第22卷 第6期
1998 年6月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol.22, No.6
June, 1998

边界不相关可积系统中无穷多运动积分的研究(II)*

陈一新[1] 罗旭东[1,2]

1(浙江大学浙江近代物理中心和浙江大学物理系 杭州 310027)

2(中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

摘要 在 Affine Toda 场论中，研究了(I)部分得到的三种运动积分生成函数之间的联系，并求出一些经典可积边界条件. 计算了准周期性边界条件下 ZMS 模型的无穷多运动积分；求出了 ZMS 模型在不相关边界下的经典可积边界条件与边界 $K_{\pm}$ 矩阵，并证实在此条件下确实存在一组无穷多运动积分、且其中的一个正是体系的哈密顿量，因而该系统是完全可积的.

关键词 无穷多运动积分 经典可积边界条件 Affine Toda 场论 ZMS 模型

1 前言

近几年来，人们对处于不相关边界条件下的 Sine–Gordon理论做了大量研究[1,2]. 但在经典水平上，对 ZMS 模型及一般意义下的 Affine Toda 场论，由于其经典 r 矩阵并不满足 E. K. Sklyanin[3]的对称性条件($r_{12}(\beta) = -r_{12}(-\beta)$)，因而一直没有很大进展. 后来 P. Bowcock[4]等人通过改变边界点 Lax pair 形式的方法求出了实耦合常数下 Affine Toda 场论的经典可积边界条件. 但是，对于虚耦合常数的 Affine Toda 场论，因其是复场量，他们的方法也不再适用.

在本文(I)部分[5]中，对定义于 $[x_-, x_+]$ 区间的可积模型，我们用保持边界点 Lax Pair 形式不变的方法求出了三种可能的运动积分生成函数. 即

$$\text{a.}\ \ \mathrm{tr}\{K_+(x_+,t,\alpha)T(x_+,x_-,t,\alpha)K_-(x_-,t,\alpha)T^{-1}(x_+,x_-,t,-\alpha+\delta)\}\ ; \tag{1}$$

$$\text{b.}\ \ \mathrm{tr}\{\tilde{K}_+(x_+,t,\alpha)T(x_+,x_-,t,\alpha)\tilde{K}_-(x_-,t,\alpha)T^{t}(x_+,x_-,t,-\alpha+\delta')\}\ ; \tag{2}$$

$$\text{c.}\ \ \mathrm{tr}\{\bar{K}_+(x_+,t,\alpha)T(x_+,x_-,t,\alpha)\bar{K}_-(x_-,t,\alpha)T^{\dagger}(x_+,x_-,t,-\alpha+\delta'')\}\ . \tag{3}$$

1997-06-09收稿

* 国家自然科学基金资助

其中，T为该系统的转换矩阵，上标“t”表示转置、上标“†”表示共轭，$K_\pm$、$\tilde{K}_\pm$与$\bar{K}_\pm$分别对应上述三种生成函数的边界反射矩阵. 因此，至少在 Affine Toda 场论中，找出这些生成函数之间，以及它们与 P. Bowcock 等人的方式之间的内在联系，是我们必须解决的一个问题.

在物理上，可以自身产生孤子的单场理论有着其不可替代的作用. R. Sasaki[6]的研究表明，在 Affine Toda 场论中，最多只能约化出两个单场理论($A_1^{(1)}$与 $A_2^{(2)}$). 但由于实耦合常数的理论没有孤子解[9]，所以可以描述孤子运动的虚耦合常数的对应理论，即 Sine–Gordon方程($A_1^{(1)}$)与 ZMS 模型($A_2^{(2)}$)就显得格外重要.

由于经典可积场论的完全可积性由无穷多运动积分来保证，由此，是否拥有相互对合且守恒的无穷多运动积分，可用来检验该模型在经典意义上的完全可积性. 本文试图通过具体计算边界不相关条件下 ZMS 模型的运动积分，从而验证在(Ⅰ)部分所得到的运动积分生成函数的有效性.

本文的安排是：在第二节研究 Affine Toda 场论中三种运动积分生成函数及其与 P. Bowcock 理论之间的内在联系，并求出该模型的一些经典可积边界条件. 而后，在第三节中具体计算准周期性边界条件下 ZMS 模型的无穷多运动积分. 再在第四节中研究边界不相关条件下 ZMS 模型的经典可积边界条件与 $K_\pm$ 矩阵，并应用生成函数计算此时的运动积分. 最后在第五节进行总结.

2 Affine Toda 场论的可积边界条件

2.1 Affine Toda 场的一些性质

当考虑处于有限间隔 $[x_-, x_+]$内、边界不相关条件下、含 r 秩李代数的 Affine Toda 场论时，它的作用量[7]可表示为(实耦合常数)：

$$\mathscr{L}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left\{\theta(x-x_-)\theta(x_+-x)\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a-\frac{m^2}{\beta^2}\sum_0^r n_i\left(\mathrm{e}^{\beta\alpha_i\cdot\phi}-1\right)\right]-\right.$$

$$\left.\delta(x-x_-)V_-(\phi(x_-),\partial_\mu\phi(x_-))-\delta(x_+-x)\,V_+(\phi(x_+),\partial_\mu\phi(x_+))\right\},\qquad(4)$$

其中 m,β分别为质量与耦合常数；α_i为 r 秩李代数的单根(包括仿射根α_0). 它满足$\sum_0^r n_i\alpha_i=0$，$n_0=1$；而 $\alpha_i\cdot\phi=\sum_{a=0}^{r-1}\alpha_i^a\phi_a$，即这是一个关于 r 个实标量场的理论. $V_\pm(\phi(x_\pm),\partial_\mu\phi(x_\pm))$分别为边界 $x_\pm$处的能量修正项. 当 $V_\pm$只与该边界点的场量有关、而与其各阶导数项无关时，可得其运动方程为：

$$(\partial_t^2-\partial_x^2)\phi=-\frac{m^2}{\beta}\sum_0^r n_i\alpha_i\,\mathrm{e}^{\beta\alpha_i\cdot\phi}\quad x_-<x<x_+$$

$$\partial_x\phi_a=-\frac{\partial V_+}{\partial\phi_a}\quad x=x_+$$

$$\partial_x \phi_a = \frac{\partial V_-}{\partial \phi_a} \quad x = x_- \quad . \tag{5}$$

为了证实共形场论可积变形的存在,含有离散的、纯虚量耦合常数的Affine Toda场提供了很好的例子[8],对此,人们可以将实耦合常数解析延拓(取$\beta = \mathrm{i}\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta} \subset R$)后得到.一般而言,这是关于复场量的理论(Sine–Gordon理论例外). T. Hollowood 等人[9]指出,与实耦合常数的理论不同,虚耦合常数的理论存在孤子解,且对孤子解而言,能动量实际上是实的[10].

