 $\hat{H}(R(t))$ [其中, $R(t) = \sum_{i=1}^3 R_i(t) \cdot e_i$, 且 e_i 为 R_i 方向的“单位矢量”, $(0 \leq t \leq T)$] 为在闭

合曲线 C 上作“循环一周”的“一个”演变系统. 但需要注意的是,在“同一条闭合曲线 C ”上作“循环一周”演变的 Hamiltonian 系统,并非仅 $\hat{H}(R(t))$ 一个,而应为“无穷多个”,它们显然可以“一般地”表述成 $\{\hat{H}(R(t'))\};$ 其中, t' 不但应为 $0 \leq t' \leq T'$ 范围里的时间“参变量”,而且还应使其(相应的)三个独立的

参数方程“仍”描绘出“同一条闭合曲线 C ”:

$$C \Rightarrow R_i = R_i(t'); [0 \leq t' \leq T' \text{ 且 } R_i(T') = R_i(0)], (i = 1, 2, 3). \quad (I-2)$$

虽然由 (I-1) 和 (I-2) 都可以描绘出“同一条闭合曲线 C ”, 但它们“描绘的方式”[系指描绘出曲线 C 的那些“动点” $R \in C$ 的“移动描述情形”]却可以不同——换句话说, 若按 (I-1) 和 (I-2) 同时从“起点” $R(0)$ 出发, 随时间的流驰而(两者)都沿着曲线 C 作“动点”移动; 对于移动到 C 上的“同一点” $R \in C$, 则按 (I-1) 和 (I-2) 分别所“需要的时间” t 和 t' 可以不同 $t' \neq t$. 因而, 一般来讲, 按照“上述要求” t' 和 t 的“对应关系”应表为“一种函数变化关系”:

$$t' = g(t); [\text{其中, } g(t) \text{ 可以是任何一个单调递增实函数, 且 } g(0) = 0]. \quad (I-3)$$

显然, 当 $g(t) = t$ 时, (I-2) 即为 (I-1) 所给出的“动点” $R \in C$ 的“移动描述情形”.

下面, 为了研究 Hamiltonian 系统 $\hat{H}(R(t'))$ 与 $\hat{H}(R(t))$ 在参数 $R = (R_1, R_2, R_3)$ 空间里的“同一条闭合曲线 C ”上作“演变的快慢比较”, 可将由 (I-1) 所同时描绘的三条曲线分别“绘制”在 R_1-O-t , R_2-O-t 和 R_3-O-t 平面上, 如图 3(a) 所示. 然后, 再“绘制”出 $t'-O-t$ 平面上的“这种函数变化关系”曲线 $t' = g(t)$ 如图 3(b) 所示

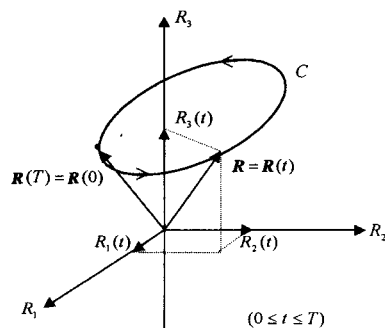


图2 三维参数 $R=(R_1, R_2, R_3)$ 空间里的一条闭合曲线 C .

