第21卷 第10期 1997年 10 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.21, No.10 Oct., 1997

夸克的半经典输运方程*

陈相君 张卫宁 刘亦铭

(哈尔滨工业大学理论物理教研室 哈尔滨 150001)

1996-11-18收稿

摘 要

对夸克的量子输运方程取半径典近似时保留到 Wigner 函数的一次微商项;在色空间和自旋空间展开这个半经典输运方程,得到了色单态自旋标量和色单态自旋矢量的输运方程:并把得到的结果和阿贝尔等离子体进行比较讨论了QGP 的非阿贝尔性质.

关键词 夸克胶子等离子体,输运方程,色空间,自旋空间.

1 引 言

夸克胶子等离子体(简称 QGP)是高能物理的一个重要研究领域.在相对论重离子碰撞实验中,当能量极高,巨大的动能转化为热能,使碰撞温度超过退禁闭相变的临界温度时,则可产生 QGP[1,2].然后,它经过膨胀、降温等过程,最后转变为强子[3].因此,非平衡输运过程是 QGP 的一个重要物理过程,许多物理学家从事这方面的研究,特别是 U. Heinz 和 E. Elze 等在这方面做了许多工作[4,5].输运方程是研究 QGP 输运的基础,它包括夸克和胶子的输运方程.通常人们在经典和量子两种情况下建立夸克的输运方程,一是经典输运方程,一是量子输运方程.量子情况,输运方程非常复杂,为了探讨它的物理意义,本文在取半经典近似时,考虑经典分布函数的变化是缓慢的,因此在半经典输运方程中只保留到 Wigner 函数的一次微商项.这时 Wigner 函数仍然是一个矩阵形式,方程中仍存在对易括号和反对易括号,还是比较复杂.为了进一步弄清它包含的物理意义,将其在色空间和自旋空间展开,寻找夸克在这两个空间的输运特性并为求解夸克的半经典输运方程打下基础.文献[6]讨论了阿贝尔等离子体的情况,把结论和文献[6]进行比较并讨论 QGP 的非阿贝尔特性.

2 夸克的半经典输运方程

考虑 QGP 是一个 QCD 系统,用 Wigner 算符描述夸克,可得到夸克的量子输运方程[4,5]

* 国家自然科学基金、黑龙江省自然科学基金资助.

$$p^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}\hat{W}(x,p) = -\frac{g}{2}p^{\mu}\partial_p^{\nu}\int_0^1 \mathrm{d}s[(\mathrm{e}^{-s\Delta}F_{\mu\nu})\hat{W}(x,p)+\hat{W}(x,p)(\mathrm{e}^{s\Delta}F_{\mu\nu})]$$
$$+\frac{\mathrm{i}g}{4}[\sigma^{\mu\nu}(\mathrm{e}^{-\Delta}F_{\mu\nu})\hat{W}(x,p)-\hat{W}(x,p)(\mathrm{e}^{\Delta}F_{\mu\nu})\sigma^{\mu\nu}]$$
$$+\frac{\mathrm{i}g}{4}\partial_p^{\nu}\int_0^1 \mathrm{d}ss[\mathrm{e}^{-s\Delta}F_{\mu\nu})\mathrm{D}^{\mu}\hat{W}(x,p)-\mathrm{D}^{\mu}\hat{W}(x,p)(\mathrm{e}^{s\Delta}F_{\mu\nu})]$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{8}g^2\partial_p^{\mu}\partial_p^{\nu}\int_0^1 \mathrm{d}ss\int_0^1 \mathrm{d}\bar{s}\{(\mathrm{e}^{-s\Delta}F_{\mu\eta})[(\mathrm{e}^{-\bar{s}\Delta}F_{\nu}^{\eta})\hat{W}(x,p)$$
$$+\hat{W}(x,p)(\mathrm{e}^{\bar{s}\Delta}F_{\nu}^{\eta})]-[(\mathrm{e}^{-\bar{s}\Delta}F_{\nu}^{\eta})\hat{W}(x,p)$$
$$+\hat{W}(x,p)(\mathrm{e}^{\bar{s}\Delta}F_{\nu}^{\eta})](\mathrm{e}^{s\Delta}F_{\mu\eta})\}. \tag{1}$$

