第19卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 19, No. 6
1995年6月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS June, 1995

一种包括三代费米子的统一模型*

陈 风 至
(浙江大学物理系 杭州 310027)
匀 亮
(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

1994-03-29 收稿

摘 要

提出了一种定义在10维时空上的 $SO(17)$ 统一模型，通过相对于陪集空间 $SU(3)/U(1)\times U(1)\times Z_2$ 的维度退化，得到了具有三代轻费米子的标准模型.

关键词 陪集空间，维度退化，标准模型，大统一理论.

1 引 言

尽管迄今为止无一实验结果与标准模型相冲突，但它仍存在一些令人不满意之处. 其中 Higgs 势的来源和费米子存在性问题，就是人们十分感兴趣的问题. 近年来，研究这些问题的一个有效方法，就是被称之为陪集空间维度退化（CSDR）方案[1]. 它具有参数少，预言性强等优点. 目前，利用这种方法有人已提出 $SO(13)$[2] 统一模型和 $SO(16)$ 统一模型[3]. 本文提出了一种包括三代轻费米子的 $SO(17)$ 统一模型.

本文安排如下，第二节简略地回顾一下维度退化的基本内容，第三节详细地介绍 $SO(17)$ 统一模型，最后，进行讨论和总结.

2 CSDR 方 案

考虑 D 维时空流形 $M^D = M^4 \times S/R$，其中 M^4 是四维 Minkowski 空间，S/R 是紧致的 N 维陪集空间，$D = 4 + N$. 定义在 M^D 上的规范群 G 的 Yang-Mills-Dirac 理论的作用量可写为:

$$A = \int d^4x d^4y \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F_{MN}F_{KA})g^{MK}g^{NA} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{\Phi}\Gamma^M D_M \phi\right), \tag{1}$$

式中 x 是 M^4 上的坐标，y 是陪集空间 S/R 上的坐标. 假定场 A_μ, ϕ 具有 S 不变性，即 S 作用在 S/R 上的任何对称变换都可被 G 中的规范变换所抵消. 那么，A_μ 和 ϕ 对陪集

* 国家自然科学基金、中国科学院特殊资助.

空间坐标的依赖就是完全确定的. 通过求出(1)式中的陪集空间坐标的积分,就可以得到四维时空的有效理论:

$$A = C\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\sum_a \mathrm{Tr}(\mathrm{D}_\mu\phi_a\mathrm{D}^\mu\phi_a - V(\phi)\right]$$
$$+ C\int \mathrm{d}^4x\,\frac{1}{2}\,\mathrm{i}(\bar{\psi}\Gamma^\mu\mathrm{D}_\mu\psi + \bar{\psi}\Gamma^a\mathrm{D}_a\psi), \qquad (2)$$

式中 C 是陪集空间的体积, D_μ 和 D_a 是适当的协变导数,势 $V(\phi)$ 为:

$$V(\phi) = \frac{1}{4}g^{ac}g^{bd}\mathrm{Tr}\{(f^d_{ab}\phi_d - [\phi_a,\phi_b])(f^e_{cd}\phi_e - [\phi_c,\phi_d])\}, \qquad (3)$$

式中 ϕ_a 是标量场,由规范群 G 的 Lie 代数决定. a,b,c 和 d 是在 S 作用下变化的指标, f^d_{ab} 是 S 的结构常数.

这种对所有场都施加 S 不变性使时空维度自恰地减少,从而获得四维有效理论的方法,称为陪集空间维度退化方案. 运用 CSDR 方案构造统一理论,归结为选择规范群,求出四维等效理论的规范群,存活的标量场和费米子场.

S 不变性要求维度退化前的规范场 A_M 在 M^4 上的分量满足:

$$A_\mu(x,y) = g(s)A_\mu(x,s^{-1}y)g^{-1}(s), \qquad (4)$$

式中 $g(s)$ 是 S/R 上的规范变换. 维度退化后, A_μ 变为四维规范场,且与 y 无关. 从(4)式不难看出,它们与 R 在 G 中的同态映象 R_G 对易. 因此,四维规范群 H 是 R_G 在 G 中的中心化子 (ceutralizer).

