第19卷 第8期 高能物理与核物理 Vol. 19, No. 8
1995年8月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1995

Brauer 代数不可约表示的基矢构造及维数公式*

潘 峰
(辽宁师范大学物理系 大连 116022)

1994-12-20 收稿

摘 要

利用诱导表示的方法构造了 Brauer 代数不可约表示,并给出了计算任意不可约表示的维数公式。

关键词 Brauer 代数,维数公式,不可约表示

1 引 言

Brauer 代数[1]是双参数辫子群的特殊实现。Birman-Wenzl 代数[2]的经典情况。这一代数与 B, G, D 型李代数的直积表示有着十分密切的关系[3,4]。由于该代数的复杂性,五十多年来进展不大,不象与 A 型半单李代数有关的对称群 S_n 那样被人们所熟知。显然,通过对 Brauer 代数不可约表示的研究,有助于人们从该代数的表示出发而了解 $O(n)$ 及 $SP(2m)$ 的基矢构造,耦合系数等一系列表示论的问题。这一点非常类似 S_n 与 U_f 之间的 Schur-Weyl 关系。

另一方面,最近的研究表明,Birman-Wenzl 代数的表示与 Kauffman 环结多项式有关,并与一大类杨-Baxter 方程的解有密切的联系。当 Birman-Wenzl 代数的两个参数均非单位根时,可以通过 Brauer 代数表示的性质得到 Birman-Wenzl 代数表示的信息。实际上,Brauer 代数正是 Birman-Wenzl 代数当参数取某种极限时的结果,从而也是辫子群特殊实现的一种。

2 Brauer 代数 $D_f(n)$

$D_f(n)$ 可用 $2f-2$ 个基本元素 $\{g_1,g_2,\cdots,g_{f-1};e_1,e_2,\cdots,e_{f-1}\}$ 来定义,并满足

$$g_ig_{i+1}g_i=g_{i+1}g_ig_{i+1}, \tag{1}$$

$$g_ig_j=g_jg_i,\quad |i-j|\geqslant 2, \tag{2}$$

$$e_ig_i=e_i, \tag{3}$$

* 国家自然科学基金资助.

$$e_i g_{i-1} e_i = e_i, \tag{4}$$

$$e_i^2 = n e_i, \tag{5}$$

$$(g_i - 1)^2 (g_i + 1) = 0. \tag{6}$$

根据文献[5]的最新结果,我们知道 $f-1$ 个基本元素 $\{g_i; i=1,2,\cdots,f-1\}$ 可由辫子群 B_f 的四个生成元 Δ,Ω 及其逆元生成。具体详见[5]。

在目前的情况下，显然 $\{g_1, g_2, \cdots, g_{f-1}\}$ 生成 S_f，故 $D_f(n) \supset S_f$。利用文献[1]及[3,4]的结果，我们知道，$D_f(n)$ 是半单的,即可表为全矩阵代数的直和，当且仅当 n 为非整数,或 n 为整数并满足 $n \geqslant f-1$。当 $D_f(n)$ 为半单时，其不可约表示可用 $f, f-2, f-4, \cdots, 1$ 或 0 个方块的杨图来标志。从 $D_f(n)$ 的基本元素中去掉 g_{f-1}，e_{f-1}，得到子代数 $D_{f-1}(n)$，继续这样做下去,我们得到代数链 $D_f(n) \supset D_{f-1}(n) \supset \cdots \supset D_2(n)$。我们将此称为 $D_f(n)$ 的标准基。设 $V_{f,[\lambda]}$ 是 $D_f(n)$ 的模,它按其子代数 $D_{f-1}(n)$ 的模分解时，有

$$V_{f,[\lambda]} = \oplus_{[\mu]\leftrightarrow[\lambda]} V_{f-1,[\mu]}, \tag{7}$$

其中 $V_{f-1,[\mu]}$ 是 $D_{f-1}(n)$ 的单模，$[\mu]$ 取遍从 $[\lambda]$ 中去掉一个方块或加上一个方块（当 $[\lambda]$ 少于 f 个方块时)后的各种可能杨图。