这里定义了三角算符$\Delta=\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_p^{\nu}\mathrm{D}_{\nu}(x)$和运算

$$\hat{O}A\otimes B=A\otimes\hat{O}B,\quad A\otimes B\hat{O}=A\hat{O}\otimes B. \tag{2}$$

(1)式是规范协变的算符方程,很复杂,为了弄清它的物理意义,需要对它取半经典极限.文献[4, 5]给出了半经典近似方程,但它仍然很复杂,包含许多项.在输运问题的经典描述中,分布函数的变化是缓慢的[7].因此,这里取半经典极限时,考虑只保留到$W(x,p)$的一次微商项.这时,夸克的半经典近似方程为

$$p^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}W(x,p) = -\frac{g}{2}p^{\mu}\partial_p^{\nu}\{F_{\mu\nu},W(x,p)\}+\frac{\mathrm{i}g}{4}[\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu},W(x,p)]$$
$$+\frac{g}{8}\{\mathrm{D}_{\nu}\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},\partial_p^{\nu}W(x,p)\}. \tag{3}$$

3 在色空间和自旋空间的展开

在半经典情况下,$W(x,p)$仍然是矩阵形式,在色空间是3×3矩阵,在自旋空间是4×4矩阵,与色荷Q_a和自旋张量$S^{\mu\nu}$都不对易,所以(3)式中仍含对易括号和反对易括号.为了进一步弄清它包含的物理意义,对它再一次简化.考虑$W(x,p)$的作用和经典单粒子分布函数相似,用它可求系统的某一物理量的平均值.在求平均值时,需用公式

$$\langle b\rangle=\mathrm{Trtr}\int bW(x,p)\mathrm{d}x\mathrm{d}p, \tag{4}$$

其中Tr表示在色空间求迹,tr表示对自旋空间求迹.化简(3)式,首先在色空间和自旋空间展开.

在色空间里,$W(x,p)$是$SU(3)$群的直积表示,是可约的,可分解为1维不可约表示与8维不可约表示的直和[8],有

$$W(x,p)=W_0\frac{I}{3}-W_a\lambda_a, \tag{5}$$

其中 $W_0 = \mathrm{Tr}\,(W(x, p))$, $W_a = \mathrm{Tr}(W(x, p)Q^a)$分别对应着 $W(x, p)$的色单态和色八重态分量．在色空间对(3)式求迹，得到

$$p^\mu\partial_\mu W_0 = \frac{g}{c}p^\mu F^a_{\mu\nu}\partial^\nu_p W_a - \frac{\mathrm{i}g}{4}[\sigma^{\alpha\beta}F^a_{\alpha\beta}, W_a] - \frac{g}{8}\{(\mathrm{D}_\nu F_{\alpha\beta})^a\sigma^{\alpha\beta}, \partial^\nu_p W_a\}, \tag{6}$$

其中

$$(\mathrm{D}_\nu F_{\alpha\beta})^a = \partial_\nu F^a_{\alpha\beta} + f^{abc}A^b_\nu F^c_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

用 Q^a乘(3)式，然后在色空间求迹得

$$\begin{aligned} p^\mu\partial^\mu W_a = {} & gp^\mu F^b_{\mu\nu}\partial^\nu_p W_{ab} - gf_{abc}p^\mu A^b_\mu W_c \\ & - \frac{\mathrm{i}g}{4}[\sigma^{\alpha\beta}F^b_{\alpha\beta}\mathrm{Tr}(WQ^aQ^b) - \mathrm{Tr}(WQ^bQ^a)F^b_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}] \\ & - \frac{g}{8}(\mathrm{D}_\nu F_{\alpha\beta})^b[\sigma^{\alpha\beta}\partial^\nu_p\mathrm{Tr}(WQ^aQ^b) + \partial^\nu_p\mathrm{Tr}(WQ^bQ^a)\sigma^{\alpha\beta}]. \end{aligned} \tag{8}$$