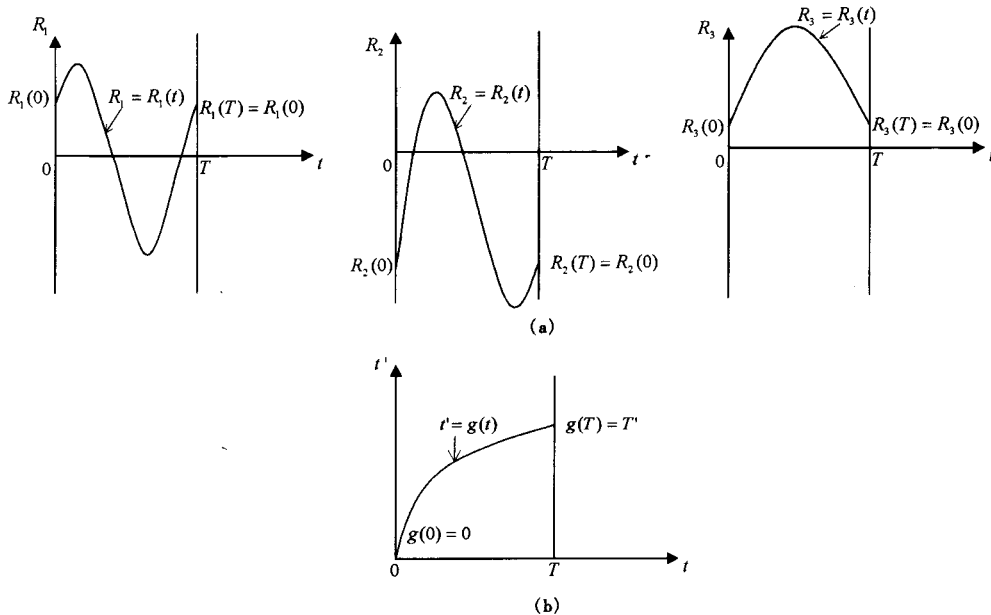


图3(a) 在 R_i-O-t 平面上的曲线 $R = R_i(t)$; ($i=1, 2, 3$);
(b) 在 $t'-O-t$ 平面上的曲线 $t' = g(t)$

最后, 分别将图 3(a) 中的三个表示图与图 3(b) “叠置”起来后 [参见图 1], 便可以很“直观”地看出 $\hat{H}(R(t'))$; ($0 \leq t' \leq T'$) 与 $\hat{H}(R(t))$; ($0 \leq t \leq T$) 在“同一条闭合曲线 C ”上作“演变的快慢比较”.

对于任意维数的参数 $R = (R_1, R_2, \dots)$ 空间情形, 显然我们也可以进行完全类同 [于三维参数 $R = (R_1, R_2, R_3)$ 空间情形] 的讨论, 并给出相应的解释说明.

附录 II

关于存在“四种类型”的演变态 $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow |\Psi^{(I)}(t)\rangle, |\Psi^{(II)}(t)\rangle, |\Psi^{(III)}(t)\rangle, |\Psi^{(IV)}(t)\rangle$ 的举例说明。

研究处在绕定轴(取为 e_z 轴)作匀角速度 ω 旋转的磁场 B 中的电子自旋态的演变(此为一个两能级系统),若取 (\hat{S}^2, \hat{s}_z) 表象,则含时 Schrödinger 方程为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \mu_e \cdot B \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\omega t} \\ \sin\theta e^{i\omega t} & -\cos\theta \end{bmatrix} \cdot |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{II-1})$$

其中, $\theta(0 < \theta < \pi)$ 为磁场方向与 e_z 轴向的夹角,且为常数: $\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c}$ 为电子自旋磁矩值. 此属于一个在演变过程中将出现量子能级跃迁(即 non-adiabatic)的循环周期(周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$)演变的 Hamiltonian 系统 [注:为了表述上简捷明了,在以下的讨论中,我们不对时间 t 作“参数化”处理],且可以求解出(略)系统的 [满足方程(II-1)的]完备解集 [并满足“正交归一性”]为

$$|\Psi_{k_{\pm}}(t)\rangle = e^{ik_{\pm}t} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{k_{\pm}} \\ \beta_{k_{\pm}} e^{i\omega t} \end{bmatrix}, \quad (\text{II-2a})$$

其中,

$$\begin{cases} k_{\pm} = \frac{1}{2} (-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4\bar{B}\omega\cos\theta + 4\bar{B}^2}); & \left(\bar{B} = \frac{\mu_e B}{\hbar} \right), \\ \alpha_{k_{\pm}} = \frac{\bar{B}\sin\theta}{\sqrt{k_{\pm}^2 + 2k_{\pm}\bar{B}\cos\theta + \bar{B}^2}}, & \beta_{k_{\pm}} = -\frac{k_{\pm} + \bar{B}\cos\theta}{\sqrt{k_{\pm}^2 + 2k_{\pm}\bar{B}\cos\theta + \bar{B}^2}}. \end{cases} \quad (\text{II-2b})$$

于是,系统的“一般演变波函数” $|\Psi(t)\rangle$ 可表为

$$|\Psi(t)\rangle = A_{k_+} |\Psi_{k_+}(t)\rangle + A_{k_-} |\Psi_{k_-}(t)\rangle; [A_{k_{\pm}} = \langle \Psi_{k_{\pm}}(t) | \Psi(t) \rangle], \quad (\text{II-3})$$

其中,展开系数 A_{k_+} 和 A_{k_-} 均“不含时间 t ”:且 $|A_{k_+}|^2 + |A_{k_-}|^2 = 1$, [因 $\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1$].