在讨论 Affine Toda 场论的性质时,在耦合常数的虚实性不会引起本质区别的情况下,将采用(4)与(5)的形式进行研究. 至于虚耦合常数的情况,可对结果进行耦合常数的解析延拓.

Affine Toda 场[4]的Lax pair 可写为($\lambda = \mathrm{e}^{\alpha}$)

$$U(x,t,\lambda) = -\left\{\frac{1}{2}\beta H\cdot \partial_t \phi + m\sum_0^r \sqrt{m_i}(\lambda E_{\alpha_i} + \lambda^{-1}E_{-\alpha_i})\mathrm{e}^{\beta\alpha_i\cdot\phi/2}\right\}$$

$$V(x,t,\lambda) = -\left\{\frac{1}{2}\beta H\cdot \partial_x \phi + m\sum_0^r \sqrt{m_i}(\lambda E_{\alpha_i} - \lambda^{-1}E_{-\alpha_i})\mathrm{e}^{\beta\alpha_i\cdot\phi/2}\right\} , \tag{6}$$

上式中 H, $E_{\pm\alpha_i}$ 分别是 r 秩李代数的 Cartan 子代数及相应其单根(包括了仿射根α_0)的生成元;系数 $m_i = n_i\alpha_i^2 / 8$,此时李代数的关系为:

$$[H_i, H_j]_- = 0 \ , \qquad [H, E_{\pm\alpha_i}]_- = \pm\alpha_i E_{\pm\alpha_i}$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}]_- = 2\alpha_i \cdot H / (\alpha_i^2) \ . \tag{7}$$

在本文中,$[,]_-$表示对易子运算,$[,]_+$表示反对易子运算.

2.2　三种生成函数间的联系

由场运动方程(5)可见,场量在 $x_\pm \mp 0^+$处依然有“bulk”($x_- < x < x_+$)中的运动方程;因此,如果在边界点附近,场量变化是平滑而无奇性的,那么可以认为在边界点上,场量不但有(5)式中的边界方程,而且同时还拥有“bulk”中的运动方程. 这样可以在整个$[x_-, x_+]$区间继续使用原先的 Lax pair 形式. 至于边界点的 Lax pair, 它可采用将原来(6)形式中的$\partial_x\phi(x)$项用(5)式的边界方程换为$\mp\partial_\phi V_\pm$后的形式,即(以实耦合常数为例)

$$U(x_\pm, t,\lambda) = -\left\{\frac{1}{2}\beta H\cdot \partial_t \phi + m\sum_0^r \sqrt{m_i}(\lambda E_{\alpha_i} + \lambda^{-1}E_{-\alpha_i})\mathrm{e}^{\beta\alpha_i\cdot\phi/2}\right\}\Bigg|_{x=x_\pm}$$

$$V(x_\pm, t,\lambda) = -\left\{\frac{1}{2}\beta H\cdot (\mp\partial_\phi V_\pm(\phi)) + m\sum_0^r \sqrt{m_i}(\lambda E_{\alpha_i} - \lambda^{-1}E_{-\alpha_i})\mathrm{e}^{\beta\alpha_i\cdot\phi/2}\right\}\Bigg|_{x=x_\pm} . \tag{8}$$

对此,由原先 Lax pair 形式(6)中$\partial_x\phi$ 项的唯一性可见,只要边界点上也有“bulk”中的运动

方程形式存在，那么对(8)式加以零曲率条件后，一定可以得到原用于替换$\partial_x\phi$项的边界方程. 即Lax pair的(8)形式等价于其(6)形式加上边界方程. 因此，对边界点上的Lax pair，可以使用原先含$\partial_x\phi$的(6)形式以保持基本Poisson括号在边界点上不变. 而这正是(Ⅰ)部分中对边界点Lax pair形式的要求，所以，可以使用在(Ⅰ)部分得到的结果.

对Affine Toda场论中Lax pair表示的李代数生成元，总可以找到它们的一种表示形式，使以下关系存在：

$$H_i^t = H_i^\dagger = H_i\,,\quad E_{\pm\alpha_i}^t = E_{\pm\alpha_i}^\dagger = E_{\mp\alpha_i}\,.$$

而对此表示，还可以找到它的一个自同构映射Ω:

$$H_i \to H'_i = \Omega^{-1} H_i \Omega = -H_i$$

$$E_{\alpha_i} \to E'_{\alpha_i} = \Omega^{-1} E_{\alpha_i} \Omega = E_{-\alpha_i}$$

$$E_{-\alpha_i} \to E'_{-\alpha_i} = \Omega^{-1} E_{-\alpha_i} \Omega = E_{\alpha_i}\,,$$

它同样满足前面李代数结构(7)式的要求. 此时Affine Toda场论的Lax pair有以下性质：

$$U^t(x,\lambda) = U(x,\lambda^{-1}) = -\Omega^{-1} U(x,-\lambda)\Omega$$

$$V^t(x,\lambda) = V(x,-\lambda^{-1}) = -\Omega^{-1} V(x,-\lambda)\Omega\,. \tag{9}$$

应该指出的是，上式对耦合常数的虚实性没有特殊要求. 而如将“t”换为“†”，则对虚耦合常数一般是不适用的(此时场量一般为复).

根据以上结论，可以在Affine Toda场的范围内证明，不论耦合常数取虚或实，(1)式与(2)式是等价的. 在实耦合常数下，它们也与(3)式等价. 但是，(3)的形式对虚耦合常数的情况一般是不适用的，而且即使在实耦合常数理论中，它也对谱参量的虚实性提出了较高要求.

