第22卷 第3期
1998 年3月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.22, No.3
Mar., 1998

与量子输运方程相一致的夸克经典输运方程*

陈相君 张卫宁 霍 雷 刘亦铭

(哈尔滨工业大学物理系 哈尔滨 150001)

摘要 用$S^{\mu\nu}$作为描述夸克自旋的动力学变量建立了它的经典输运方程,并讨论了该方程与量子输运方程的一致性. 通过一致性的比较探讨了经典分布函数在色空间和自旋空间的一些特性.

关键词 夸克 输运方程 色空间 自旋空间

1 引言

夸克胶子等离子体(简称 QGP)是高能物理的一个重要研究领域. 目前,许多物理学家从事 QGP 输运特性的研究. 输运方程是研究 QGP 输运的基础,它包括夸克和胶子的输运方程. 对于夸克,通常人们在经典和量子两种情况下建立它的输运方程[1,2]. 夸克的量子输运方程比较复杂,包含的物理信息多,即使是在半经典近似的情况下[3],它也保留了一定的量子效应,较全面地反映了 QGP 的物理特性. 夸克的经典输运方程是在 QGP 的经典模型基础上建立的,经典模型比较直观,忽略了 QGP 的量子效应. 因此,夸克的经典输运方程包含的物理内容比夸克的量子输运方程少. 本文用$S^{\mu\nu}$描述夸克的自旋建立它的经典输运方程,通过该经典输运方程和量子输运方程的比较,探讨 QGP 的经典模型有哪些不足,丢掉了哪些东西,然后对经典模型进行修正,使经典模型更加完善.

2 以$S^{\mu\nu}$为变量的夸克经典输运方程

考虑 QGP 是一个经典物理系统,夸克是经典相对论带色粒子,在胶子场中运动,描述夸克的动力学变量取坐标x^{μ},动量p^{μ},色荷Q^{a}和自旋张量$S^{\mu\nu}$(反对称张量). 夸克的整体行为由单粒子分布函数来描述,它是动力学变量的函数, $f=f(x, p, Q, S)$, 它表示相空间中在给定时空点附近发现夸克的几率密度.

1997-03-13收稿

* 国家自然科学基金, 黑龙江省自然科学基金资助

241—246

用 $S^{\mu\nu}$描述夸克的自旋建立它的经典输运方程时，需要先求出 $S^{\mu\nu}$随固有时的变化．和文献 [1,2]求夸克协变运动方程的方法一样，得到[4]

$$m\frac{\mathrm{d}S^{\mu\nu}}{\mathrm{d}\tau}=gQ_a[F^{\mu}_{a\lambda}S^{\lambda\nu}-F^{\nu}_{a\lambda}S^{\lambda\mu}]. \tag{1}$$

这时夸克的经典输运方程为

$$\begin{aligned}p^{\mu}\partial_{\mu}f(x,\ p,\ Q,\ S)=&[gQ^ap^{\mu}F^{a}_{\mu\nu}-g(D_{\nu}S^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})^aQ^a]\partial_p^{\nu}f(x,\ p,\ Q,\ S)+\\&[gf_{abc}(p^{\mu}A^b_{\mu}+\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}F^{b}_{\alpha\beta})Q_c]\partial^a_Qf(x,\ p,\ Q,\ S)-\\&[gQ_a(F^a_{\mu\lambda}S^{\lambda}_{\nu}-F^{a}_{\nu\lambda}S^{\lambda}_{\mu})]\partial_S^{\mu\nu}f(x,\ p,\ Q,\ S)+C(x,\ p,\ Q,\ S),\end{aligned} \tag{2}$$

其中$\partial_p^{\nu}=\dfrac{\partial}{\partial_{p\nu}}$，$\partial_Q^a=\dfrac{\partial}{\partial Q^a}$，$\partial_S^{\mu\nu}=\dfrac{\partial}{\partial S_{\mu\nu}}$ ．$C(x,\ p,\ Q,\ S)$是描述两体碰撞项．