又,可以很容易地求解出能量本征方程:

$$\mu_e \cdot B \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\omega t} \\ \sin\theta e^{i\omega t} & -\cos\theta \end{bmatrix} \cdot |\Phi_{E_{\pm}}(t)\rangle = E_{\pm} |\Phi_{E_{\pm}}(t)\rangle, \quad (\text{II-4a})$$

其中,

$$\begin{cases} E_{\pm} = \pm \mu_e B, & |\Phi_{E_{\pm}}(t)\rangle = \frac{e^{i\phi_{\pm}(t)}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 \mp \cos\theta}} \\ \pm \sqrt{1 \mp \cos\theta} e^{i\omega t} \end{bmatrix}, \\ [\phi_{\pm}(t) \text{ 是满足周期条件 } \phi_{\pm}(T) = \phi_{\pm}(0) \text{ 的两个任意的单值、连续、可微的实函数}]. \end{cases} \quad (\text{II-4b})$$

依次利用(II-2b), (II-2c)以及(II-2a)和(II-4b),不难求出当 $\omega \rightarrow 0$ 时的如下几个 adiabatic-limit:

$$k_{\pm} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} \pm \bar{B}, \alpha_{k_{\pm}} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 \pm \cos\theta}}, \quad \beta_{k_{\pm}} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \cos\theta}, \quad (\text{II-5})$$

$$|\Psi_{k_{\pm}}(t)\rangle \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} e^{\pm i\bar{B}t - i\phi_{\pm}(t)} \cdot |\Phi_{E_{\pm}}(t)\rangle. \quad (\text{II-6})$$

下面,研究由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的演变后可以“严格”获得(其中之一)Berry 几何相:

$$\gamma_+(C) \left[= i \oint_C \langle \Phi_{E_+}(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \Phi_{E_+}(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} \right] = i \int_0^T \left\langle \Phi_{E_+}(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \Phi_{E_+}(t) \right\rangle dt = (\cos\theta - 1)\pi \quad (\text{II-7})$$

为例,来考察“四种类型”的演变态 $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow |\Psi^{(I)}(t)\rangle, |\Psi^{(II)}(t)\rangle, |\Psi^{(III)}(t)\rangle, |\Psi^{(IV)}(t)\rangle$ 的形成(即“存在”).

(1) 演变态 $|\Psi^{(I)}(t)\rangle$ 的形成.

首先,可以将 $|\Psi^{(I)}(t)\rangle$ 表成 [参见 (II-3)]

$$|\Psi^{(I)}(t)\rangle = A_{k_+}^{(I)} |\Psi_{k_+}(t)\rangle + A_{k_-}^{(I)} |\Psi_{k_-}(t)\rangle; \quad (\text{II-8})$$

然后,由 $|\Psi^{(I)}(t)\rangle$ 应满足第一种类型的初、末态条件:

$$|\Psi^{(I)}(0)\rangle = |\Phi_{E_+}(0)\rangle, \quad |\Psi^{(I)}(T)\rangle = e^{i\alpha} \cdot |\Phi_{E_+}(T)\rangle; \quad [|\Phi_{E_+}(T)\rangle = |\Phi_{E_+}(0)\rangle], \quad (\text{II-9})$$

可以寻找出展开系数 $A_{k_+}^{(I)}$ 和 $A_{k_-}^{(I)}$ 存在的“条件”应为满足如下方程组:

$$\begin{cases} A_{k_+}^{(I)} |\Psi_{k_+}(0)\rangle + A_{k_-}^{(I)} |\Psi_{k_-}(0)\rangle = |\Phi_{E_+}(0)\rangle, & (\text{II-10a}) \\ A_{k_+}^{(I)} |\Psi_{k_+}(T)\rangle + A_{k_-}^{(I)} |\Psi_{k_-}(T)\rangle = e^{i\alpha} \cdot |\Phi_{E_+}(T)\rangle. & (\text{II-10b}) \end{cases}$$