证明：由$T(x,y,\lambda)$的性质可见：

$$\partial_x T^t(x,y,\lambda) = T^t(x,y,\lambda)U^t(x,\lambda) = T^t(x,y,\lambda)[-\Omega^{-1}U(x,-\lambda)\Omega]\,,$$

即

$$\partial_x[\Omega T^t(x,y,\lambda)\Omega^{-1}] = -[\Omega T^t(x,y,\lambda)\Omega^{-1}]\,U(x,-\lambda)\,.$$

对照$\partial_x T^{-1}(x,y,\lambda) = -T^{-1}(x,y,\lambda)U(x,\lambda)$及初始条件$T(x,y,\lambda)|_{x=y} = I$，则可得：

$$\Omega T^t(x,y,\lambda)\Omega^{-1} = T^{-1}(x,y,-\lambda)\,,$$

或

$$\Omega T^t(x,y,\alpha)\Omega^{-1} = T^{-1}(x,y,\alpha+\mathrm{i}\pi)\,, \tag{10}$$

所以我们可得

$$\mathrm{tr}\{K_-(\alpha)T^{-1}(-\alpha+\delta)K_+(\alpha)T(\alpha)\} =$$
$$\mathrm{tr}\{K_-(\alpha)\Omega T^t(-\alpha+\delta+\mathrm{i}\pi)\Omega^{-1}K_+(\alpha)T(\alpha)\} =$$
$$\mathrm{tr}\{\tilde{K}_-(\alpha)T^t(-\alpha+\delta')\tilde{K}_+(\alpha)T(\alpha)\}. \tag{11}$$

即(1)式等价于(2)式，且$\delta' = \delta + i\pi$,此时它们间反射矩阵 $K_\pm$ 与 $\tilde{K}_\pm$ 的关系为

$$\tilde{K}_-(\alpha) = K_-(\alpha)\Omega, \quad \tilde{K}_+(\alpha) = \Omega^{-1}K_+(\alpha). \tag{12}$$

在实耦合常数的 Affine Toda 场论中，将“t”换为“†”后，由于场量为实，因此在谱参量为实数时，我们依然可以保持方程(9)的形式，从而使这三种生成函数的表示形式是等价的. 此时，除(12)式继续成立外，还有

$$\tilde{K}_\pm(\alpha) = \tilde{K}_\pm(\alpha), \qquad \delta' = \delta'' = \delta + \mathrm{i}\pi. \tag{13}$$

而在虚耦合常数情形下，由于场量是复量，“†”的表示方法就很难继续保持方程(9)的形式，因而不再适用了. 最后应该指出的是，在(1)与(2)的形式中，对谱参量的虚实性是没有限制的.

2.3　与 P. Bowcock 方案的联系及可积边界条件

在文献[4]中，P. Bowcock等人提出了在实耦合常数下的另一种解决方法. 他们认为系统原先的 Lax pair在边界点上已不再成立了. 但可通过在边界上附加一小段区间，而后在该区间重新定义一对 Lax pair，从而得到了半无穷区间$[-\infty, \alpha]$的运动积分生成函数 $\mathrm{tr}\, T'(\lambda)K'_+T'^{\dagger}(\lambda^{-1})$ 这里他们的 $T'(\lambda)$相当于本文的 $T^{-1}(\lambda)$，所以他们的 $K'(\lambda)$则等于我们(3)式中的 $\bar{K}_+^{-1}(\lambda)$. 而 K'_+及其边界条件[4]由下式给出：

$$\frac{1}{2}\left[K'_+(\lambda), \frac{\beta}{m}\partial_x\phi\cdot H\right]_+ = -\left[K'_+(\lambda), \sum_0^r\sqrt{m_i}(\lambda E_{\alpha_i} - \lambda^{-1}E_{-\lambda_i})e^{\beta\alpha_i\cdot\phi/2}\right]_-. \tag{14}$$

而直接由(I)部分中的结果，可求得实耦合常数下 x_+的边界方程为(设 $\bar{K}_+$不含场量及时间项)：

$$V^t(x_+, -\alpha+\delta)\bar{K}_+(\alpha) + \bar{K}_+(\alpha)V(x_+, \alpha) = 0.$$

显然取$\delta = 0$时，展开后可得关于 $\bar{K}_+^{-1}(\lambda)$的方程(λ: e^α)：

$$\frac{1}{2}\left[\bar{K}_+^{-1}(\lambda), \frac{\beta}{m}\partial_x\phi\cdot H\right]_+ = -\left[\bar{K}_+^{-1}(\lambda), \sum_0^r\sqrt{m_i}(\lambda E_{\alpha_i} - \lambda^{-1}E_{-\lambda_i})e^{\beta\alpha_i\cdot\phi/2}\right]_-,$$

这正与(14)的形式是一致的. 所以可以完成平行于 P. Bowcock[4]的计算，得到以下结果：对于 Simple-laced的实耦合 Affine Toda 场，其边界条件为：

$$\frac{\beta}{m}\partial_x\phi = -\sum_0^r B_i\sqrt{\frac{n_i}{2|\alpha_i|^2}}\,\alpha_i\,e^{\beta\alpha_i\cdot\phi/2},$$

其中
$$|B_i| = 2\sqrt{n_i}\ , \quad i = 0,1,\cdots,r\ ,$$
或
$$B_i = 0, \quad i = 0,1,\cdots,r\ . \tag{15}$$

而对虚耦合情形，由于场量为复量，应该用(2)式“t”的方式，但可以借用(3)式“†”的结果. 即上式中的β解析延拓即可得到.

$$\frac{\mathrm{i}\tilde{\beta}}{m}\partial_x\phi = -\sum_0^r B_i\sqrt{\frac{n_i}{2|\alpha_i|^2}}\,\alpha_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\beta}\alpha_i\cdot\phi/2}\ ,$$

其中
$$|B_i| = 2\sqrt{n_i}\ , \quad i = 0,1,\cdots,r\ ,$$
或
$$B_i = 0, \quad i = 0,1,\cdots,r\ . \tag{16}$$

3 准周期边界条件下的 ZMS 模型

作为共形场论可积变形的 Zhiber–Mikhailov–Shabat(ZMS)模型[11]，其作用量为

$$\mathscr{L} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left(\frac{1}{8\pi}\,\partial\mu\phi\partial^{\mu}\phi + \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi}\right]\right)\ , \tag{17}$$

其中β取为实数，而运动方程是

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi - 2\mathrm{i}\beta\pi\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi} - 2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi}\right] = 0\ .$$

一般而言，上述场方程所描述的是关于复场的理论. 由于存在简并的真空态，它将允许孤子解的存在. 可以通过令 $\mathrm{Re}\phi = \dfrac{2n\pi}{\beta}, n = 0, \pm 1, \cdots$，而使它变为只含一个场变量($\mathrm{Im}\phi$)的单场理论. 这样的场论与通常 twisted Affine Toda 中双变量的 $A_2^{(2)}$模型有着很大的不同.