3 经典输运方程和量子输运方程的一致性

把 QGP 看作 QCD 系统，用 Wigner 算符描述夸克，可得到夸克的量子输运方程[1,2]．它很复杂，一般对它取半经典近似后，才能看清它的物理意义．文献 [3]讨论了它的半经典极限，给出它的半经典输运方程为

$$\begin{aligned}p^{\mu}D_{\mu}W(x,p)=&-\frac{g}{2}p^{\mu}\partial_p^{\nu}\{F_{\mu\nu},\ W(x,p)\}+\frac{\mathrm{i}g}{4}[\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu},\ W(x,p)]+\\&\frac{g}{8}\{D_{\nu}\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},\ \partial_p^{\nu}\ W(x,p)\}.\end{aligned} \tag{3}$$

在取半经典极限的过程中，$W(x,p)$仍然还是矩阵(在色空间是 3×3 矩阵，在旋量空间是 4×4 矩阵)形式，色荷和自旋张量也是矩阵，所以它是一个矩阵方程，经典输运方程还不能和它直接比较．由于 $W(x,p)$、色荷和自旋张量都是矩阵，$W(x,p)$与色荷和自旋张量不对易，方程中还含有对易括号和反对易括号，这需要进一步化简．文献 [3] 做了这一工作，在色空间和自旋空间对它进行展开，得到了分量形式的方程．在这些方程中，关于色单态自旋标量和色单态自旋张量方程是

$$p^{\mu}\partial_{\mu}B_0=gp^{\mu}F^{a}_{\mu\nu}\partial_p^{\nu}B_a-\frac{g}{2}(D_{\nu}F_{\alpha\beta})^a\partial_p^{\nu}T^{\alpha\beta}_a, \tag{4}$$

$$p^{\mu}\partial_{\mu}T^{\lambda\rho}_0=gp^{\mu}F^a_{\mu\nu}\partial_p^{\nu}T^{\lambda\rho}_a-\frac{g}{2}(D_{\nu}F_{\alpha\beta})^a\partial_p^{\nu}W^{\alpha\beta,\lambda\rho}_a+g(F^{\lambda\sigma}_aT^{\alpha\rho}_{\sigma}-F^{\rho\sigma}_aT^{\alpha\lambda}_{\sigma}), \tag{5}$$

其中

$$B_0=\mathrm{Tr}\ \mathrm{tr}\ W,\ B_a=\mathrm{Tr}\ \mathrm{tr}\ (Q^aW),\ T^{\alpha\beta}_a=\mathrm{Tr}\ \mathrm{tr}\ (WQ_aS^{\alpha\beta}), \tag{6}$$

$$T^{\alpha\beta}_0=\mathrm{Tr}\ \mathrm{tr}\ (WS^{\alpha\beta}),\ W^{\alpha\beta,\lambda\rho}_a=\mathrm{Tr}\ \mathrm{tr}\left(WQ_a\frac{\{S^{\alpha\beta},\ S^{\lambda\rho}\}}{2}\right). \tag{7}$$

以及色八重态自旋标量和色八重态自旋张量方程为

$$p^{\mu}\partial_{\mu}B_a=gp^{\mu}F^b_{\mu\nu}\partial_p^{\nu}B_{ab}-\frac{g}{2}(D_{\nu}F_{\alpha\beta})^b\partial_p^{\nu}T^{\alpha\beta}_{ab}-gf_{abd}p^{\mu}A^b_{\mu}B_c-\frac{g}{2}f_{abc}F^{b}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_c, \tag{8}$$

$$p^\mu \partial_\mu T_a^{\lambda\rho} = g p^\mu F_{\mu\nu}^b \partial_p^\nu T_{ab}^{\lambda\rho} - \frac{g}{2}(D_\nu F_{\alpha\beta})^b \partial_p^\nu W_{ab}^{\alpha\beta,\lambda\rho} - g f_{abc} p^\mu A_\mu^b T_c^{\lambda\rho} -$$

