第21卷 第6期
1997年 6 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.21, No.6
June, 1997

关联对的fpc*

卢 大 海

(北京大学物理系 北京 100871)

1996-05-10 收稿

摘 要

针对复合粒子引入一套新的fpc，建立由多个S和D对组成的模型空间的正交化的基矢. 这样的基矢在原子核低能集体运动的微观研究中是十分有用的.

关键词 复合粒子fpc，集体运动态，玻色化.

1 引 言

在原子核低能集体运动的微观理论中，人们经常需要处理某些关联核子对(复合粒子)，例如相互作用玻色子模型[1]中的S对和D对等等. 它们是构成低激发态的基本单元. 通常诸如S和D这样的关联对或是直接由核子的产生算符[2](或准粒子产生算符[3])构成，或更好一些的是由重新定义的s对[4,6]和含辛弱数的不成对粒子算符[4,5]构成(最后一种定义关联对的方法可以自然地避免由辛弱数混合所造成的伪态成分的出现，即避免因D对与S对不完全独立而使得多D对态中含有S对成分1)).

在用关联对构造低能集体运动的模型空间时，经常遇到的一个问题是如何构造该模型空间的一套正交归一的基矢. 这是因为当D对数大于3时，除角动量外还需要附加量子数来确定由D对构成的基矢，而此时基矢对于不同的附加量子数可能没有正交性.

本文引入一种新定义的fpc来构造低能集体运动的模型空间的正交归一的基矢，并且给出各关联对算符在这组基矢中的矩阵元的明显表达式.

2 关联粒子对及其fpc

D关联对通常定义为

---

* 国家自然科学基金资助.

1) 详见文献[4, 5, 7]，但是具体构造关联对的方法对本文并不重要，所以在本文中我们不特别限定关联对是用哪一种粒子算符构造的.

$$D_{2\mu}^{\dagger}=\sum_{j\le j'}\psi_{jj'}\frac{1}{\sqrt{1+\delta_{jj'}}}(c_j^{\dagger}c_{j'}^{\dagger})_{2\mu},$$

这里 $c_{jm}^{\dagger}$是核子的产生算符[2]，或者是准粒子产生算符[3]或者是不成对粒子[4]的产生算符，而 $\psi_{jj'}$ 是关联对的结构迭加系数，它们取决于核子间的有效相互作用(对关联)，可以用变分法来确定[6,7]. 这样定义的 D 关联对显然满足如下对易关系式

$$[D_{2\mu}^{\dagger},\ D_{2\nu}^{\dagger}]=0. \tag{1}$$

为了构造出适合描述低能集体运动的模型空间的基矢，首先回忆一下含有多个理想玻色子 d 的基矢的构造方法. 它可用群的约化链 $U_5\supset O_5\supset R_3$来分类. 而正交归一的 d 玻色子基矢系列即可用 d 玻色子的 fpc 按如下的方法得出.

$$|q,\ \alpha,\ J,\ M)=\frac{1}{\sqrt{q!}}(d_2^{\dagger})_{\alpha JM}^{q}|\,0)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\alpha_1J_1}(d^{q-1}\alpha_1J_1;d\,|\}d^{q}\alpha,\ J)(D_2^{\dagger}|\,q-1,\ \alpha_1J_1))_{\alpha JM}$$

这里 $\alpha=(\nu\gamma)$而 ν是玻色辛弱数，γ是必要的附加量子数(详见参考文献 [9]，[8]).

对于任意一个由携带角动量 $J=2$，满足(1)式的费米子对构成的体系，可以用类似的方法来构造它的态空间基矢，即

$$|q,\ \alpha,\ J,\ M\rangle\rangle=\frac{1}{\sqrt{q!}}(D_2^{\dagger})_{\alpha JM}^{q}|0\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\alpha_1J_1}(d^{q-1}\alpha_1J_1;d\,|\}d^{q}\alpha,\ J)(D_2^{\dagger}|q-1,\ \alpha_1J_1\rangle\rangle)_{\alpha JM} \tag{2}$$

这里 $|\rangle\rangle$表示未归一化的态(当关联对的数目大于 1 时，由于泡利原理的作用，(2)式所构造的关联对的基矢是不归一的).