这里

$$W_{ab} = \mathrm{Tr}(W\{Q^a, Q^b\}\,/\,2) = \frac{\delta_{ab}}{6}W_0 - \frac{1}{2}d_{abc}W_c, \tag{9}$$

d_{abc}是 $SU(3)$群的对称结构常数．

在(6)式和(8)式中，W_0, W_a, $\mathrm{Tr}(WQ_aQ_b)$等还是自旋空间的矩阵，它们与$\sigma^{\mu\nu}$不对易，还要在自旋空间进行分解．在自旋空间里，W_0, W_a, …等可按 16 个独立的γ矩阵展开．这 16 个γ矩阵是[6]

$$1,\ \gamma^\mu,\ \mathrm{i}\gamma^5,\ \gamma^\nu\gamma^5,\ \sigma^{\mu\nu}.$$

展开式为

$$W_i = \frac{1}{4}(B_i + \mathrm{i}\gamma^5 P_i + \gamma^\mu V^i_\mu + \gamma^\mu\gamma^5 D^i_\mu + \sigma^{\mu\nu}T^i_{\mu\nu}), \tag{10}$$

其中 $B_i = \mathrm{tr}(W_i)$, $P_i = \mathrm{tr}(-\mathrm{i}\gamma^5 W_i)$, $V^i_\mu = \mathrm{tr}(\gamma_\mu W_i)$, $D^i_\mu = \mathrm{tr}(\gamma^5\gamma_\mu W_i) = \mathrm{tr}(W_i\gamma^5\gamma_\mu)$, $T^i_{\mu\nu} = \mathrm{tr}(W_i S_{\mu\nu})$是对应 16 个$\gamma$矩阵的 16 个分量，分别是自旋空间的标量，矢量，赝标量，赝矢量和张量．对(6)式进行分解，得到一组方程为

$$p^\mu\partial_\mu B_0 = gp^\mu F^a_{\mu\nu}\partial^\nu_p B_a - \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu F_{\alpha\beta})^a\partial^\nu_p T^{\alpha\beta}_a \tag{11}$$

$$p^\mu\partial_\mu P_0 = gp^\mu F_{\mu\nu}\partial^\nu_p P_a - \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu\bar{F}^a_{\alpha\beta}\partial^\nu_p T^{\alpha\beta}_a), \tag{12}$$

其中$\bar{F}_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$,

$$p^\mu\partial_\mu V^\lambda_0 = gp^\mu F^a_{\mu\nu}\partial^\nu_p V^\lambda_a - gV^\rho_a F^{a\lambda}_\rho - \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu\bar{F}^{\lambda\rho})^a\partial^\nu_p D^a_\rho, \tag{13}$$

$$p^\mu\partial_\mu D^\lambda_0 = gp^\mu F^a_{\mu\nu}\partial^\nu_p D^\lambda_a - gD^\rho_a F^{a\lambda}_\rho - \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu\bar{F}^{\lambda\rho})^a\partial^\nu_p V^a_\rho, \tag{14}$$

$$p^\mu\partial_\mu T^{\lambda\rho}_0 = gp^\mu F^a_{\mu\nu}\partial^\nu_p T^{\lambda\rho}_a - \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu F_{\alpha\beta})^a\partial^\nu_p W^{\alpha\beta,\lambda\rho}_a + g(F^{\lambda\sigma}_a T^{a\rho}_\sigma - F^{\rho\sigma}_a T^{a\lambda}_\sigma), \tag{15}$$

其中

$$W_a^{\alpha\beta,\lambda\rho} = \mathrm{tr}(W_a\{S^{\alpha\beta},S^{\lambda\rho}\}/2) = -\frac{1}{4}P_a\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} - \frac{1}{4}B_a(g^{\alpha\rho}g^{\beta\lambda} - g^{\alpha\lambda}g^{\beta\rho}). \tag{16}$$

对(8)式进行自旋空间的分解，得到另一组方程

$$p^\mu\partial_\mu B_a = gp^\mu F^b_{\mu\nu}\partial^\nu_p B_{ab} - \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu F_{\alpha\beta})^b\partial^\nu_p T^{\alpha\beta}_{ab} - gf_{abc}p^\mu A^b_\mu B_c - \frac{g}{2}f_{abc}F^b_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_c, \tag{17}$$