$$\frac{g}{2} f_{abc} F_{\alpha\beta}^b W_c^{\alpha\beta,\lambda\rho} + g(F_{b\nu}^\lambda T_{ab}^{\nu\rho} - F_{b\nu}^\rho T_{ab}^{\nu\lambda}) -$$

$$\frac{g}{2}(D_\nu F_{\alpha\beta})^b \partial_p^\nu \mathrm{Tr\ tr}\left(W \frac{[S^{\alpha\beta}, S^{\lambda\rho}]}{2} \frac{[Q^a, Q^b]}{2}\right). \tag{9}$$

其中

$$B_{ab} = \mathrm{Tr\ tr}\ (W\frac{\{Q^a, Q^b\}}{2}),\ T_{ab}^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr\ tr}\left(W\frac{\{Q^a, Q^b\}}{2} S^{\alpha\beta}\right), \tag{10}$$

$$W_{ab}^{\alpha\beta,\lambda\rho} = \mathrm{Tr\ tr}\ (W\{Q^a, Q^b\}\{S^{\alpha\beta}, S^{\lambda\rho}\} / 4)\ , \tag{11}$$

$$\frac{g}{2}(D_\nu F_{\alpha\beta})^b \partial_p^\nu\ \mathrm{Tr\ tr}\left(W\frac{[S^{\alpha\beta}, S^{\lambda\rho}]}{2} \frac{[Q^a, Q^b]}{2}\right) =$$

$$\frac{g}{4} f_{abc}[(D_\nu F_\sigma^\lambda)^b \partial_p^\nu\ T_c^{\sigma\rho} - (D_\nu F_\sigma^\rho)\partial_p^\nu\ T_c^{\sigma\lambda}]\ . \tag{12}$$

这些方程是一组方程，经典输运方程是一个方程，要从经典输运方程得到和这些方程相对应的方程并和它们一致，对经典输运方程还要进行处理．首先，考虑经典色荷仍保持非阿贝尔特性，自旋张量分量之间也保持不可对易性，单粒子分布函数和色荷与自旋张量有关，它与色荷和自旋张量不对易．这样，经典分布函数和色荷或自旋张量的乘积就和顺序有关．在上节建立经典输运方程时，并没有考虑乘积顺序问题，而把经典输运方程直接写成了(2)式形式．现在要考虑乘积顺序，色荷和自旋张量与分布函数相乘，就有左乘和右乘之分．在(2)式给出的经典输运方程中，把色荷和自旋张量写在了分布函数的左边，它实际上是左乘形式的方程．还应有一种右乘形式的方程，即把色荷和自旋张量写在分布函数的右边．在(2)式中，把色荷、自旋张量和分布函数交换顺序，得到右乘形式的方程为

$$p^\mu \partial_\mu f(x,p,Q,S) = \partial_p^\nu f(x, p, Q, S)[g Q^a p^\mu F_{\mu\nu}^a - g(D_\nu S^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})^a Q^a] +$$

$$\partial_Q^a f(x, p, Q, S)[g f_{abc}(p^\mu A_\mu^b + \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^b) Q_c] -$$

$$\partial_S^{\mu\nu} f(x, p, Q, S)[g Q_a (F_{\mu\lambda}^a S_\nu^\lambda - F_{\nu\lambda}^a S_\mu^\lambda)] + C(x, p, Q, S). \tag{13}$$

在分量形式的方程中，(4)，(5)，(8)，(9)式给出的是色单态自旋标量 B_0等一些物理量的方程，这些物理量是坐标和动量的函数．利用单粒子分布函数求相对应的物理量，需要在色空间和自旋空间做积分，这和数理统计中求边缘分布的方法相似．由于色荷和自旋张量不是普通数，在色空间和自旋空间做积分会出现新的特点．通过半经典输运方程和经典输运方程一致性的讨论，可找出这些新的特点．