如何找出存活的标量场? 为了满足 S 不变性, $V(\phi)$ 中的 ϕ 必须满足如下约束条件:

$$f^b_{ai}\phi_b - [\phi_a,\phi_i] = 0, \qquad (5)$$

式中 i 是 S 的 R 子代数指标. 从(5)式可知, ϕ_a 的某些分量是零,有些分量是常数,而其余分量可视为真实 Higgs 场. 对于 R 可以嵌入 G 中的情形,利用群论即可找出真实 Higgs 场[4]. 为此,将 S 的伴随表示分解为 R 的不可约表示

$$\mathrm{ad}S = \mathrm{ad}R + \boldsymbol{v}, \qquad (6)$$

式中 $\boldsymbol{v} = \sum S_k$, S_k 是 R 的不可约表示. 再将 G 的伴随表示分解为 $R_G\times H$ 的不可约表示:

$$\mathrm{ad}G = \sum(r_k,h_k), \qquad (7)$$

式中 r_k 和 h_k 分别是 R_G 和 H 的不可约表示. 这样, 对于每一对全同表示 r_k 和 s_j, 在四维理论中就存在一个 Higgs 多重态 h_k.

为求出存活的费米场[4],首先将 R 嵌入 S/R 的 Lorentz 群 $SO(N)$ 中,使 $SO(N)$ 的矢量表示 N 的分解规则与 $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}$ 的意义见(6)式)等同,然后取 $SO(N)$ 的旋量 σ, 并将它分解为 R 的不可约表示:

$$\sigma = \sum\sigma_j, \qquad (8)$$

再将赋予费米子的规范群 G 的表示 F 分解为 $R_G\times H$ 的不可约表示:

$$F = \sum(r_k,h_k), \qquad (9)$$

这样,对于每一对全同表示 r_k 和 σ_j, 在四维理论中都存在一个费米子多重态 h_k (详见

参考文献[5,6]). 下面用 CSDR 方案求出我们模型的四维规范场、标量场和费米场.

3 模　　型

考虑到 10 维理论在超弦理论中的作用，我们提出 10 维时空中的 $SO(17)$ 规范理论、陪集空间取为 $S/R = SU(3)/U(1) \times U(1)$. 按照第二节的方法，四维规范群 H 是 R 在 G 中的中心化子. 因此，需要知道 $R = U(1) \times U(1)$ 在 $SO(17)$ 中的嵌入. 为此，将规范群 $SO(17)$ 分解为:

$$SO(17) \supset SO(10) \times SO(7)$$

其中 $SO(10)$ 与 $SO(7)$ 又可分解为:

$$SO(10) \supset SU(5) \times \tilde{U}(1)_{\mathrm{II}}$$

$$SO(7) \supset SU(4) \supset SU(3) \times \tilde{U}(1)_{\mathrm{I}}$$

综合起来，

$$SO(17) \supset SU(5) \times SU(3) \times \tilde{U}(1)_{\mathrm{I}} \times \tilde{U}(1)_{\mathrm{II}}. \tag{10}$$

将上式中 $\tilde{U}(1)_{\mathrm{I}} \times \tilde{U}(1)_{\mathrm{II}}$ 视为 R 在 G 中的映象. 因此，四维规范群就是 $H = C_{SO(17)} = SU(5) \times SU(3)$. 可把 $SU(5)$ 解释为大统一 (GUT) 规范群，$SU(3)$ 可解释为导致三代轻费米子的水平对称性.

为了求得存活的标量场，首先求出 $SO(17)$ 的伴随表示在 $SU(5) \times SU(3) \times \tilde{U}(1)_{\mathrm{I}} \times \tilde{U}(2)_{\mathrm{II}}$ 下的分解规则:

$$\begin{aligned}136 = &(1,10)(0,4) + (1,24)(0,0) + (1,1)(0,0) + (1,5)(0,2)\\ &+ (3,5)(2,2) + (\bar{3},5)(-2,2) + (3,\bar{5})(2,-2) + (\bar{3},\bar{5})(-2,-2)\\ &+ (1,\overline{10})(0,-4) + (1,\bar{5})(0,-2) + (8,1)(0,0) + (1,1)(0,0)\\ &+ (3,1)(2,0) + (\bar{3},1)(-2,0) + (3,1)(-4,0) + (\bar{3},1)(4,0),\end{aligned} \tag{11}$$

$SU(3)$ 的伴随表示在 $R = U(1) \times U(1)$ 下的分解为:

$$\begin{aligned}8 = &(0,0) + (0,0) + (1,3) + (-2,-2)\\ &+ (-1,1) + (-1,-3) + (2,2) + (1,-1),\end{aligned} \tag{12}$$

因此，按第二节给出的规则，在四维理论中存活的标量场在 $H = SU(5) \times SU(3)$ 下，象复标量场 $\beta = (3,5)$ 那样变换.