现在，将 A_2的代数生成元表示为(取矩阵$(\mathrm{e}_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}$为基)

$$\begin{aligned}
&H_1 = e_{11} - e_{33} && && H_2 = e_{11} - 2e_{22} + e_{33} \\
&E_1 = e_{12} - e_{23} && E_2 = e_{31} && E_3 = e_{32} + e_{21} \\
&F_1 = e_{21} - e_{32} && F_2 = e_{13} && F_3 = e_{23} + e_{12}\ ,
\end{aligned} \tag{18}$$

代数基 e_{ij}满足以下关系

$$[e_{ij}, e_{kl}]_- = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}\ , \qquad \mathrm{tr}(e_{ij}e_{kl}) = \delta_{jk}\delta_{il}\ ,$$

则 ZMS 模型的 Lax pair 可表述为 [12]

$$U(x, t, \lambda) = \frac{\mathrm{i}\beta}{2}\partial_t\phi\,H_1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\beta\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\beta\phi}\left(\lambda^{-1}E_1 + \lambda F_1\right) - \sqrt{\pi}\,\beta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}\left(\lambda^{-1}E_2 + \lambda F_2\right)$$

$$V(x,t,\lambda)=\frac{i\beta}{2}\partial_x\phi H_1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta e^{\frac{i}{2}\beta\phi}\left(\lambda^{-1}E_1-\lambda F_1\right)+\sqrt{\pi}\beta e^{-i\beta\phi}\left(\lambda^{-1}E_2-\lambda F_2\right).\quad(19)$$

上式与文献 [12]的相比，我们已先作了一个规范变换$\Omega/(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^{-1/3}&&\\&1&\\&&\lambda^{1/3}\end{pmatrix}$. 然后再取$\lambda^{2/3}\to\lambda$. 而这过程并不改变模型的物理性质.

将 U 写为矩阵形式：

$$U(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{i\beta}{2}\partial_t\phi & -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta e^{\frac{i}{2}\beta\phi}\lambda^{-1} & -\sqrt{\pi}\beta e^{-i\beta\phi}\lambda\\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta e^{\frac{i}{2}\beta\phi}\lambda & 0 & \sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta e^{\frac{i}{2}\beta\phi}\lambda^{-1}\\ -\sqrt{\pi}\beta e^{-i\beta\phi}\lambda^{-1} & \sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta e^{\frac{i}{2}\beta\phi}\lambda & -\frac{i\beta}{2}\partial_t\phi\end{pmatrix}.\quad(20)$$

注意到，对任意 3×3 矩阵 F，如将它分解为

$$F_{3\times3}=F_d+F_1+F_2=\begin{pmatrix}F_{11}&&\\&F_{22}&\\&&F_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&F_{12}&0\\0&0&F_{23}\\F_{31}&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&F_{13}\\F_{21}&0&0\\0&F_{32}&0\end{pmatrix},$$

那么则有以下性质

$$\begin{array}{lll}F_1F_2\subset F_d & F_1F_1\subset F_2 & F_1F_d\subset F_1\\ F_2F_1\subset F_d & F_2F_2\subset F_1 & F_2F_d\subset F_2\\ F_dF_1\subset F_1 & F_dF_2\subset F_2 & F_dF_d\subset F_d\,.\end{array}$$

因此，如先将 U 按这方法分解为

$$U(x,t,\lambda)=U_d+U_1+U_2=u_d+u_1\lambda^{-1}+u_2\lambda,$$

然后再来求解$\partial_xT(x,y,\lambda)=U(x,\lambda)T(x,y,\lambda)$,那么采用 T在奇点λ附近的分解形式

$$T(x,y,\lambda)=[I+W(x,\lambda)]e^{Z(x,y,\lambda)}[I+W(y,\lambda)]^{-1}$$

后，直接计算可解得(将 W也按 F矩阵的方法分解)

$$0=\frac{dW_1}{dx}+[W_1,U_d]+W_1U_1W_2+W_1U_2W_1-U_2W_2-U_1$$

$$0=\frac{dW_2}{dx}+[W_2,U_d]+W_2U_2W_1+W_2U_1W_2-U_1W_1-U_2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=U_d+U_1W_2+U_2W_1\,.$$

(1)$|\lambda|\to 0$时

将 W_1, W_2, Z按λ的幂次展开为

$$W_1=\sum_{n=0}^{\infty}W_1^{(n)}\lambda^n\ ,\quad W_2=\sum_{n=0}^{\infty}W_2^{(n)}\lambda^n\ ,\quad Z=\sum_{n=-1}^{\infty}Z^{(n)}\lambda^n\ ,$$

则可求得其级数展开式各阶系数为

$$W_1^{(0)}=\begin{pmatrix}0 & -2^{-1/6}e^{\frac{i}{2}\beta\phi} & 0\\ 0 & 0 & 2^{-1/6}e^{-\frac{2}{3}i\pi}e^{\frac{i}{2}\beta\phi}\\ -2^{1/3}e^{\frac{2}{3}i\pi}e^{-i\beta\phi} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$W_2^{(0)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2^{-1/3}e^{-\frac{i\pi}{3}}e^{i\beta\phi}\\ 2^{1/6}e^{\frac{i\pi}{3}}e^{-\frac{i}{2}\beta\phi} & 0 & 0\\ 0 & 2^{1/6}e^{-\frac{i}{2}\beta\phi} & 0\end{pmatrix},$$

$$W_1^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{ie^{\frac{i}{2}\beta\phi}(\partial_x\phi-\partial_t\phi)}{2^{5/6}\sqrt{\pi}} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \dfrac{e^{\frac{5}{6}i\pi}e^{-i\beta\phi}(\partial_x\phi-\partial_t\phi)}{2^{1/3}\sqrt{\pi}} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$W_2^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dfrac{ie^{i\beta\phi}(\partial_x\phi-\partial_t\phi)}{2\sqrt{\pi}}\\ \dfrac{-ie^{-\frac{i}{2}\beta\phi}(\partial_x\phi-\partial_t\phi)}{2\sqrt{\pi}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\cdots=\cdots\ ,$$