然而这样定义的关联对基矢 $|q,\ \alpha,\ J,\ M\rangle\rangle$在$q\ge 4$时(此时附加量子数是必须的)，对附加量子数$\alpha$一般没有正交性. 这一点是与相应的 d 玻色子基矢是不同的. 尽管如此，对于给定的 q，J，所需的附加量子数的个数与相应 d 玻色子基矢的附加量子数(α)的个数却仍是一样的. 这是因为关联对 D 满足(1)式，故多 D 对态(2)和多 d 玻色子态一样也是全对称的，所以在 q 给定时，在由 D 对构成的基矢中每一个给定的角动量 J 出现的次数与由d 玻色子构成的相应基矢中 J 出现的次数相同.

为了得到一套正交归一的 D 对的基矢(用$|q,\ \beta,\ J,\ M\rangle\rangle$表示之)，需要找到新的 fpc 来构造它. 这套新的 fpc 用把如下态矢量

$$|\gamma,\ q,\ J,\ M\rangle\rangle=\frac{1}{\sqrt{q}}(D_2^{\dagger}|q-1,\ \gamma(\beta_1,\ J_1)\rangle\rangle)_{JM}\quad(\gamma=1,\ 2\cdots l_1) \tag{3}$$

(在给定的 q，J下的)的模矩阵

$$N_{\gamma\gamma'}=\langle\langle\gamma,\ q,\ J,\ M|\gamma',\ q,\ J,\ M\rangle\rangle \tag{4}$$

对角化的方法得到. 这里$\gamma\equiv(\beta_1,\ J_1)$，而 l_1是当q，J，M给定时由(3)式所定义的可能态的总数.

显然对于实对称矩阵(4)，必存在一个正交矩阵 L 能将其对角化. 由于对给定的 q, J, M (3)式所给出的 l_1 个基矢一般而言是超完备的. 设它们之中只有 l ($l \le l_1$) 个是线性独立的. 也就是说模矩阵 $N_{\gamma\gamma'}$ 的秩是 l. 于是模矩阵只有 l 个正交的且模不为0的本征态，可把它们记为

$$|q,\ \beta,\ J,\ M\rangle\rangle = \sum_{\gamma=1}^{l_1} L_{\gamma\beta}\frac{1}{\sqrt{q}}(D_2^{\dagger}|q-1,\ \gamma(\beta_1,\ J_1)\rangle\rangle)_{JM} \qquad (\beta = 1,\ 2\cdots l), \tag{5}$$

它们分别与 l 个非0本征值相对应，可以作为模型空间的基矢，而 $\beta = l+1$, …, l_1 时对应于模为0的模矩阵的本征态，后者在构造模型空间基矢时应该舍去.

(5)式的反变换是

$$\frac{1}{\sqrt{q}}(D_2^{\dagger}|q-1,\ \gamma(\beta_1,\ J_1)\rangle\rangle)_{JM} = \sum_{\beta=1}^{l} L_{\gamma\beta}|q,\ \beta,\ J,\ M\rangle\rangle + \sum_{\beta=l+1}^{l_1} L_{\gamma\beta}|q,\ \beta,\ J,\ M\rangle\rangle. \tag{6}$$

(5)式表明 $L_{\gamma\beta}$ 正是所需的新 fpc，利用它们可在 $q-1$ 个 D 对的基矢上再加入一个 D 对来构成含有 q 个 D 对的基矢. 所以应该把 $L_{\gamma\beta}$ 看做是 D_2 对的 fpc, 即

$$(D^{q-1}\gamma(\beta_1 J_1);\ D|\}\, D^q,\ \beta,\ J) = L_{\gamma\beta}. \tag{7}$$