3　$D_f(n)$ 的基矢构造及维数公式

首先讨论 n 为整数的情形。n 一般可为任意实参数，n 为一般实参数的结果可从 n 为整数的结果出发经解析延拓得到。引入 O_n 群的 f 个一阶单位张量算符的直乘

$$T^1_{i_1} T^2_{i_2} \cdots T^f_{i_f} \equiv T^{12\cdots f}_{i_1 i_2 \cdots i_f}, \tag{8}$$

其中上标（$i=1,2,\cdots f$）用来标记不同空间的编码,例如 $T \otimes T$ 的元素可记为 $T^1_{i_1} T^2_{i_2}$ 等等,单位张量算符 $T^i_{i_i}(i=1,2,\cdots f)$ 是指假定对固定的空间编码 i, $T^i_{i_i}$ 张成内积空间时满足正交归一条件 $(T^i_{i_i}, T^i_{i'_i}) = \delta_{i_i i'_i}$。于是 $D_f(n)$ 的基本元素中，g_i 对应张量空间编码 i 和 $i+1$ 的对换;而 e_i 对应相邻数码 i 和 $i+1$ 相应的 O_n 张量指标的迹收缩。即

$$\begin{aligned} g_i T^{12\cdots f}_{i_1 i_2 \cdots i_f} &= T^{12\cdots i-1\, i+1\, i\, i+2 \cdots f}_{i_1 i_2 \cdots i_{i-1} i_i i_{i+1} i_{i+2} \cdots i_f}, \\ e_i T^{12\cdots f}_{i_1 i_2 \cdots i_f} &= \delta_{i_i i_{i+1}} T^{12\cdots i\, i+1 \cdots f}_{i_1 i_2 \cdots i_i i_i \cdots f}. \end{aligned} \tag{9}$$

设 $\{T^{12\cdots f}_{i_1 i_2 \cdots i_f}\}$ 张成正交归一的内积空间,即满足

$$(T^{1'2'\cdots f'}_{i'_1 i'_2 \cdots i'_f},\ T^{12\cdots f}_{i_1 i_2 \cdots i_f}) = \Pi\, \delta_{ii'} \delta_{i_i i'_i}. \tag{10}$$

$D_f(n)$ 的基矢可用(8)诱导出来。首先考虑如下具有 k 次收缩的基矢

$$\begin{aligned} 1(\widehat{12}\widehat{34}\cdots\widehat{2k-1\ 2k})(\omega_0) &= (2k+1, 2k+2, \cdots, f)\rangle \\ &\equiv e_1, e_3 \cdots e_2 k - 1\ T^{12\cdots f}_{i_1 i_2 \cdots i_f}. \end{aligned} \tag{11}$$

则任意的正规序基矢[6]可写为

$$\begin{aligned} &|(\widehat{a_1 a_2}\widehat{a_3 a_4}\cdots\widehat{a_{2k-1} a_{2k}})(\omega') = (a_{2k+1}, a_{2k+2}, \cdots, a_f)\rangle \\ &= Q_\omega |(\widehat{12}\widehat{34}\cdots\widehat{2k-1\ 2k})(\omega_0)\rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $a_1 < a_2, a_3 < a_4, \cdots, a_{2k-1} < a_{2k}; a_{2k+1} < a_{2k+2} < \cdots < a_f$。而 Q_ω 是在左陪集分解

$$S_f = \sum_{\omega} Q_{\omega}((S_2)^k \otimes S_{f-2k}) \tag{13}$$

中的代表元素。在(12)中实际收缩掉了 $2k$ 个数码，而余下的 $f-2k$ 个数码 $a_{2k+1}, a_{2k+2}, \cdots, a_f$ 可按 S_{f-2k} 来定义其置换对称性，即对任一 $S_{f-2k}(\omega')$ 的不可约表示，用 $|Y^{[\lambda]}_m(\omega')\rangle$ 来标记其基矢，其中[λ]是具有 $f-2k$ 个方块的杨图，(ω') 是在标准杨图 $Y^{[\lambda]}_m$ 中所填入的 $f-2k$ 个数码。