其中

$$B_{ab} = \mathrm{Trtr}(W\{Q^a,Q^b\}/2) = \frac{\delta_{ab}}{6}B_0 - \frac{1}{2}d_{abc}B_c, \tag{18}$$

$$T^{\alpha\beta}_{ab} = \mathrm{Trtr}(W\{Q^a,Q^b\}S^{\alpha\beta}/2) = \frac{\delta_{ab}}{6}T^{\alpha\beta}_0 - \frac{1}{2}d_{abc}T^{\alpha\beta}_c, \tag{19}$$

$$p^\mu\partial_\mu P_a = gp^\mu F^b_{\mu\nu}\partial^\nu_p P_{ab} - gf_{abc}p^\mu A^b_\mu P_c - \frac{g}{2}f_{abc}\bar{F}^b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_c - \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu\bar{F}_{\alpha\beta})^b T^{\alpha\beta}_{ab}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} p^\mu\partial_\mu V^\lambda_a = {} & gp^\mu F^b_{\mu\nu}\partial^\nu_p V^\lambda_{ab} - gf_{abc}p^\mu A^b_\mu V^\lambda_c + gF^\lambda_{b\rho}V^\rho_{ab} \\ & + \frac{g}{2}f_{abc}(\bar{F}^{\rho\lambda}_b)D^c_\rho + \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu\bar{F}^\lambda_\rho)^b\partial^\nu_p D^\rho_{ab} - \frac{g}{4}f_{abc}(D_\nu F^{\lambda\rho})^b\partial^\nu_p V^c_\rho, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} p^\mu\partial_\mu D^\lambda_a = {} & gp^\mu F^b_{\mu\nu}\partial^\nu_p D^\lambda_{ab} - gf_{abc}p^\mu A^b_\mu D^\lambda_c + \frac{g}{2}f_{abc}(\bar{F}^{\rho\lambda}_b)V^c_\rho + gF^\lambda_{b\rho}D^\rho_{ab} \\ & + \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu\bar{F}^{\rho\lambda})^b\partial^\nu_\rho V^{ab}_\rho + \frac{g}{4}f_{abc}(\mathrm{D}_\nu F^{\rho\lambda})^b\partial^\nu_p D^c_\rho, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} p^\mu\partial_\mu T^{\lambda\rho}_a = {} & gp^\mu F^b_{\mu\nu}\partial^\nu_p T^{\lambda\rho}_{ab} - \frac{g}{2}(\mathrm{D}_\nu F_{\alpha\beta})^b\partial^\nu_p W^{\alpha\beta,\lambda\rho}_{ab} - gf_{abc}p^\mu A^b_\mu T^{\lambda\rho}_c - \frac{g}{2}f_{abc}F^b_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta,\lambda\rho}_c \\ & + g(F^\lambda_{b\nu}T^{\nu\rho}_{ab} - F^\rho_{b\nu}T^{\nu\lambda}_{ab}) - \frac{g}{4}f_{abc}[(\mathrm{D}_\nu F^\lambda_\sigma)^b\partial^\nu_p T^{\sigma\rho}_c - (D_\nu F^\rho_\sigma)^b\partial^\nu_p T^{\sigma\lambda}_c], \end{aligned} \tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta,\lambda\rho}_{ab} = {} & \mathrm{Trtr}(W\{Q^a,Q^b\}\{S^{\alpha\beta},S^{\lambda\rho}\}/4) = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}\left(\frac{\delta_{ab}}{6}P_0 - \frac{1}{2}d_{abc}P_c\right) \\ & - \frac{1}{4}(g^{\alpha\rho}g^{\beta\lambda} - g^{\alpha\lambda}g^{\beta\rho})\left(\frac{\delta_{ab}}{6}B_0 - \frac{d_{abc}}{2}B_c\right). \end{aligned} \tag{24}$$

上面，在色空间和自旋空间展开了夸克的半经典输运方程时，得到了10个方程．这10个方程分别对应色单态自旋标量，色单态矢量等等的输运方程．它们是分量形式，不含矩阵．在色八重态 B_a, P_a, …方程中含有 B_{ab}, P_{ab}, …，由于色荷之间受李代数的限制，它们分别和各自的色单态和色八重态有关(见(9)式)．对于自旋变量也是这样，在自旋张量的方程中，含有 $W_i^{\alpha\beta,\lambda\rho}$，由于$\gamma$矩阵之间受Clifford代数的限制，它们和各自的 P_i和 B_i有关(见(16)式和(24)式)．把这些关系代入相应的方程，得到一个封闭的方程组．

另外，上面形成的10个方程，还可分为两个独立的封闭方程组．自旋矢量和自旋赝

矢量的方程形成一个封闭方程组,其余的形成另一个封闭方程组.