这里，$\beta = 1$，$2\cdots l$，$\gamma = 1$，$2\cdots l_1$. 于是用新引入的 fpc(5)式就可以表达为

$$|q,\ \beta,\ J,\ M\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\beta_1 J_1}^{l_1}(D^{q-1}\beta_1,\ J_1;\ D|\}\, D^q\beta,\ J)(D_2^{\dagger}|q-1,\ \gamma(\beta_1,\ J_1)\rangle\rangle)_{JM} \tag{8}$$

因为 L 是正交矩阵，所以这些新引入的 D 对的 fpc 仍然有如下的正交归一性关系.

$$\sum_{\beta_1 J_1}(D^{q-1}\beta_1,\ J_1;\ D|\}\, D^q\beta,\ J)(D^{q-1}\beta_1,\ J_1;\ D|\}\, D^q\beta',\ J) = \delta_{\beta\beta'}。$$

从(6)式可以得到如下极为重要的 D 在如上引入的基矢间的矩阵元的表达式

$$\langle q,\ \beta,\ J\|D_2^{\dagger}\|q-1,\ \beta_1,\ J_1\rangle = \sqrt{q}\sqrt{2J+1}\,(D^{q-1}\beta_1,\ J_1;\ D|\}\, D^q\beta,\ J)\sqrt{\frac{N_{q\beta J}}{N_{q-1\,\beta_1 J_1}}}, \tag{9}$$

上式中的左矢和右矢是归一化的基矢，而 $N_{q\beta J}$, $N_{q-1\,\beta_1 J_1}$ 分别是未归一化的基矢 $|q,\ \beta,\ J,\ M\rangle\rangle$ 和 $|q-1,\ \beta_1,\ J_1,\ M_1\rangle\rangle$ 的模.

当 $q \le 3$ 时由(2)式所定义的基矢量 $|q \le 3,\ \alpha,\ J,\ M\rangle\rangle$ 已经是相互正交的，因为此时附加量子数 β 或 α 不是必要的量子数. 所以在 $q \le 3$ 时可以取 D 对的 fpc 为 d 玻色子的 fpc，即

$$(D^{q-1}\beta_1 = \alpha_1,\ J_1;\ D|\}\, D^q\beta,\ J) = (d^{q-1}\alpha_1,\ J_1;\ d\,|\}\, d^q\alpha,\ J). \tag{10}$$

可以证明在 $q \le 3$ 时如采用(10)式的 fpc，(9)式仍然成立. 显然当 $q = 1$，2 时(9)式成立. 而当 $q = 3$ 时，可用如下方法来证明，以 $J = 4$，$J_1 = 2$ 为例，利用角动量重耦合以及拉

卡系数可得

$$(D_2^\dagger(D_2^\dagger)_2^2)_{4M} = \sqrt{\frac{11}{10}}(D_2^\dagger(D_2^\dagger)_4^2)_{4M}.$$

所以从(2)式即可导出

$$|q=3,\ J=4,\ M\rangle\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{21}{11}}(D_2^\dagger(D_2^\dagger)_2^2)_{4M}|0\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{21}{11}}\sqrt{2}\,(D_2^\dagger|q=2,\ J_1=2\rangle\rangle)_{4M},$$

于是就可以得到

$$\langle q=3,\ 4\|D_2^\dagger\|q=2,\ 2\rangle = \sqrt{3}\sqrt{2\times4+1}\sqrt{\frac{11}{21}}\sqrt{\frac{N_{34}}{N_{22}}}$$

$$= \sqrt{3}\sqrt{2\times4+1}\,(d^2J_1=2;\ d|\}d^3\,J=4)\sqrt{\frac{N_{34}}{N_{22}}}.$$

对 $q=3$ 时(9)式的其他矩阵元也可同样地被证明.

以上引入的 D 对 fpc 可以很容易地推广到基矢中也含有 S 对时的情况.