由 (II-10a) 应得出 $A_{k_+}^{(I)} = \langle \Psi_{k_+}(0) | \Phi_{E_+}(0) \rangle$, 而由 (II-10b) 又应得出 $A_{k_+}^{(I)} = e^{i(\alpha - k_+ \cdot T)} \cdot \langle \Psi_{k_+}(0) | \Phi_{E_+}(0) \rangle$; 因而,使方程 (II-10a, b) “成立”——即“存在 $A_{k_+}^{(I)}$ ”的“前提条件”应为“ $\alpha = k_+ \cdot T + 2n_1\pi = k_- \cdot T + 2n_2\pi$; (n_1, n_2 为整数)”, 而此条件即要求“ $k_+ \cdot T$ 与 $k_- \cdot T$ 只能相差 2π 的整数倍”, 即

$$k_+ \cdot T - k_- \cdot T = 2n\pi; \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (\text{II-11})$$

利用 (II-2b), 可将条件 (II-11) 具体表成

$$(n^2 - 1)\omega^2 + (4\bar{B}\cos\theta)\omega - 4\bar{B}^2 = 0; \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (\text{II-12})$$

这将意味着,只有当

$$\omega = \omega_1 \left[= \frac{\bar{B}}{\cos\theta} \right] \text{ 和 } \omega_n \left[= \frac{2\bar{B}}{n^2 - 1} (-\cos\theta \pm \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}), (n = 2, 3, \dots) \right] \quad (\text{II-13})$$

时,方程组 (II-10a, b) 才存在(“唯一”)解 ($A_{k_+}^{(I)}, A_{k_-}^{(I)}$). 若再注意到 $\omega_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$, 则可以得出这样的结论:系统可以存在按第一种方式由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的演变 $\lim_{\omega(=\omega_1, \omega_n) \rightarrow 0} |\Psi^{(I)}(t)\rangle$ 后,“严格”获得 Berry 几何相 $\gamma_+(C)$.

(2) 演变态 $|\Psi^{(III)}(t)\rangle$ 的形成

$$\text{同理, } |\Psi^{(III)}(t)\rangle = A_{k_+}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_+}(t)\rangle + A_{k_-}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_-}(t)\rangle, \quad (\text{II-14})$$

且应满足第二种类型的初、末态条件,即

$$\begin{cases} A_{k_+}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_+}(0)\rangle + A_{k_-}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_-}(0)\rangle = |\Psi^{(III)}(0)\rangle = |\Phi_{E_+}(0)\rangle, & (\text{II-15a}) \\ A_{k_+}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_+}(T)\rangle + A_{k_-}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_-}(T)\rangle = |\Psi^{(III)}(T)\rangle \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} e^{i\alpha} \cdot |\Phi_{E_+}(T)\rangle. & (\text{II-15b}) \end{cases}$$

由 (II-15a) 即可寻找出展开系数 $A_{k_+}^{(III)}$ 和 $A_{k_-}^{(III)}$:

$$A_{k_{\pm}}^{(II)} = \langle \Psi_{k_{\pm}}(0) | \Phi_{E_{\pm}}(0) \rangle = \frac{e^{i\phi_{\pm}(0)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\bar{B} - k_{\pm})\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{k_{\pm}^2 + 2k_{\pm} \cdot \bar{B}\cos\theta + \bar{B}^2}}. \quad (\text{II-16})$$

因 $k_{\pm} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} \pm \bar{B}$ [参见 (II-2b)], 故 $A_{k_{\pm}}^{(II)} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} 0$, 而 $A_{k_{\pm}}^{(II)} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} e^{i\phi_{\pm}(0)}$. 因而, 将 (II-16) 代回 (II-14) 后, 便很容易地获得 $|\Psi^{(II)}(T)\rangle$ 的 adiabatic-limit 为

$$|\Psi^{(II)}(t)\rangle|_{t=T} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} e^{i\phi_{\pm}(0)} \cdot \{e^{-i\bar{B}t - i\phi_{\pm}(t)} \cdot |\Phi_{E_{\pm}}(t)\rangle\}|_{t=T}, \text{ 即 } e^{-i\bar{B}T} \cdot |\Phi_{E_{\pm}}(T)\rangle.$$

这表明, 按 (II-15a) 寻找出的 $A_{k_{\pm}}^{(II)}$, 也“自然”会满足 (II-15b), 其中, $\alpha = -\bar{B} \cdot T$; 因而系统可以存在按第二种方式由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 的演变 $\lim_{\omega \rightarrow 0} |\Psi^{(II)}(t)\rangle$ 后, “严格”获得 Berry 几何相 $\gamma_{\pm}(C)$.