引理：$\{Q_\omega|(\widehat{12}\widehat{34}\cdots\widehat{2k-1\ 2k})Y^{[\lambda]}_m(\omega_0)\rangle\}$ 张成的空间 $V^{[\lambda]}_k$ 是 $D_f(n)$ 不变的。

对任意的 $b\in D_f(n)$，b 与 Q_ω 的乘积总可表为 $D_f(n)$ 的元素。故只需证明基本元素 g_i, e_i 作用在 $|(\widehat{12}\widehat{34}\cdots\widehat{2k-1,2k})Y^{[\lambda]}_m(\omega_0)\rangle$ 上仍然是 $V^{[\lambda]}_k$ 中的矢量即可。利用 e_i 和 g_i 的代数关系容易证明这一点，故 $V^{[\lambda]}_k$ 是 $D_f(n)$ 不变的。利用这一结果，容易知道，$D_f(n)$ 的任一具有 $f-2k$ 个方块的杨图的不可约表示的基矢可表为 $V^{[\lambda]}_k$ 中矢量的线性组合。从(12)的构造过程及文献[5]的结果知，我们实际上做了如下诱导表示，即 $(D_2\otimes)^k D_{f-2k}\downarrow D_f$，关于外积 $([0]\otimes)^k[\lambda]\downarrow[\lambda]$。$V^{[\lambda]}_k$ 正是非耦合正规序基矢张成的空间[6]。根据文献[2—4]的结果知，具有 $f-2k$ 个方块的杨图标记的 $D_f(n)$ 的表示 $[\lambda]$ 是不可约的。

利用以上结果，容易证明如下定理。

定理：$D_f(n)$ 不可约表示 $[\lambda]_{f-2k}$ 的维数可用如下公式计算

$$\dim(D_f(n);[\lambda]_{f-2k}) = \frac{f!}{(f-2k)!(2k)!!}\dim(S_{f-2k};[\lambda]),$$

其中 $[\lambda]_{f-2k}$ 表示只有 $f-2k$ 个方块的杨图，而 $\dim(S_{f-2k};[\lambda])$ 是 S_{f-2k} 不可约表示[λ]的维数，可用已知的对称群维数公式表出。

证明：实际上，$\dim(D_f(n);[\lambda]_{f-2k}) = \dim V^{[\lambda]}_k$。考虑 $T^{12\cdots f}_{j_1j_2\cdots j_f}$ 中不同数码对应的指标 $(j_1j_2\cdots j_f)$ 的迹收缩。一次收缩的方案数为 $\binom{f}{2} = f!/(f-2)!2!$；而两次收缩不重复计入同两对指标的方案数为 $\binom{f}{2}\binom{f-2}{2}\Big/2!$；$\cdots$；$k$ 次收缩不重复计入同 k 对指标的方案数为 $\binom{f}{2}\binom{f-2}{2}\cdots\binom{f-2k+2}{2}\Big/k! = f!/(f-2k)!(2k)!!$。而未收缩部分 $Y^{[\lambda]}_m(\omega')$ 的维数可用 S_{f-2k} 关于不可约表示[λ]的维数公式来计算，故定理得证。

我们知道，$D_f(n)$ 和 Birman-Wenzl 代数 $C_f(q,r)$ 当 q，r 都不是单位根时的约化规则完全相同[4]，同样地，也与 $D_f(x)$ 当 x 为任意实数时的约化规则一致。特别地，当 n 为整数时，$D_f(n)$ 与 $C_f(q,q^{n-1})$ 当 $q\to 1$ 时的代数同构。所以该定理也同样适用于 Birman-Wenzl 代数 $C_f(q,r)$ 当 q,r 均非单位根时，及 $D_f(x)$ 当 x 不是整数时的情形。从而不必再象文献[2—4]中所指出的那样，仅依靠 Bratteli 图来对这些不可约表示的维数进行递推计算。显然这种递推计算对高维表示是不适用的。