对于左乘形式的方程，用色荷或自旋张量或二者之积左乘它然后在色空间和自旋空间积分；对于右乘形式的方程则反之．把得到的这些方程适当地组合，当

$$\int Q^a Q^b f \mathrm{d}Q \mathrm{d}S = \int Q^b f Q^a \mathrm{d}Q \mathrm{d}S = \int f Q^a Q^b \mathrm{d}Q \mathrm{d}S,$$

$$\int Q^a f \mathrm{d}Q \mathrm{d}S = \int f Q^a \mathrm{d}Q \mathrm{d}S,\quad \int S^{\alpha\beta} f \mathrm{d}Q \mathrm{d}S = \int f S^{\alpha\beta} \mathrm{d}Q \mathrm{d}S,$$

$$\int S^{\alpha\beta} S^{\lambda\rho} f \mathrm{d}Q\mathrm{d}S = \int S^{\lambda\rho} f S^{\alpha\beta} \mathrm{d}Q\mathrm{d}S = \int f S^{\alpha\beta} S^{\lambda\rho} \mathrm{d}Q\mathrm{d}S \tag{14}$$

时，有

$$p^{\mu}\partial_{\mu} f_0^0 = g p^{\mu} F_{\mu\nu}^a \partial_p^{\nu} f_a^0 - \frac{g}{2}(D_{\nu} F_{\alpha\beta})^a \partial_p^{\nu} f_a^{\alpha\beta} , \tag{15}$$

$$p^{\mu}\partial_{\mu} f_0^{\lambda\rho} = g p^{\mu} F_{\mu\nu}^a \partial_p^{\nu} f_a^{\lambda\rho} - \frac{g}{2}(D_{\nu} F_{\alpha\beta})^a \partial_p^{\nu} f_a^{\lambda\rho,\, \alpha\beta} + g(F_{a\sigma}^{\lambda} f_a^{\sigma\rho} - F_{a\sigma}^{\rho} f_a^{\sigma\lambda}) , \tag{16}$$

$$p^{\mu}\partial_{\mu} f_a^0 = g p^{\mu} F_{\mu\nu}^b \partial_p^{\nu} f_{ab}^0 - \frac{g}{2}(D_{\nu} F_{\alpha\beta})^b \partial_p^{\nu} f_{ab}^{\alpha\beta} - g f_{abd} p^{\mu} A_{\mu}^b f_c^0 - \frac{g}{2} f_{abc} F_{\alpha\beta}^b f_c^{\alpha\beta} , \tag{17}$$

$$p^{\mu}\partial_{\mu} f_a^{\lambda\rho} = g p^{\mu} F_{\mu\nu}^b \partial_p^{\nu} f_{ab}^{\lambda\rho} - \frac{g}{2}(D_{\nu} F_{\alpha\beta})^b \partial_p^{\nu} f_{ab}^{\alpha\beta,\, \lambda\rho} - g f_{abc} p^{\mu} A_{\mu}^b f_c^{\lambda\rho} - \frac{g}{2} f_{abc} F^b_{\alpha\beta} f_c^{\alpha\beta,\lambda\rho} +$$

$$+ g(F_{b\sigma}^{\lambda} f_{ab}^{\sigma\rho} - E_{b\sigma}^{\rho} f_{ab}^{\sigma\lambda}) - \frac{g}{2}(D_{\nu} F_{\alpha\beta})^b \partial_p^{\nu} \int f \frac{[S^{\alpha\beta},\ S^{\alpha\beta}]}{2} \frac{[Q^a,\ Q^b]}{2} \mathrm{d}Q\mathrm{d}S, \tag{18}$$