(3) 演变态 $|\Psi^{(III)}(t)\rangle$ 的形成

$$\text{同理, } |\Psi^{(III)}(t)\rangle = A_{k_{+}}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_{+}}(t)\rangle + A_{k_{-}}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_{-}}(t)\rangle, \quad (\text{II-17})$$

且满足第三种类型的初、末态条件, 即

$$\begin{cases} A_{k_{+}}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_{+}}(0)\rangle + A_{k_{-}}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_{-}}(0)\rangle [= |\Psi^{(III)}(0)\rangle] \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} |\Phi_{E_{+}}(0)\rangle, \\ A_{k_{+}}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_{+}}(T)\rangle + A_{k_{-}}^{(III)} \cdot |\Psi_{k_{-}}(T)\rangle [= |\Psi^{(III)}(T)\rangle] = e^{i\alpha} \cdot |\Phi_{E_{+}}(T)\rangle. \end{cases} \quad (\text{II-18a})$$

$$(\text{II-18b})$$

由 (II-18b) 即可寻求出展开系数 $A_{k_{+}}^{(III)}$ 和 $A_{k_{-}}^{(III)}$:

$$A_{k_{+}}^{(III)} = e^{i(\alpha - k_{+} \cdot T)} \cdot A_{k_{+}}^{(II)}, \quad A_{k_{-}}^{(III)} = e^{i(\alpha - k_{-} \cdot T)} \cdot A_{k_{-}}^{(II)}, \quad (\text{II-19})$$

[其中, 利用了 $|\Phi_{E_{+}}(T)\rangle = |\Phi_{E_{+}}(0)\rangle$, $|\Psi_{k_{\pm}}(T)\rangle = e^{ik_{\pm} \cdot T} \cdot |\Psi_{k_{\pm}}(0)\rangle$, 以及 (II-16) 式]. 将 (II-19) 代入 (II-17) 后, 得到 $|\Psi^{(III)}(0)\rangle$ 的 adiabatic-limit 为 $|\Psi^{(III)}(t)\rangle|_{t=0} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} 0 + e^{i(\alpha - k_{-} \cdot T)} \cdot \{e^{i\phi_{+}(0)}\} \cdot \{e^{-i\bar{B}t - i\phi_{+}(t)} \cdot |\Phi_{E_{+}}(t)\rangle\}|_{t=0}$, 即

$$e^{i(\alpha - k_{-} \cdot T)} \cdot |\Phi_{E_{+}}(0)\rangle. \quad (\text{II-20})$$

[其中, 应用了 $A_{k_{+}}^{(II)} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} 0$, $A_{k_{-}}^{(II)} \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} e^{i\phi_{+}(0)}$, 以及 (II-5) 式]. 将 (II-20) 与 (II-18a) 比较后, 应得出: 只有当 $\alpha = k_{-} \cdot T$ 时, 按 (II-18b) 寻找出的展开系数 $A_{k_{+}}^{(III)}$ 和 $A_{k_{-}}^{(III)}$ 才会满足 (II-18a). 因而, 可以“存在”展开系数 $A_{k_{+}}^{(III)}$ 和 $A_{k_{-}}^{(III)}$. 于是, 我们从这一角度即说明了系统可以存在按第三种方式由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 演变 $\lim_{\omega \rightarrow 0} |\Psi^{(III)}(t)\rangle$ 后, “严格”获得 Berry 几何相 $\gamma_{+}(C)$.

(4) 演变态 $|\Psi^{(IV)}(t)\rangle$ 的形成

$$\text{同理, } |\Psi^{(IV)}(t)\rangle = A_{k_{+}}^{(IV)} \cdot |\Psi_{k_{+}}(t)\rangle + A_{k_{-}}^{(IV)} \cdot |\Psi_{k_{-}}(t)\rangle, \quad (\text{II-21})$$