再求存活的费米子场. 按照第二节给出的规则，首先赋予 10 维时空的费米子以 $SO(17)$ 的旋量表示 F. 并且，为了得到四维理论的手征费米子，同时附加 Weyl 条件和 Majorana 条件. 首先将 F 分解为 $SU(5) \times SU(3) \times \tilde{U}(1)_{\mathrm{I}} \times \tilde{U}(1)_{\mathrm{II}}$ 的不可约表示，求得其分解规则:

$$\begin{aligned}256 = &(1,1)(3,-5) + (1,\bar{5})(3,3) + (1,10)(3,-1) + (3,1)(-1,-5)\\ &+ (3,\bar{5})(-1,3) + (3,10)(-1,-1) + (1,1)(-3,-5) + (1,\bar{5})(-3,3)\\ &+ (1,10)(-3,-1) + (\bar{3},1)(1,-5) + (\bar{3},\bar{5})(1,3) + (\bar{3},10)(1,-1)\\ &+ (1,1)(3,5) + (1,5)(3,-3) + (1,\overline{10})(3,1) + (3,1)(-1,5)\\ &+ (3,5)(-1,-3) + (3,\overline{10})(-1,1) + (1,1)(-3,5) + (1,5)(-3,-3)\\ &+ (1,\overline{10})(-3,1) + (\bar{3},1)(1,5) + (\bar{3},5)(1,-3) + (\bar{3},\overline{10})(1,1),\end{aligned} \tag{13}$$

相应地求出 $SO(6)$ 的旋量表示在 $R = U(1)\times U(1)$ 下的分解规则:

$$4 = (0,0) + (1,3) + (2,-2) + (1,-1), \tag{14}$$

比较(13)和(14)式，可求得四维理论中存活的费米子在四维规范群H下，象$(3,\bar{5})$和$(\bar{3},10)$那样变换.

至此,得到了 $SU(5)$GUT，其中有三代费米子和三个复标量场. 下一步的任务是如何将 $SU(5)$ 规范群破缺为标准模型. 由于这里缺少破缺 $SU(5)$ 的 Higgs 多重态，我们采用 Wilson 流线破缺机制 (*flux*)[4]. 为保持 $SU(3)_c\times SU(2)_w\times U(1)_Y$ 对称的 Wilson 流线, U 必须是超荷 Y 产生的 $U(1)$ 群的元素. 在 $SU(5)$ 中超荷为:

$$Y = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

因此, U 必须具有如下的形式:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ & \alpha & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \beta & \\ & & & & \beta \end{pmatrix} \tag{16}$$

式中 $\alpha^3\beta^2 = 1$, $\alpha^2 = \beta^2 = 1$. 如果以非单连通的陪集空间 $SU(3)/U(1)\times U(1)\times \mathbf{Z}_2$ 代替 $SU(3)/U(1)\times U(1)$，那么U可具有(16)式的形式. 因此,就可以用 Wilson 流线将 $SU(5)$ 破缺为标准模型 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$.

最后，我们讨论标准模型 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 破缺为 $SU(3)_c\times U(1)_{em}$. 为此，将仔细讨论 Higgs 势. (3)式只是形式上的 Higgs 势，为研究其具体形式，需要 $SO(17)$的生成元与$SU(3)$生成元之间的对易关系. 首先引入与分解式相对应的$SO(17)$的生成元:

$$\{Q^{\lambda}_{SO(17)}\} = \{Q_0, Q_a, Q^a, Q_{ab}, Q^{ab}, Q^{\alpha}, Q_{ia}, Q^a_i, Q^i_a, Q^{ia}, Q'_0, Q_i, Q^i, \widetilde{Q}_i, \widetilde{Q}^i, Q^{\rho}\},$$

式中 $a,b = 1,2,\cdots,5$; $\alpha = 1,2,\cdots,24$; $i,j = 1,2,3$ 及 $\rho = 1,2,\cdots,8$. 与构造 Higgs 势有关的对易关系列于表 1.