3 对玻色化新的解释

如果引入如下的模算符 $\hat{N}$ 和经修改的新的 D 对 $D(b)$

$$\langle\langle q,\ \beta,\ J,\ M|\hat{N}|q',\ \beta',\ J',\ M'\rangle\rangle = N_{q,\beta,J}\delta_{qq'}\delta_{\beta\beta'}\delta_{JJ'}\delta_{MM'},$$

$$D_{2\mu}^\dagger(b) = \hat{N}^{-\frac{1}{2}}D_{2\mu}^\dagger\hat{N}^{\frac{1}{2}},$$

则可以把正交归一化的基矢以及 D 对的矩阵元(9)式改写为如下形式

$$\frac{1}{\sqrt{N_{q\beta J}}}|q,\ \beta,\ J,\ M\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{q!}}(D_2^\dagger(b))^q_{\beta JM}|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\beta_1 J_1}^{l_1}(D^{q-1}\beta_1,\ J_1;\ D|\}D^q\beta,\ J)(D_2^\dagger(b)|q-1,\ \gamma(\beta_1,\ J_1)\rangle)_{JM}, \tag{11}$$

$$\langle q,\ \beta,\ J\|D_2^\dagger(b)\|q-1,\ \beta_1,\ J_1\rangle$$

$$= \sqrt{q}\sqrt{2J+1}\,(D^{q-1}\beta_1,\ J_1;\ D|\}D^q\beta,\ J). \tag{12}$$

(11)式表明由 $D(b)$ 所构成的基矢正是正交归一化的 D 对基矢. 值得注意的是此新定义的 $D(b)$ 对的矩阵元(12)式与理想 d 玻色子的矩阵元有着相同形式，两者的差别只是矩阵元表达式中的 fpc 不同而已，后者是 d 玻色子 fpc, 而前者是新引入的 D 对的 fpc.

在相互作用玻色子模型的微观理论中，d 玻色子是由 D 对的玻色化而得到的，也就是说借助于从费米子空间到玻色子空间的映射而来. 然而也可以用更为自然的方法来解释所谓的“玻色化”. 即，可以把(12)式看作是 $D^\dagger(b)$ 算符的定义，如果(2)式的基矢已经近似是正交系(参见附录)，则可用(2)式的基矢取代(12)式矩阵元中的基矢，于是 $D^\dagger$

(b)算符满足如下的式子

$$\begin{aligned}&\langle q,\ \alpha,\ J\| D_2^{\dagger}(b)\| q-1,\ \alpha_1,\ J_1\rangle\\&=(d^{q-1}\alpha_1,\ J_1;\ d|\}d^q\alpha,\ J)\ .\end{aligned}\tag{13}$$

由(13)式和d玻色子fpc的性质，可以证明$D(b)$，$D^{\dagger}(b)$满足类似于玻色子的对易关系，即

$$\begin{aligned}&\langle q,\ \alpha,\ J,\ M|[D_{2\mu}(b),\ D_{2\nu}^{\dagger}(b)]|q,\ \alpha',\ J',\ M'\rangle\\&=\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\ .\end{aligned}\tag{14}$$

(14)式意味着经修改的新D对$D(b)$在费米子模型空间内具有类似于玻色子的行为. 这是对“玻色化”的一种新的理解，它无须利用向玻色子空间映射的概念.

参　考　文　献

[1] A. Arima, F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975)1069; A. Arima, F. Iachello, *Ann. Phys.*, **99** (1976)253.

[2] M. R. Zirnbauer, D. M. Brink, *Nucl. Phys.*, **A384** (1982) 1; E. Maglionne *et al.*, *Nucl. Phys.*, **A397** (1983) 102; T. Otsuka, A. Arima, F. Iachello, *Nucl. Phys.*, **A309** (1978) 1.

[3] H. Nakada, A. Arima, *Nucl. Phys.*, **A524** (1991) 1.

[4] L. M. Yang, D. H. Lu, Z. N. Zhou, *Nucl. Phys.*, **A421** (1984) 223; L. M. Yang, *Prog. Part. Nucl.*, **9** (1983) 147.

[5] T. Suzuki, K. Matsuyanagi, *Prog. Theor. Phys.*, **56** (1976) 1156.

[6] L. M. Yang, Z. N. Zhou, D. H. Lu, *Phys. Rev.*, **C40** (1989) 2885.

[7] D. H. Lu, *Phys. Rev.*, **C47** (1993) 1986.

