

有限温度下的 Casimir 效应*

郑泰玉

(东北师范大学物理系, 长春 130024)
1993-12-24 收稿

摘 要

利用路径积分量子化方法, 计算出两个平行的、理想的金属板之间, 在有限温度下自由的量子电磁场和内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献。

关键词 Casimir 效应, 路径积分, 量子电磁场

随着量子测量理论研究的开展, 人们对 Casimir 效应方面的研究兴趣日趋增加。近年来, 人们作出了不少工作^[1-6]。本文采用 Feynman 的路径积分量子化方法, 计算出置于真空中相距为 a 的两个平行的、理想的金属板之间, 在有限温度下量子电磁场对 Casimir 力的贡献 (图 1)。不仅得到绝对零度下量子电磁场对 Casimir 力贡献的前二级近似, 即自由电磁场^[7]和内部费米子单圈图的贡献^[2], 而且得到有限温度下自由电磁场和内部费米子单圈图的贡献。

在欧氏空间中, 真空的自由能为

$$E_0 = F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad (1)$$

其中 $\beta = \frac{1}{kT}$; Z 为真空到真空的跃迁振幅, 在 $U(1)$ 情况下, 根据文献[2]中(4)式的计算, Z 可取为

$$Z = \prod_k k^2 e^{i\pi \ln(\rho+m)} \prod_k \left\{ \frac{1}{g} (k^2)^4 \left[1 - \frac{e'^2}{2\pi^2} \times \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left(\frac{z(1-z)k^2}{m^2} + 1 \right) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

其中 e' 是无量纲数; g 是固定规范项。把(2)式代入(1), 并仿照文献[2]中(14)式的计算, 可得

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{\beta} \left[\sum_k \ln k^2 - \frac{3\alpha}{\pi} \sum_k \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left(\frac{z(1-z)k^2}{m^2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{i_3=1}^{\infty} \sum_{i_4=-\infty}^{\infty} \left(\frac{L}{2\pi\hbar c} \right)^2 \int dk_1 \int dk_2 \left\{ \ln \left[k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3\pi\hbar c}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_4}{\beta} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\pi l_3\hbar c}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_4}{\beta} \right)^2 + \frac{m^2 c^4}{z(1-z)} \right] \right\} \end{aligned}$$

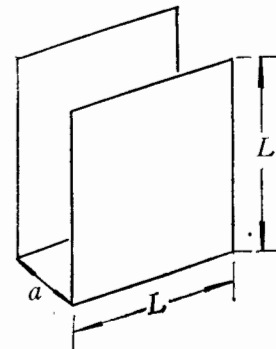


图 1

* 国家自然科学基金资助。

$$-\frac{3\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \frac{m^2 c^4}{z(1-z)} \}. \quad (3)$$

其中引入 $\alpha \equiv \frac{e'^2}{4\pi}$, α 是精细结构常数, 对 l_i 求和并抛掉与 a 无关项, 则得

$$E_0 = \sum_{l_i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{2\pi\hbar c} \right)^2 \int dk_1 \int dk_2 \left\{ \left[\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3 \pi \hbar c}{a} \right)^2} + \frac{2}{\beta} \ln \left(1 - e^{-\beta \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3 \pi \hbar c}{a} \right)^2}} \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{3\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \left[\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3 \pi \hbar c}{a} \right)^2} + \frac{m^2 c^4}{z(1-z)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\beta} \ln \left(1 - e^{-\beta \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3 \pi \hbar c}{a} \right)^2 + \frac{m^2 c^4}{z(1-z)}}} \right) \right] \right\}. \quad (4)$$

令 $m = 0$, 则(4)式变为

$$E_0 = \sum_{l_i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{2\pi\hbar c} \right)^2 \int dk_1 \int dk_2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3 \pi \hbar c}{a} \right)^2} \\ + \sum_{l_i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{2\pi\hbar c} \right)^2 \int dk_1 \int dk_2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{2}{\beta} \ln \left(1 - e^{-\beta \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3 \pi \hbar c}{a} \right)^2}} \right). \quad (5)$$

令

$$E_{01} = \sum_{l_i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{2\pi\hbar c} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int dk_1 \int dk_2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3 \pi \hbar c}{a} \right)^2}, \quad (6)$$

$$E_{02} = \sum_{l_i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{2\pi\hbar c} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int dk_1 \int dk_2 \frac{2}{\beta} \ln \left(1 - e^{-\beta \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{l_3 \pi \hbar c}{a} \right)^2}} \right). \quad (7)$$