$$(W_2^{(n+1)}\,u_1\quad W_2^{(0)}+W_2^{(0)}\,u_1W_2^{(n+1)})\,u_1W_2^{(0)}+u_1W_1^{(0)}\,u_1W_2^{(n+1)}=$$

$$-u_1\left\{\frac{\partial W_1^{(n)}}{\partial x}+[W_1^{(n)},u_d]+\sum_{k=0}^{n-1}W_1^{(k)}u_2W_1^{(n-1-k)}+\sum_{k=1}^{n}W_1^{(k)}u_1W_2^{(n+1-k)}-u_2W_2^{(n-1)}\right\}-$$

$$\left\{\frac{\partial W_2^{(n)}}{\partial x}+[W_2^{(n)},u_d]+\sum_{k=0}^{n-1}W_2^{(k)}u_2\,W_1^{(n-1-k)}+\sum_{k=1}^{n}W_2^{(k)}u_1W_2^{(n+1-k)}-u_2\delta_{n,1}\right\}u_1W_2^{(0)}$$

$$W_1^{(n+1)} = u_1^{-1}\left\{\frac{\partial W_2^{(n)}}{\partial x} + [W_2^{(n)}, u_d] + \sum_{k=0}^{n-1} W_2^{(k)} u_2 W_1^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n+1} W_2^{(k)} u_1 W_2^{(n+1-k)} - u_2 \delta_{n,1}\right\} \cdots = \cdots . \tag{21}$$

由此可得 Z 级数展开为

$$Z^{(-1)} = \int_y^x u_1 W_2^{(0)} \mathrm{d}x' = \begin{pmatrix} -2^{-1/3}\sqrt{\pi}\,\beta \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}\pi} & & \\ & 2^{-1/3}\sqrt{\pi}\,\beta & \\ & & -2^{-1/3}\sqrt{\pi}\,\beta \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{3}\pi} \end{pmatrix}(x-y)$$

$$Z^{(0)} = \int_y^x (u_d + u_1 W_2^{(1)})\, \mathrm{d}x' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\beta}{2} \int_y^x (\partial_{x'}\phi)\, \mathrm{d}x'$$

$$Z^{(1)} = \int_y^x (u_1 W_2^{(2)} + u_2 W_1^{(0)})\, \mathrm{d}x' =$$

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int_y^x \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{3}\pi}[\beta(\partial_x\phi - \partial_t\phi)^2 + 4\mathrm{i}\partial_x(\partial_x\phi - \partial_t\phi) - 4\beta\pi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})]}{3\cdot 2^{5/3}\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x' & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\int_y^x \frac{-\beta(\partial_x\phi - \partial_t\phi)^2 + 2\mathrm{i}\partial_x(\partial_x\phi - \partial_t\phi) + 4\beta\pi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})}{3\cdot 2^{5/3}\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x' & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\int_y^x \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}\pi}[\beta(\partial_x\phi - \partial_t\phi)^2 - 2\mathrm{i}\partial_x(\partial_x\phi - \partial_t\phi) - 4\beta\pi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})]}{3\cdot 2^{5/3}\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x' \end{pmatrix} \cdots = \cdots$$

$$Z^{(n)} = \int_y^x (u_1 W_2^{(n+1)} + u_2 W_1^{(n-1)})\, \mathrm{d}x' \cdots = \cdots . \tag{22}$$

(2) $|\lambda| \to \infty$ 时

可以通过 U 矩阵的性质将它与 $|\lambda| \to 0$ 的结果对应起来. 对 U 而言，有以下性质(其中矩阵上标"∧"表示对矩阵进行 $\partial_t \to -\partial_t$ 的代换)

$$\Omega(a) U(x,t,\lambda) \Omega^{-1}(a) = \hat{U}(x,t,a\lambda^{-1}) ,$$

$$\Omega(a) = \begin{pmatrix} & & a^{-1} \\ & -1 & \\ a & & \end{pmatrix} , \qquad a^3 = 1 . \tag{23}$$

显然，对于 T 而言，有

$$\Omega(a) T(x,y,t,\lambda) \Omega^{-1}(a) = \hat{T}(x,y,t,a\lambda^{-1}) ,$$

所以，在 $|\lambda| \to \infty$ 时

$$T(x,y,t,\lambda) = \Omega^{-1}(a)\,\hat{T}(x,y,t,a\lambda^{-1})\,\Omega(a) =$$

$$\Omega^{-1}(a)[I+\hat{W}(x,a\lambda^{-1})]\mathrm{e}^{\hat{Z}(x,y,a\lambda^{-1})}[I+\hat{W}(y,a\lambda^{-1})]^{-1}\Omega(a)\ ,$$

这就可直接利用 $|\lambda|\to 0$时解得的结果(21)与(22)式.

在准周期边界条件下[13],直接使用运动积分生成函数 $F_L=\ln\{\mathrm{tr}T_L Q(\theta)\}$,此时的 $Q(\theta)=\mathrm{diag}\{1,\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi q}{\beta}},\ 1\}$,其中 $q=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-L}^{L}\partial_x\phi\,\mathrm{d}x=0,\ \pm 1,\cdots$为拓扑荷. 则在$\lambda\to 0^+$时,$\exp[Z]$矩阵中相对于(2,2)项而言,其它项的贡献可忽略. 即

$$F_L=\ln\{\mathrm{tr}\,T_L\,Q(\theta)\}=\sum_{n=-1}^{\infty}Z_{22}^{(n)}\lambda^n+\frac{\mathrm{i}\pi q}{\beta}=2^{-1/3}\beta\sqrt{\pi}\cdot 2L\lambda^{-1}+\frac{\mathrm{i}\pi q}{\beta}+$$

$$\int_{-L}^{L}\frac{-\beta(\partial_x\phi-\partial_t\phi)^2+2\mathrm{i}\partial_x(\partial_x\phi-\partial_t\phi)+4\beta\pi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})}{3\cdot 2^{5/3}\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x\lambda+\cdots\ .$$