且满足第四种类型的初、末态条件, 即

$$\begin{cases} A_{k_{+}}^{(IV)} \cdot |\Psi_{k_{+}}(0)\rangle + A_{k_{-}}^{(IV)} \cdot |\Psi_{k_{-}}(0)\rangle [= |\Psi^{(IV)}(0)\rangle] \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} |\Phi_{E_{+}}(0)\rangle, \\ A_{k_{+}}^{(IV)} \cdot |\Psi_{k_{+}}(T)\rangle + A_{k_{-}}^{(IV)} \cdot |\Psi_{k_{-}}(T)\rangle [= |\Psi^{(IV)}(T)\rangle] \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} e^{i\alpha} \cdot |\Phi_{E_{+}}(T)\rangle. \end{cases} \quad (\text{II-22a})$$

$$(\text{II-22b})$$

由于存在如下四个 adiabatic-limit [参见 (II-5)]:

$$|\Psi_{k_{\pm}}(0)\rangle \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} e^{-i\phi_{\pm}(0)} |\Phi_{E_{\pm}}(0)\rangle, \quad |\Psi_{k_{\pm}}(T)\rangle \xrightarrow{(\omega \rightarrow 0)} e^{\pm i\bar{B}T - i\phi_{\pm}(T)} |\Phi_{E_{\pm}}(T)\rangle. \quad (\text{II-23})$$

因而联合 (II-22a, b) 与 (II-23) 后, 可以寻找出这样的展开系数:

$A_{k_{+}}^{(IV)} = 0$, $A_{k_{-}}^{(IV)} = e^{i\phi_{+}(0)}$ 以及 $\alpha = -\bar{B} \cdot T$; [其中, 应用了 $|\Phi_{E_{+}}(T)\rangle = |\Phi_{E_{+}}(0)\rangle$, $\phi_{+}(T) = \phi_{+}(0)$]. 这表明, 系统可以存在按第四种方式由 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 演变 $\lim_{\omega \rightarrow 0} |\Psi^{(IV)}(t)\rangle$ 后, “严格”获得

Berry 几何相 $\gamma_+(C)$.

按如上讨论的“四种类型”的演变态 $|\Psi^{(I)}(t)\rangle$, $|\Psi^{(II)}(t)\rangle$, $|\Psi^{(III)}(t)\rangle$ 和 $|\Psi^{(IV)}(t)\rangle$, 作 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 演变后, 它们都可以“严格”获得“其中之一”Berry 几何相 $\gamma_+(C) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \text{Im}[\ln \langle \Psi^{(j)}(0) | \Psi^{(j)}(T) \rangle] + \frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle \Psi^{(j)}(t) | \hat{H}(R(t)) | \Psi^{(j)}(t) \rangle \cdot dt \right\}$; ($j = I, II, III, IV$). [而对于“严格”获得“另一个”Berry 几何相 $\gamma_-(C) \left[= i \oint_C \langle \Phi_{E_-}(R) | \nabla_R | \Phi_{E_-}(R) \rangle \cdot dR \right] = i \cdot \int_0^T \langle \Phi_{E_-}(t) | \frac{d}{dt} | \Phi_{E_-}(t) \rangle \cdot dt = -(\cos\theta + 1)\pi$ 的问题, 也可以进行“完全类似”的讨论, 并同样可以存在相应的“四种类型”的演变态, 由它们作 non-adiabatic 到 adiabatic-limit 演变后, 同样都可以“严格”获得相应的这个 Berry 几何相 $\gamma_-(C)$]. 由于受文章篇幅限制, 故在本文里已不便将“严格”获得 Berry 几何相 $\gamma_+(C)$ [和 $\gamma_-(C)$] 的具体的计算处理过程表出.

The Extention of Berry's Theory on Geometric Phase*

Zhang Zhongcan Fang Zhenyun Hu Chenguo Sun Shijun

(Physics Department of College of Science of Chongqing University, Chongqing 400044)

Abstract To the cyclic Hamiltonian system, where we have done the parameter transition $t \rightarrow R(t)$, we study the problem of the acquirement of Berry geometric phase $\gamma_n(C)$ by the “strict” evolution from the non-adiabatic to the adiabatic-limit. Our results show that there exist four types of evolution states, all of which can satisfy the above “strict” evolution along the same closed curve C in the space formed by the parameter R and can obtain the same Berry geometric phase $\gamma_n(C)$. When Berry first found the geometric phase $\gamma_n(C)$, he only considered one evolution state, which is just the adiabatic approximation case of one of the four “strict” evolution states mentioned above. So Berry's theory on geometric phase can be extended into the four types of strict evolution shown in this paper.

Key words geometric phase, geometric phase factor, cyclic evolution period, transition of the changeable energy-level