则

$$E_0 = E_{01} + E_{02}. \quad (8)$$

(6)式是以前得到的研究结果^[2],

$$E_{01} = - \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{L^2 \pi^2}{720 a^3}. \quad (9)$$

而(7)式则是本文的研究重点. 下面首先利用泊松求和公式把(7)式变为

$$E_{02} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{L}{2\pi\hbar c} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{1}{\beta} \int dk_1 \int dk_2 \int dz \ln \left(1 - e^{\beta \hbar c \sqrt{\left(\frac{k_1}{\hbar c} \right)^2 + \left(\frac{k_2}{\hbar c} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2}} \right) e^{2\pi i n z}. \quad (10)$$

再令

$$\frac{k_1}{\hbar c} = k \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{k_2}{\hbar c} = k \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{\pi z}{a} = k \cos \theta.$$

则(10)式变为

$$E_{02} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi k^2 \ln \left(1 - e^{-\beta \hbar c k} \right) \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n a k \cos \theta} \sin \theta \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \\ = - \frac{2L^2 a \hbar c}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(2an)^2 + (\beta \hbar c m)^2 \right]^{-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right). \quad (11)$$

其中已利用公式

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} \sin bx dx = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2} \quad (a > 0).$$

首先讨论低温情况, 即 $\beta\hbar c \gg 2a$. 利用公式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + a^2)^{-2} = -\frac{1}{2a^4} + \frac{\pi}{4a^3} \cot \pi a + \frac{\pi^2}{4a^2} \frac{1}{\sin^3 \pi a}. \quad (12)$$

对(11)式中 n 求和, 整理后得

$$E_{02} = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \left\{ \frac{2L^2 a}{\pi^2 \beta^4 (\hbar c)^3} \zeta(4) - \frac{L^2}{\pi \beta^3 (\hbar c)^2} \times \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^3} \frac{e^{-\frac{\pi \beta \hbar c m}{a}}}{(1 - e^{-\frac{\pi \beta \hbar c m}{a}})} + \frac{\pi \beta \hbar c}{a m^3} \frac{e^{-\frac{\pi \beta \hbar c m}{a}}}{(1 - e^{-\frac{\pi \beta \hbar c m}{a}})^2} \right] \right\}. \quad (13)$$

因 $\beta\hbar c \gg 2a$, 只取 $m=1$ 项, 则有

$$E_{02} \approx \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \left[\frac{2L^2 a}{\pi^2 \beta^4 (\hbar c)^3} \zeta(4) - \frac{L^2}{\pi \beta^3 (\hbar c)^2} \left(1 + \frac{\pi \beta \hbar c}{a}\right) e^{-\frac{\pi \beta \hbar c}{a}} \right]. \quad (14)$$

把(9)和(14)式代入(8)式, 则得低温情况下的 Casimir 能量:

$$E_{\text{总}} = -\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{L^2 \pi^2}{720 a^3} + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \left[\frac{L^2 a \pi^2}{45 \beta^4 (\hbar c)^3} - \frac{L^2}{\pi \beta^2 (\hbar c)^2} \left(1 + \frac{\pi \beta \hbar c}{a}\right) e^{-\frac{\pi \beta \hbar c}{a}} \right]. \quad (15)$$

所以, 在低温情况下, 单位面积金属板上所受到的 Casimir 力为

$$F_{\text{总}} = -\frac{\partial E_{\text{总}}}{L^2 \partial a} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^2} + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} + \left(-\frac{16 a^4}{3(\beta \hbar c)^4} + \frac{240}{\pi} \frac{a}{\beta \hbar c} e^{-\frac{\pi \hbar c \beta}{a}} \right) \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} + \frac{\alpha}{2\pi} \left(-\frac{16 a^4}{3(\beta \hbar c)^4} + \frac{240 a}{\pi \beta \hbar c} e^{-\frac{\pi \hbar c \beta}{a}} \right) \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}. \quad (16)$$

(16)式右端第一项是 Casimir 的结果^[7], 即绝对零度下, 自由电磁场对 Casimir 力的贡献; 第二项是我们以前研究的结果^[2], 即绝对零度下内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献; 第三项是 Mehra 的研究结果^[8], 即在低温情况下自由电磁场对 Casimir 力的贡献; 第四项则是本文给出的新结果, 即在低温情况下内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献.