同理,可解得$\lambda\to+\infty$时的运动积分(取 $a=1$)

$$F'_L=2^{-1/3}\beta\sqrt{\pi}\cdot 2L\lambda+\frac{\mathrm{i}\pi q}{\beta}+$$

$$\int_{-L}^{L}\frac{-\beta(\partial_x\phi+\partial_t\phi)^2+2\mathrm{i}\partial_x(\partial_x\phi+\partial_t\phi)+4\beta\pi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})}{3\cdot 2^{5/3}\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x\lambda^{-1}+\cdots\ .$$

显然,它们的线性组合也为守恒的运动积分,其中有拓扑荷,能量及动量等物理量:

$$q=\frac{\beta}{2\mathrm{i}\pi}(I_0+I'_0)=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-L}^{L}\partial_x\phi\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\mathscr{H}=\frac{-3.2^{-7/3}}{\sqrt{\pi}\,\beta}(I_1+I'_1)=\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x\left[\frac{1}{8\pi}((\partial_x\phi)^2+(\partial_t\phi)^2)-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})\right]\ ,$$

$$p=\frac{-3.2^{-7/3}}{\sqrt{\pi}\,\beta}(I_1-I'_1)=-\int_{-L}^{L}\frac{1}{4\pi}\partial_x\phi\partial_t\phi\mathrm{d}x\ ,$$

其中 I_i 表示 F_L中λ的 i 次幂项的系数,I'_i表示 F'_L中λ的 $-i$ 次幂项的系数.

4 边界不相关条件下的 ZMS 模型

定义于 $[x_-,x_+]$区间、边界不相关条件下的 ZMS 模型作用量可写为

$$\mathscr{L}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\left\{\theta(x-x_-)\theta(x_+-x)\left[\frac{1}{8\pi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})\right]-\right.$$

$$\left.\delta(x-x_-)V_-(\phi(x_-))-\delta(x-x_+)V_+(\phi(x_+))\right\}\ .$$

此时的运动方程为

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t^2-\partial_x^2)\phi-2\mathrm{i}\beta\pi[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi}-2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi}]=0 \quad x_-<x<x_+ ,\\
&\partial_x\phi=-4\pi\partial_\phi V_+(\phi) \quad x=x_+ ,\\
&\partial_x\phi=4\pi\partial_\phi V_-(\phi) \quad x=x_- .
\end{aligned}
\tag{24}
$$

由(I)部分可知，如选(1)式为运动积分生成函数，则$K_\pm$的演化方程为

$$
\begin{aligned}
&\partial_t K_+(t,\alpha)-V(x_+,t,-\alpha+\delta)K_+(t,\alpha)+K_+(t,\alpha)V(x_+,t,\alpha)=0 ,\\
&\partial_t K_-(t,\alpha)-V(x_-,t,\alpha)K_-(t,\alpha)+K_-(t,\alpha)V(x_-,t,-\alpha+\delta)=0 .
\end{aligned}
\tag{25}
$$

显然，在 $K_\pm$ 为不含时间的普通数时，行列式相等所给出的要求是

$$\delta=\mathrm{i}\pi , \quad \delta=\frac{\mathrm{i}}{3}\pi , \quad \delta=-\frac{\mathrm{i}}{3}\pi .$$

注意到，取 $a=1$ 时，(23)式中的Ω对 U,V的性质为

$$U^t(x,\lambda)=U(x,\lambda^{-1})=-\Omega^{-1}U(x,-\lambda)\Omega ,$$

$$V^t(x,\lambda)=V(x,-\lambda^{-1})=-\Omega^{-1}V(x,-\lambda)\Omega ,$$

而这正是第二节中用以证明(1)式等价于(2)式的条件，所以可以直接应用第二节的结论. 为了方便地得到 $K_\pm$的代数表示式，先用(2)式计算$\tilde{K}_+$. 由(I)部分 $\tilde{K}_\pm(\lambda)$的演化方程及(1)，(2)式对应关系$\delta'=\delta+\mathrm{i}\pi$可知

$$V^t(x,\lambda^{-1})\tilde{K}_+(\lambda)+\tilde{K}_+(\lambda)V(x,\lambda)=0 .$$

因此，如将 $\tilde{K}_+$ 按 A_2的代数生成元及单位矩阵展开

$$\tilde{K}_+(\lambda)=D_I I+D_{H_1}H_1+D_{H_2}H_2+D_{E_1}E_1+D_{E_2}E_2+D_{E_3}E_3+D_{F_1}F_1+D_{F_2}F_2+D_{F_3}F_3 ,$$

则最后可得

$$
\begin{aligned}
&D_{H_1}=D_{E_3}=D_{F_3}=0\\
&\frac{\mathrm{i}\beta}{2}\partial_x\phi D_{E_1}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\beta\phi}(3\lambda^{-1}D_{H_2}+\lambda D_{F_2})-\sqrt{\pi}\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}\lambda D_{F_1}=0\\
&\frac{\mathrm{i}\beta}{2}\partial_x\phi D_{F_1}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\beta\phi}(\lambda^{-1}D_{E_2}+3\lambda D_{H_2})-\sqrt{\pi}\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}\lambda^{-1}D_{E_1}=0\\
&\mathrm{i}\beta\partial_x\phi(D_I+D_{H_2})-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\beta\phi}(\lambda^{-1}D_{F_1}+\lambda D_{E_1})+\sqrt{\pi}\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}(\lambda D_{E_2}+\lambda^{-1}D_{F_2})=0 .
\end{aligned}
\tag{26}
$$

由于前面已假定 $\tilde{K}_+$ 中不含场量，所以 $\mathrm{i}\partial_x\phi$关于ϕ的展开式应该为以下形式：

$$\mathrm{i}\partial_x\phi=A_1\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\beta\phi}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}+A_3 ,$$

其中 A_i，$i=1,2,3$ 为与场量无关的普通数. 但仔细分析后可知 $A_3=0$. 将这展开式代入

方程(26)后,可解得:

(1) 平凡边界条件 $A_1 = A_2 = 0$

$$D_I = 1\ ,\quad \text{其它}\ D_i = 0\ . \tag{27}$$

(2) 非平凡边界条件(i):$A_1 = 0\ ,\quad A_2 \neq 0$ 则

$$D_{H_2} = -\frac{A_2}{3}B\ ,\quad D_{E_2} = A_2\lambda^2 B$$

$$D_{F_2} = A_2\lambda^{-2}B\ ,\quad D_I = \left[\frac{A_2}{3} - \sqrt{\pi}\,(\lambda^3 + \lambda^{-3})\right]B$$

$$\text{其它}\quad D_i = 0\ , \tag{28}$$

其中 B 为任意常数,即

$$\tilde{K}_+(\lambda) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\pi}\,(\lambda^3 + \lambda^{-3}) & 0 & A_2\lambda^{-2} \\ 0 & A_2 - \sqrt{\pi}\,(\lambda^3 + \lambda^{-3}) & 0 \\ A_2\lambda^2 & 0 & -\sqrt{\pi}\,(\lambda^3 + \lambda^{-3}) \end{pmatrix} B\ . \tag{29}$$

(3) 非平凡边界条件(ii):$A_1 \neq 0\ ,\quad A_2 = \pm 2\sqrt{\pi}$

$$D_{H_2} = \frac{1}{3}\,\frac{2\pi - A_1^2}{\sqrt{2\pi}}\,(\lambda^2 \pm \lambda^{-1})B' \quad D_I = \left[\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\lambda^3 + \lambda^{-3}) - \frac{2\pi - A_1^2}{3\cdot\sqrt{2\pi}}\right](\lambda^2 \pm \lambda^{-1})\,B'\ ,$$

$$D_{E_1} = \pm\lambda(\lambda^3 + \lambda^{-3})\,A_1B' \quad D_{E_2} = \left\{-\lambda^2\cdot\frac{2\pi - A_1^2}{\sqrt{2\pi}}\,(\lambda^2 \pm \lambda^{-1}) - \lambda\,\frac{A_1^2}{\sqrt{2\pi}}\,(\lambda^3 + \lambda^{-3})\right\}B',$$

$$D_{F_1} = (\lambda^3 + \lambda^{-3})\,A_1B' \quad D_{F_2} = \left\{-\lambda^{-2}\cdot\frac{2\pi - A_1^2}{\sqrt{2\pi}}\,(\lambda^2 \pm \lambda^{-1}) \mp \frac{A_1^2}{\sqrt{2\pi}}\,(\lambda^3 + \lambda^{-3})\right\}B', \tag{30}$$

其中 B' 为不含场量的普通数.

对于 K_- 与 x_- 点边界条件的求解,可以通过对比 $K_\pm$ 之间的演化方程(25)方便地得到.由于 $K_-^{-1}(t,\alpha)$ 与 $K_+(t,\alpha)$ 的演化方程相似(仅在于坐标点 $x_\pm$ 的差异),所以可直接借用(27)—(30)的结果:只需将 A_1、A_2 用另两个任意参量 A'_1、A'_2 代换(代表了 $x_\pm$ 上性质的差异),即可得到 $K_-^{-1}(t,\alpha)$ 与边界条件. 此时 $K_-(t,\alpha)$ 也就自然得到了.

显然,平凡边界条件1可以归入非平凡边界(2)的表示范围. 我们将在条件(2)下验证生成函数是否产生无穷多运动积分中、且其中有一项是系统的哈密顿量.

如取 $\mathrm{tr}\{K_+(\lambda)T(x_+,x_-,\lambda)K_-(\lambda)T^{-1}(x_+,x_-,-\lambda^{-1})\}$ 为运动积分生成函数. 则 $\lambda \to 0^+$ 时,由其更明显的形式可得

$$P = \ln\mathrm{tr}\{K_+(\lambda)T(x_+,x_-,\lambda)K_-(\lambda)T^{-1}(x_+,x_-,-\lambda^{-1})\} =$$

$$\ln\mathrm{tr}\{[\Omega\tilde{K}_+(\lambda)]\ T(x_+,x_-,\lambda)[\tilde{K}_-(\lambda)\Omega^{-1}][\Omega^{-1}\hat{T}^{-1}(x_+,x_-,-\lambda)\Omega]\} =$$

$$\ln\mathrm{tr}\{\tilde{K}_+(\lambda)[I + W(x_+,\lambda)]\mathrm{e}^{Z(x_+,x_-,\lambda)}\ [I + W(x_-,\lambda)]^{-1}$$

$$\tilde{K}_{-}(\lambda)[I+\hat{W}(x_{-},-\lambda)]\,\mathrm{e}^{-\hat{Z}(x_{+},x_{-},-\lambda)}\,[I+\hat{W}(x_{+},-\lambda)]^{-1}\}=$$

$$\ln\operatorname{tr}\{\ \square\ \mathrm{e}^{Z(x_{+},x_{-},\lambda)}\ \ \triangle\ \mathrm{e}^{-\hat{Z}(x_{+},x_{-},-\lambda)}\}\ ,$$

其中□与△分别是 e^{Z}, $\mathrm{e}^{-\hat{Z}}$间的矩阵积. 在以上演算过程中，已用了 $\tilde{K}_{\pm}$, $K_{\pm}$的关系式(12). 由 $Z^{(-1)}$的表示式可见，在$\lambda\to0^{+}$时，相对于 $\exp[Z_{22}]$与 $\exp[-\hat{Z}_{22}]$的共同贡献项而言，其它项可以忽略. 即

$$P=\ln(\square_{22})+\sum_{n=-1}^{\infty}Z_{22}^{(n)}(x_{+},x_{-})\lambda^{n}+\ln(\triangle_{22})-\sum_{n=-1}^{\infty}\hat{Z}_{22}^{(n)}(x_{+},x_{-})(-\lambda)^{n}=$$

$$\ln\left\{-1-\frac{\beta\partial_{x}\phi\partial_{t}\phi-\mathrm{i}\partial_{x}\partial_{t}\phi}{3\cdot2^{-2/3}\beta\pi}\lambda^{2}+o(\lambda^{3})\right\}\Bigg|_{x=x_{+}}+\sum_{n=-1}^{\infty}Z_{22}^{(n)}(x_{+},x_{-})\lambda^{n}+$$

$$\ln\left\{-1+\frac{\beta\partial_{x}\phi\partial_{t}\phi-\mathrm{i}\partial_{x}\partial_{t}\phi}{3\cdot2^{-2/3}\beta\pi}\lambda^{2}+o(\lambda^{3})\right\}\Bigg|_{x_{-}}-\sum_{n=-1}^{\infty}\hat{Z}_{22}^{(n)}(x_{+},x_{-})(-\lambda)^{n}=$$

$$2^{2/3}\sqrt{\pi}\,\beta(x_{+}-x_{-})\lambda^{-1}-$$

$$\frac{2^{7/3}\sqrt{\pi}\,\beta}{3}\left\{\int_{x_{-}}^{x_{+}}\mathrm{d}x\left[\frac{1}{8\pi}((\partial_{x}\phi)^{2}+(\partial_{t}\phi)^{2})-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})\right]-\frac{\mathrm{i}\partial_{x}\phi}{4\pi\beta}\Bigg|_{x_{-}}^{x_{+}}\right\}\cdot\lambda+O(\lambda^{3})\ .\tag{31}$$