表 1　与构造 Higgs 势有关的 $SO(17)$ 生成之间的对易关系

$[Q_{ai}, Q_0] = -\frac{1}{\sqrt{10}}Q_{ai}$,	$[Q_{ai}, Q^{bj}] = -\delta^j_i\left(\frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}\right)^b_a Q_{\alpha}$
$[Q_{ai}, Q'_0] = -\frac{1}{\sqrt{6}}Q_{ai}$,	$-\delta^b_a\left(\frac{1}{2}\lambda^{\rho}\right)^j_i Q_{\rho} + \frac{1}{\sqrt{10}}\delta^j_i\delta^b_a Q_0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\delta^b_a\delta^j_i Q'_0$
$[Q^a_i, Q_0] = \frac{1}{\sqrt{10}}Q^a_i$,	$[Q^i_a, Q^b_j] = -\delta^i_j\left(\frac{1}{2}\Lambda^{\alpha}\right)^b_a Q_{\alpha}$
$[Q^a_i, Q'_0] = -\frac{1}{\sqrt{6}}Q^a_i$,	$+\delta^b_a\left(\frac{1}{2}\lambda^{\rho}\right)^i_j Q_{\rho} + \frac{1}{\sqrt{10}}\delta^i_j\delta^b_a Q_0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\delta^b_a\delta^i_j Q'_0$

其中 Λ^{α} 是 $SU(5)$ 的 24 个 5×5 矩阵, λ^{ρ} 是 $SU(3)$ 的 8 个 3×3 Gell-maun 矩阵,

归一化条件为 $\mathrm{Tr}(\Lambda^{\alpha}\Lambda^{\beta})=2\delta^{\alpha\beta}$ 和 $\mathrm{Tr}(\lambda^{\rho}\lambda^{\sigma})=2\delta^{\rho\sigma}$。

同样地，引入与分解规则(12)相对应的 $SU(3)$ 生成元：

$$\{T^{\beta}_{SU(3)}\}=\{T_{a},T'_{a},T_{1},T_{2},T_{3},T^{1},T^{2},T^{3}\},$$

求出的非零对易关系列入表 2。

表 2　与(12)式分解规则相对应的 $SU(3)$ 生成元之间的非零对易关系

$[T_1,T_0]=-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}-1\right)T_1,$	$[T_1,T^1]=\frac{3}{4}(\sqrt{3}-1)T_0+\frac{1}{4}(3\sqrt{3}+5)T'_0,$
$[T_1,T'_0]=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)T_1,$	$[T_2,T^2]=-\frac{3}{4}(\sqrt{3}+1)T_0-\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-5)T'_0,$
$[T_2,T_0]=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}+1\right)T_2,$	$[T_3,T^3]=-\frac{1}{2}(3T_0-5T'_0),$
$[T_2,T'_0]=-\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+1)T_2,$	$[T_1,T_2]=\sqrt{2}T_3,$
$[T_3,T_0]=T_3,$	$[T_2,T^3]=\sqrt{2}T^1,$
$[T_3,T'_0]=-T_3,$	$[T^1,T_3]=\sqrt{2}T_2,$

为把形式上的 Higgs 势(3)用真实 Higgs 场表示，将标量场记为：

$$\phi_{s}=\{\phi_0,\phi'_0,\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi^1,\phi^2,\phi^3\},\tag{17}$$

代入约束条件(5)，解得：

$$\phi_0=\frac{\sqrt{10}}{2}\left(1-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)Q_0,$$
$$\phi'_0=-\frac{\sqrt{6}}{2}(1+\sqrt{3})Q'_0,\tag{18}$$
$$\phi_1=\beta_{ia}Q^{ia},\quad \phi^1=\beta^{ia}Q_{ia},$$