[8] T. Suzuki *et al.*, *Prog. Theor. Phys.*, **61** (1979) 1682.

[9] 杨泽森，高能物理与核物理，7 (1983) 245。

附　　录

理论分析[8]和实际计算表明，如果D对是由不成对粒子算符[4]来构造的，则(2)式的基矢对O_5分类的量子数α近似是正交的1). 这个结果是在计算Sm同位素的集体运动能谱和$E(2)$跃迁时得到的. 在该计算中有效哈密顿量由单粒子项，对力，四极对力，四极－四极力构成(详见文献[4，6]). 实际的计算表明，虽然(2)式的基矢的模矩阵在一定程度上依赖于关联对的结构迭加系数$\psi_{jj'}$，从而也就依赖于相互作用的强度的选择，但是基矢对α的近似正交的性质并不随之改变. 这表现在相互作用参数的一个合理的范围内，(2)式的基矢的模矩阵的非对角元远小于主对角元间的差(模矩阵的非对角元与主对角元间的差的比率小于5%)2).

表1给出$q=4$，$J=2$以及$q=4$，$J=4$时(2)式的基矢的模矩阵的矩阵元. 在计算中所取的单粒

表1　q=4 (J=2, J=4) 时(2)式的基矢的模矩阵元

$J=2$			$J=4$		
ν	2	4	ν	2	4
2	0.01106	0.00035	2	0.09786	−0.00037
4	0.00035	0.02771	4	−0.00037	0.02098

1) 注意，(2)式中的fpc是玻色子fpc，而α是玻色子的量子数.

2) 这种非严格正交性的影响事实上还可进一步地减小，这是因为原子核集体运动的波函数(无论是其中子部分还是其质子部分)含有4或4个以上D对的成分一般是比较小的. 计算表明由上述的非严格正交性引起的Sm同位素集体能谱和$E(2)$跃迁的相对误差一般小于1%.

子能(以 MeV 作单位)是$\epsilon_{3s_{1/2}} = 2.6$，$\epsilon_{2d_{3/2}} = 2.3$，$\epsilon_{2d_{5/2}} = 0.9$，$\epsilon_{1g_{7/2}} = 0.0$，$\epsilon_{1h_{11/2}} = 2.4$，有效相互作用强度参数取为 $G_0 = 0.18$MeV，$G_2 = 0.036\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2$ MeV(这组参数是计算 Sm 同位素的集体运动能谱和 $E(2)$跃迁时所采用的)．

用把如上的模矩阵对角化的方法得到的 $J = 2$ 和 $J = 4$ 的正交归一化的基矢为

$$|q = 4,\ J = 2,\ M\rangle\rangle_1 = 0.999775|\,q = 4,\ \alpha = v = 2,\ J = 2,\ M\rangle\rangle - 0.021194|4,\ v = 4,\ 2,\ M\rangle\rangle,$$
$$|q = 4,\ J = 2,\ M\rangle\rangle_2 = 0.021194|\,q = 4,\ v = 2,\ J = 2,\ M\rangle\rangle + 0.999775|4,\ v = 4,\ 2,\ M\rangle\rangle,$$
$$|q = 4,\ J = 4,\ M\rangle\rangle_1 = 0.999463|\,q = 4,\ v = 2,\ J = 4,\ M\rangle\rangle + 0.032775|4,\ v = 4,\ 4,\ M\rangle\rangle,$$
$$|q = 4,\ J = 4,\ M\rangle\rangle_2 = -0.032775|q = 4,\ v = 2,\ J = 4,\ M\rangle\rangle + 0.999463|4,\ v = 4,\ 4,\ M\rangle\rangle,$$

以上表明作为低能集体态的主要分量的基矢是近似正交的($q \le 3$ 时是严格正交的)．

Construction of a New Set of fpc′s for the Composite Pair

Lu Dahai

(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)

Received 10 May 1996

Abstract

A new set of fpc is introduced to build the orthogonal set of basis for the states with many S and D pairs in the microscopic theory of low-lying collective motion.

Key words　fpc for composed particle, collective state, bosonization.