上式中已在边界点上使用过边界条件

$$\mathrm{i}\partial_{x}\phi|_{x_{+}}=A_{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}|_{x_{+}}\ ;\quad \mathrm{i}\partial_{x}\phi|_{x_{-}}=A_{2}'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}|_{x_{-}}$$

以简化运算，并得到λ^{2}阶的系数为零. 在方程(31)中将边界条件还原后可得此时边界点的哈密顿量(I_1为 P 中λ项的系数)

$$\mathscr{H}=-\frac{3}{2^{7/3}\sqrt{\pi}\,\beta}I_{1}=$$

$$\int_{x_{-}}^{x_{+}}\mathrm{d}x\left[\frac{1}{8\pi}((\partial_{x}\phi)^{2}+(\partial_{t}\phi)^{2})-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\phi})\right]-\frac{\mathrm{i}\partial_{x}\phi}{4\pi\beta}\Bigg|_{x_{-}}^{x_{+}},$$

而边界不相关条件引入的哈密顿边界修正值为

$$x=x_{+}:\quad V_{+}(\phi)=-\frac{A_{2}}{4\pi\beta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}\Bigg|_{x=x_{+}}\ ,$$

$$x=x_{-}:\quad V_{-}(\phi)=\frac{A_{2}'}{4\pi\beta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\phi}\Bigg|_{x=x_{-}}\ .\tag{32}$$

对此，显然有以下关系：

$$\frac{\partial\phi}{\partial_{x_{\pm}}}=\mp4\pi\partial_{\phi}V_{\pm}(\phi)\ ,$$

而这正是前面导出的边界方程.

对照准周期边界条件下运动积分的产生方法，可以发现，在(31)式中，其奇数阶的系数将不会为0，它一定表示为“bulk”积分(与准周期条件时的形式相同)加上$x_\pm$边界点的修正值. 因此，与准周期边界条件相比，此时虽然少了一组无穷多运动积分，但是依然可以保证系统的完全可积性.

5 结论

在本文中，首先证明了在Affine Toda场论中，(I)部分得到的生成函数(1)，(2)形式是可以通过一个规范变换联系在一起的；在实耦合常数、实谱参量的条件下，它们也与(3)形式等价. 然后证明了P. Bowcock[4]的方法等价于我们的(3)式，但它只能适用于实耦合常数、实谱参量的条件. 我们所得到的(1)，(2)形式可应用于所有的Affine Toda场论中.

然后，具体研究了ZMS模型，求出了它在准周期性边界条件下的无穷多运动积分，以及不相关边界条件下的可积边界条件与$K_\pm$矩阵. 最后，通过具体计算此时的运动积分，发现确实存在一组无穷多运动积分，而其中的一项正是系统的哈密顿. 这表明在取合适的不相关边界条件时，系统依然可以是完全可积的. 因此我们所得到的运动积分生成函数是有效的.

参考文献

[1] Ghoshal S, Zamolodchikov A B. Int. J. Mod. Phys., 1994. **A9**:3841—3885

[2] Macintyre A. Integrable Boundary Conditions for Classical Sine-Gordon Theory. Durham Preprint DTP / 94—**39**:hep-th / 9410026

[3] Sklyanin E K. Funct. Anal. Appl., 1987, **21**:164—166; J. Phys., 1988, **A21**:2375—2389

[4] Bowcock P, Corrigan E, Dorey P E et al. Nucl. Phys., 1995, **B445**:469—500

[5] Chen Yixin, Luo Xudong. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, **22**(5): 413
(陈一新，罗旭东. 高能物理与核物理，1998，**22**(5):413)

[6] Sasaki R. Nucl. Phys., 1992, **B383**:291—305

[7] Mikhailov A V, Olshanetsky M A, Perelomov A M. Commun. Math. Phys., 1981, **79**:473

[8] Zamolodchikov A B. Int. J. Mod. Phys., 1988, **A3**:743—750

[9] Hollwood T. Nucl. Phys., 1992, **B384**:523—540; Olive D I, Turok N, Underwood J W R. Nucl. Phys., 1993, **B401**:663—697

[10] Evans J M. Nucl. Phys., 1993, **B390**:225—250; Zhu Z, Caldi K J. Nucl. Phys., 1995, **B436**:659—678

[11] Smirnov F A. J. Mod. Phys., 1991, **A6**:1407—1428; Efthimiou C J. Nucl. Phys., 1993, **B398**:697—740

[12] Chen Y X, Yang H X, Sheng Z M. Phys. Lett., 1995, **B345**:149—154

[13] Faddeev L D, Takhtajan A B. Hamitonian Methods in the Theory of Solition. Springer Verlag 1987

Infinite Number of Integrals of Motion in Classically Integrable System With Boundary (II) *

Chen Yixin[1]　　Luo Xudong[1,2]

1 (*Zhejiang Institute of Modern Physics and Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

2(*Institute of Theoretical Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract In Affine Toda field theory, links among three generating functions for integrals of motion derived from Part (I) are studied, and some classically integrable boundary conditions are obtained. An infinite number of integrals of motion are calculated in ZMS model with quasi-periodic condition. We find the classically integrable boundary conditions and $K_{\pm}$ matrices of ZMS model with independent boundary conditions on each end. It is identified that an infinite number of integrals of motion does exist and one of them is the Hamiltonian, so this system is completely integrable.

Key words an infinite number of integrals of motion, classically integrable boundary conditions, Affine Toda field theory, ZMS model

---

Received 9 June 1997

* Supported by the National Natural Science Foundation of China