所有其他的 ϕ 均为零。

不失普遍性，对于出现在(3)式中的生成元乘积的迹，作如下约定：

$$\mathrm{Tr}\{Q_0^2\}=\mathrm{Tr}\{Q_0'^2\}=\mathrm{Tr}\{Q_{ia}Q^{ia}\}=2.$$

为确定 Higgs 势中矩阵 $h=\|g^{ab}\|$，假定 h 是 $\widetilde{U}(1)_{\mathrm{I}}\times\widetilde{U}(1)_{\mathrm{II}}$ 不变的，于是有：

$$g_{aa}=g^{aa}=\frac{1}{R_a^2},\quad g_{ab}=g^{ab}=0,\quad a\neq b,a,b=1,2,3,$$

陪集空间半径参数 $R_{(1)},R_{(2)}$ 和 $R_{(3)}$ 对应于分解式(17)的多重态 ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3。由于度规之实数性质，与 ϕ^a 对应的半径参数 $R_{(\bar a)}$ 等于 $R_{(a)}$。

综合以上结果，我们得到：

$$V_{4-\mathrm{dim}}(\phi)=\frac{117-24\sqrt{3}}{g^2R_{(1)}^4}+\frac{27+6\sqrt{3}}{g^2R_{(2)}^4}+\frac{90}{g^2R_{(3)}^4}$$
$$+\frac{4}{g^2}\left(\frac{1}{R_{(2)}^2R_{(3)}^2}-\frac{2}{R_{(1)}^4}\right)(\beta_{ia}\beta^{ia})+\frac{1}{g^2R_{(1)}^4}(\beta_{ia}\beta_{ia})^2,\tag{19}$$

式中 g 为 10 维理论的耦合常数。由 (19) 式容易看出，对于半径参数 $R_{(a)}$ 的很大的范围，电弱对称性破缺都会发生。但这里破缺标度要求 $R_{(a)}$ 具有 Fermi 标度的量级（$\sim10^{-15}$cm)，而 DR 理论通常假定 $R_{(a)}$ 可与普朗克标度（$\sim10^{-33}$cm）相比[6]。为了与

标准模型相一致，我们引入关系式 $R_{(1)}^2=\sqrt{2}R_{(2)}\cdot R_{(3)}$，使得经典真空期望值为零。而电弱统一的对称性自发破缺则可通过高级图的辐射修正来实现。

4 结 论

我们建立了一个定义在10维时空上的 $SO(17)$ 规范群统一模型。通过陪集空间维度退化得到了包括三代轻费米子的四维时空 $SU(5)\times SU(3)$ 统一理论。作为四维大统一规范群的 $SU(5)$ 通过 Wilson 流破缺机制，破缺为标准模型 $SU(3)_c\times SU(2)_w\times U(1)_Y$。最后，利用来源于几何(陪集空间维度退化后得到的)的 Higgs 场将标准模型破缺为 $SU(3)_c\times U(1)_{em}$。为了得到具有费米长度量级的真空期望值，我们假定半径参数间具有 $R_{(1)}^2=\sqrt{2}R_{(2)}R_{(3)}$ 的关系。对该模型需要进一步探讨的是，这样的统一模型能否得到与实验相符的质子衰变寿命。

参 考 文 献

[1] K. J. Barnes, M. Surridge, *Z. Phys.*, **C33**(1986)89.
[2] D. Kapetanakis, G. Zoupanos, *Phys. Lett.*, **B249**(1990)66.
[3] B. E. Hanlon, G. C. Joshi, *Phys. Lett.*, **B298**(1993)312.
[4] G. Zoupanos, *Phys. Lett.*, **B201**(1988)301.
[5] P. Forgacs, Manton, *Commun. Math. Phys.*, **72**(1980)15.
[6] N. S. Manton, *Nucl. Phys.*, **B193**(1981)502; G. Chapline, R. Slansky, *Nucl. Phys.*, **B209**(1982)461.

Unified Model Accomodating Three Generations of Fermions

Chen Fengzhi

(*Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Gou Liang

(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

Received 29 March 1994

Abstract

An $SO(17)$ unified model defined in ten dimensions is presented. The model is dimensionally reduced over the coset space $SU(3)/U(1)\times U(1)\times Z_2$, giving in four dimensions the standard model with three generations of light fermions.

Key words coset space, dimensional reduce, standard model, grand unified theory.