其中

$$f_0^0(x,p) = \int f(x,\ p,Q,S)\mathrm{d}Q\mathrm{d}S,\ f_a^0(x,p) = \int Q^a f(x,p,Q,S)\mathrm{d}Q\mathrm{d}S,$$

$$f_0^{\mu\nu}(x,p) = \int S^{\mu\nu} f(x,p,Q,S)\mathrm{d}Q\mathrm{d}S,\quad f_a^{\mu\nu} = \int Q^a S^{\mu\nu} f \mathrm{d}Q\mathrm{d}S,$$

$$f_{ab}^0 = \int \frac{\{Q^a,\ Q^b\}}{2} f \mathrm{d}Q\mathrm{d}S,\ f_{ab}^{\mu\nu} = \int \frac{\{Q^a,\ Q^b\}}{2} S^{\mu\nu} f \mathrm{d}Q\mathrm{d}S. \tag{19}$$

把方程(15),(16),(17),(18)与方程(4),(5),(8),(9)分别进行比较,可知它们的形式是一样的,且有下面对应关系

$$f_0^0 \to B_0,\quad f_a^0 \to B_a,\quad f_0^{\lambda\rho} \to T_0^{\lambda\rho},\quad f_a^{\lambda\rho} \to T_a^{\lambda\rho},\ f_{ab}^0 \to W_{ab}^0,\quad f_a^{\alpha\beta,\,\lambda\rho} \to W_a^{\alpha\beta,\,\lambda\rho},\ \cdots. \tag{20}$$

这样就实现了量子的半经典输运方程和经典输运方程的一致.

4 经典分布函数在色空间和自旋空间的性质

上节通过两种方程一致性的讨论,已经得到了经典分布函数在色空间和自旋空间所满足的一些积分特性,(14)式,本节继续讨论其它一些性质. 在自旋空间展开的过程中,半经典输运方程还给出色单态赝标量、色单态矢量等 6 个方程[3]. 经典输运方程现在还给不出相应的方程. 另外,由于色荷之间受李代数的限制以及旋量空间受 Clifford 代数的限制,还有(12)式和下列关系

$$W_{ab} = \mathrm{Tr}\ (W \frac{\{Q^a,\ Q^b\}}{2}\ ) = \frac{\delta_{ab}}{6}\ \mathrm{Tr}\ W - \frac{1}{2} d_{abc} \mathrm{Tr}(Q^c W), \tag{21}$$

$$W^{\alpha\beta,\,\lambda\rho} = \mathrm{tr}\ (W \frac{\{S^{\alpha\beta},\ S^{\lambda\rho}\}}{2}\ ) = -\frac{1}{4} \mathrm{tr}\ (W\gamma^5)\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} - \frac{1}{4} \mathrm{tr}\ W(g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho}). \tag{22}$$

这些关系在经典情况也是得不到的. 要得到上述 6 个方程和这些关系,对经典分布函数以及经典色荷和自旋张量的性质还要进一步探讨. 首先,考虑色空间情况,夸克和胶子都

带色，色荷除了非阿贝尔特性外，还要满足 $SU(N)$群的李代数，经典色荷也应该满足这些关系．经典分布函数和色荷的关系，要引入正交归一的基底，I，$Q^a(a=1,2,\cdots,8)$（Q^a表示和八个色荷对应的基底），考虑经典分布函数是这些基底的线性组合，

$$f=f_0 I+f_a Q^a, \tag{23}$$

并且定义正交归一关系

$$\int Q^a \mathrm{d}Q=0,\ \int Q^a Q^b \mathrm{d}Q=\delta_{ab}\ . \tag{24}$$

这样，有

$$f_0=\int f\mathrm{d}Q,\ f_a=\int Q^a f\mathrm{d}Q\ . \tag{25}$$

其中f_0对应色单态，f_a对应色八重态．

对于自旋空间，半经典情况有 16 个独立的γ矩阵，而经典情况只考虑了自旋标量和自旋张量，要把自旋赝标量，自旋矢量和自旋赝矢量也包括进去，必须把空间扩展到 16 维，有 16 个独立的基底（这 16 个基底对应 16 个γ矩阵）且它们满足 Clifford 数，分布函数（f_i）在自旋空间是这 16 个基底的线性组合，有

$$f_i=B_i I+\mathrm{i}\gamma^5 P_i+\gamma_\mu V_i^\mu+\gamma_\mu\gamma^5 D_i^\mu+\sigma_{\mu\nu}T_i^{\mu\nu}\ , \tag{26}$$