4 和阿贝尔等离子体的比较

阿贝尔等离子体的典型例子是电磁等离子体. 文献[6]讨论了电磁等离子体情况. 它把电子的量子输运方程做半经典近似后,在自旋空间进行展开,在电磁场的场强张量 $F_{\mu\nu}$ 是常数场或是变化很慢的条件下,得到矢量的分布函数和标量的分布函数之间有下面关系

$$V_\mu = p_\mu B. \tag{25}$$

这里是非阿贝尔等离子体,情况怎样? 先考虑色单态情况. 比较标量方程(11)式和矢量方程(13)式. 当胶子场的场强张量 $F_{\mu\nu}$ 是常数场或变化很慢时,有

$$(\mathrm{D}_\nu F_{\alpha\beta})^a = \partial_\nu F^a_{\alpha\beta} + f^{abc} A^b_\nu F^c_{\alpha\beta} = f^{abc} A^b_\nu F^c_{\alpha\beta}. \tag{26}$$

这时,(11)式和(13)式变为

$$p^\mu \partial_\mu B_0 = g p^\mu F^a_{\mu\nu} \partial^\nu_p B_a - \frac{g}{2} f^{abc} A^b_\nu F^c_{\alpha\beta} \partial^\nu_p T^{\alpha\beta}_a, \tag{27}$$

$$p^\mu \partial_\mu V^\lambda_0 = g p^\mu F^a_{\mu\nu} \partial^\nu_p V^\lambda_a - g V^\rho_a F^{a\lambda}_{\ \ \rho} - \frac{g}{2} f^{abc} A^b_\nu \bar{F}^{\lambda\rho}_c \partial^\nu_p D^a_\rho. \tag{28}$$

当忽略方程右边最后一项时,把 $V^\lambda_0 = p^\lambda B_0$ 以及 $V^\lambda_a = p^\lambda B_a$ 代入(28)式,可得到(27)式. 说明它们也有(25)式的关系. 但是忽略的这一项是来自胶子的非阿贝尔特性. 所以,在非阿贝尔等离子体情况,没有(25)式的简单关系. 当考察赝矢量和赝标量的方程以及色八重态情况的上述两对方程时,也得到同样的结论. 因此,非阿贝尔等离子体比阿贝尔等离子体要复杂得多.

5 结　束　语

本文在夸克的量子输运方程取半经典近似时,保留到 Wigner 函数的一次微商项,得到它的半经典输运方程. 在色空间和自旋空间展开这个半经典输运方程,得到色单态自旋标量和色单态自旋矢量的输运方程等等. 由于色空间和自旋空间的性质,这些方程形成两个封闭的方程组. 把这些输运方程和阿贝尔等离子体的相应方程进行了比较知道 QGP 比阿贝尔等离子体复杂的多,由于它的非阿贝尔特性,色单态标量和色单态矢量的分布函数之间没有简单的关系,色八重态情况也是这样.

作者感谢 U. Heinz 教授好的建议和有益讨论; 并感谢刘连寿教授的帮助和支持.

参考文献

[1] T. Celik, J. Engels, H. Satz, *Phys. Lett.*, **B129**(1983)323.

[2] Wang Enke, Li Jiarong, Liu Lianshou, *Phys. Rev.*, **D41**(1992)2288.

[3] 李家荣，夸克物质理论导论，湖南教育出版社，1989.

[4] H. Else, U. Heinz, *Phys. Rep.*, **183**(1989)81.

[5] U. Heinz, *Ann. Phys.*, **161**(1985)48.

[6] D. Vasak, M. Gyulassy, H. Else, *Ann. Phys.*, **173**(1987)462.

[7] S. R. de Groot, W. A. Van Leenwen, Ch. G. Van. Weert, Relativistic Kinetic Theory Priciples and Applications, North-Holland, New York, 1980.

[8] N. W. Dean, Introduction to the Strong Interactions, Gordon and Breach Science Publishers Inc., New York, 1976.

Semi-Classical Transport Equation of Quarks

Chen Xiangjun Zhang Weining Liu Yiming

(*Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001)

Received 18 November 1996

Abstract

The terms up to one order derivative of Wigner function are retained when the semi-classical limit of transport equation of quarks is taken. The semi-classical transport equation is expanded in the color space and the spin space. The transport equations of color singlet spin scalar and color singlet spin vecter are obtained. The non-Abelian natures of QGP are discussed through comparing our results with non-Abelian plasma.

Key words quark-gluon plasma, transport equation, color space, spin space.