下面讨论高温情况, 即 $\beta\hbar c \ll 2a$. 再利用(12)式对(11)式中 m 求和, 整理得

$$E_{02} = \left\{ \frac{L^2 \hbar c \pi^4}{720 \pi^2 a^3} - \frac{1.2 L^2}{8 \pi a^2 \beta} - \frac{L^2}{4 \pi a^2 \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} \frac{e^{-\frac{4 \pi a n}{\beta \hbar c}}}{(1 - e^{-\frac{4 \pi a n}{\beta \hbar c}})} - \frac{4 \pi a e^{-\frac{4 \pi a n}{\beta \hbar c}}}{\beta \hbar c n^2 (1 - e^{-\frac{4 \pi a n}{\beta \hbar c}})^2} \right] \right\} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right). \quad (17)$$

因 $\beta\hbar c \ll 2a$, 所以只取 $n=1$ 项, 结果是

$$E_{02} \approx \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \left[\frac{L^2 \hbar c \pi^2}{720 a^3} - \frac{1.2 L^2}{8 \pi a^2 \beta} - \frac{L^2}{4 \pi a^2 \beta} \left(1 + \frac{4 \pi a}{\beta \hbar c}\right) e^{-\frac{4 \pi a}{\beta \hbar c}} \right]. \quad (18)$$

把(9)和(18)式代入(8)式, 则得低温情况下的 Casimir 能量

$$E_{\text{总}} = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \left[-\frac{1.2 L^2}{8 \pi a^2 \beta} - \frac{L^2}{4 \pi a^2 \beta} \left(1 + \frac{4 \pi a}{\beta \hbar c}\right) e^{-\frac{4 \pi a}{\beta \hbar c}} \right]. \quad (19)$$

这样,在高温情况下,单位面积金属板上所受到的 Casimir 力为

$$F_{\text{高}} = -\frac{\partial E_{\text{高}}}{L^2 \partial a} = \left\{ -\frac{1.2}{4\pi a^3 \beta} - \frac{1}{2\pi a^3 \beta} \left[1 + \frac{4\pi a}{\beta \hbar c} + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi a}{\beta \hbar c} \right)^2 \right] e^{-\frac{4\pi a}{\beta \hbar c}} \right\} \\ - \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ -\frac{1.2}{4\pi a^2 \beta} - \frac{1}{2\pi a^3 \beta} \left[1 + \frac{4\pi a}{\beta \hbar c} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi a}{\beta \hbar c} \right)^2 \right] e^{-\frac{4\pi a}{\beta \hbar c}} \right\}. \quad (20)$$

(20)式右端第一个花括号内的项是 Mehra 的研究结果^[7],即在高温情况下自由电磁场对 Casimir 力的贡献;第二项则是本文给出的另一新结果,即在高温情况下内部费米子单圈图的贡献.

本文给出了有限温度下,两个平行的理想的金属板之间,量子电磁场的 Casimir 效应.可以借助本文的讨论方法,去讨论其它量子场以及其它边界条件下的 Casimir 效应.

参 考 文 献

- [1] I. Brevik, H.B. Nielsen, *Phys. Rev.*, **D41**(1990) 1185.
- [2] 郑泰玉,高能物理与核物理,**9**(1990)798.
- [3] D. Keppner, *Phys. Today*, **43**(1990)9.
- [4] 郑泰玉,薛社生,科学通报,**13**(1992)1170.
- [5] V.B. Braginsky, F. Ya. Khalili, *Phys. Lett.*, **A167**(1992) 1.
- [6] A.A. Bytsenko, G.Gognola, L. Vanzo, *J. Math. Phys.*, **33**(1992) 3108.
- [7] H.B.G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, **51**(1948) 793.
- [8] J. Mehra, *Physica*, **37**(1967) 145.

Casimir Effect at Finite Temperature

Zheng Taiyu

(Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024)

Received 24 December 1993

Abstract

The contribution of the free electromagnetic field and internal fermion one-loop to Casimir force between two parallel conducting plates at finite temperature are calculated by using the Feynman path integral method.

Key word casimir effect, path integral, quantal electromagnetic field.