并定义基底之间的正交归一关系

$$\int \Gamma_i\ \Gamma_j \mathrm{d}S=\delta_{ij}\ , \tag{27}$$

其中$\Gamma_i(i=1,2,\cdots,16.)$代表 16 个基底．

经典模型经过上述处理后，还要对(14)式进行讨论，因为以后的计算要用到它．在上节讨论经典输运方程要与半经典输运方程一致时指出，分布函数在色空间和自旋空间做积分要满足(14)式．当时它是人为加入的，没有任何证明，那么它成立吗？先考虑色空间情况，由于色荷受李代数的限制，有

$$Q_a Q_b=\frac{1}{2}\left[\frac{\delta_{ab}}{3}-(d_{abc}+\mathrm{i}f_{abc})Q^c\right]\ . \tag{28}$$

利用分布函数满足(23)式和色荷满足的正交关系(24)式以及群结构常数的性质可得到

$$\int Q_a Q_b f\mathrm{d}Q=\int fQ^a Q^b \mathrm{d}Q=\frac{1}{2}[\frac{\delta_{ab}}{3}f_0-(d_{abc}+\mathrm{i}f_{abc})f_c]=\int Q_b f Q_a \mathrm{d}Q. \tag{29}$$

这说明(14)式中关于色空间的部分是正确的．对于自旋空间，由于 16 个基底受 Clifford 代数的限制，多个基底的乘积仍是这 16 个基底的线性组合，进行和色空间相似的计算也可证明(14)式在自旋空间是正确的．因此，经典模型修正后(14)式是成立的，没有引起新的矛盾．于是，经典模型经过这样扩充后，也得到了其余 6 个方程和关系(12)式，(21)式和(22)式，与半经典情况完全一样了．

5　结束语

本文以 $S^{\mu\nu}$作为描述夸克自旋的动力学变量建立了它的经典输运方程．把该方程与

夸克的半经典输运方程进行比较探讨了经典模型的不足，并对经典模型进行了修正．经典色荷必须保持它们的非阿贝尔特性；自旋张量分量之间保持不可对易性；经典输运方程要有两种形式；经典分布函数在色空间和自旋空间的积分性质要重新定义；自旋空间还要扩充，色荷之间的李代数关系以及自旋空间的 Clifford 代数关系也要保持．这样，经典输运方程和量子输运方程可达到一致．

参 考 文 献

[1] Heinz U. Ann. Phys., 1985, **161**: 48; 1986, **168**: 148

[2] Elze H T, Heize U. Phys. Rep., 1989, **183**: 81

[3] Chen Xiangjin, Zhang Weining, Liu Yiming. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1997, **21**: 905
(陈相君，张卫宁，刘亦铭．高能物理与核物理，1997，**21**：905)

[4] Heinz U. Phys. Lett., 1884, **B144**: 288

Classical Transport Equation of Quarks Consistent With Quantum Transport Equation*

Chen Xiangjun Zhang Weining Huo Lei Liu Yiming

(*Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001)

Abstract In this paper, a dynamic variable $S^{\mu\nu}$ is used to describe quark spin and the classical transport equation of quarks is set up. The consistency of the classical transport equation with quantum transport equation is discussed. Some properties of classical distribution function in color and spin spaces are explored through comparing the consistency.

Key words quark, transport equation, color space, spin space

Received 13 March 1997

* Supported by the National Natural Science Foundaeion of China and the Natural Science Foundation of Heilongjiang Province