到此，我们已利用诱导表示构造出了 $D_f(n)$ 不可约表示的非耦合基，其耦合基可利用诱导系数来决定，从而完全确定 $D_f(n)$ 不可约表示基本元素的矩阵元，对此我们将另文讨论[6]。特别地我们给出了 $D_f(n)$ 及 $C_f(q,r)$ 当 q，r 均非单位根时不可约表示的维

数公式。

最后，我们仅给出一个 $f=3$ 时不可约表示构造的例子，具体见 [9]。$D_3(n)$ 具有三个方块杨图所标记的不可约表示与 S_3 完全一致，其中，$e_1=e_2=0$，即不存在迹收缩。当存在一次收缩时，其不可约表示为[1]，它是三维的，其耦合基可记为 $\left|\begin{matrix}[1]\\ 0\end{matrix}\right\rangle$，$\left|\begin{matrix}[1]\\ \boxed{1}\boxed{2}\end{matrix}\right\rangle$，$\left|\begin{matrix}[1]\\ \boxed{1}\\ \boxed{2}\end{matrix}\right\rangle$。耦合基可用以上讨论的非耦合基 $|1\rangle=|\widehat{12}3\rangle$，$|2\rangle=|1\widehat{23}\rangle$，$|3\rangle=|\widehat{123}\rangle$ 来展开，其结果为

$$\left|\begin{matrix}[1]\\ 0\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{n}}\,|1\rangle,$$

$$\left|\begin{matrix}[1]\\ \boxed{1}\boxed{2}\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{n}{2(n+2)(n-1)}}\left(\frac{2}{n}|1\rangle-|2\rangle-|3\rangle\right),$$

$$\left|\begin{matrix}[1]\\ \boxed{1}\\ \boxed{2}\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\,(|2\rangle-|3\rangle), \tag{14}$$

其中非耦合基显然是不正交的，其度规矩阵为

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 1\\ 1 & n & 1\\ 1 & 1 & n\end{pmatrix}. \tag{15}$$

而这样定义的耦合基是正交归一的。可以证明[6]，在耦合基(14)下基本元素的矩阵元为

$$g_1=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix},\quad e_1=\begin{pmatrix} n & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

$$g_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & -\sqrt{\frac{(n+2)(n-1)}{2n^2}} & \sqrt{\frac{n-1}{2n}}\\ -\sqrt{\frac{(n+2)(n-1)}{2n^2}} & \frac{n-2}{2n} & \sqrt{\frac{n+2}{4n}}\\ \sqrt{\frac{n-1}{2n}} & \sqrt{\frac{n+2}{4n}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$e_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & -\sqrt{\frac{(n+2)(n-1)}{2n^2}} & -\sqrt{\frac{n-1}{2n}}\\ -\sqrt{\frac{(n+2)(n-1)}{2n^2}} & \frac{(n+2)(n-1)}{2n} & \frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{n+2}{n}}\\ -\sqrt{\frac{n-1}{2n}} & \frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{n+2}{n}} & \frac{n-1}{2}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中 n 可为任意实数。利用类似的方法，我们还可以构造出 Birman-Wenzl 代数的不可

约表示，其结果将另文发表。

参 考 文 献

[1] R. Brauer, *Ann. Math.*, **38** (1937) 857.
[2] J. Birman, H. Wenzl, *Trans.*, *AMS* **313** (1989) 249.
[3] H. Wenzl, *Ann. Math.*, **128** (1988) 123.
[4] H. Wenzl, *Commun. Math. Phys.*, **133** (1990) 383.
[5] 马中骐，杨-巴克斯特方程和量子包络代数，第一章，1993，科学出版社，北京.
[6] F. Pan, J. Q. Chen, *J. Math. Phys.*, **34** (1993)4305;4316.
[7] Feng Pan, J. Phys. A:Math. Gen., 1995, to be publishd.

Dimension Formula and an Irreducible Basis of Brauer Algebras

Pan Feng

(*Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian* 116022)

Received 20 December 1994

Abstract

The irreducible representations of Brauer algebras are constructed using an induced representation method. A dimension formula for calculating the irreducible representations of Brauer algebras is derived.

Key words Brauer algebra, dimension formula, irreducible representations.