第 18 卷 第 8 期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 8
1994 年 8 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1994

奇异拉氏量系统的正则对称性和 Ward 恒等式*

李 子 平[1)]
(北京工业大学应用物理系 北京 100022)

1993 年 7 月 16 日收到

摘 要

给出了场论中约束 Hamilton 系统规范生成元的构成，说明了生成元中与第一类约束相联系的系数之间的关系。基于相空间中的生成泛函，导出了相应正则形式的 Ward 恒等式。讨论了与混合陈-Simons 拉氏量等价的场论模型中的应用。

关键词 Dirac 约束，规范生成元，Ward 恒等式。

1 引 言

用奇异拉氏量(如规范理论)描述的系统在相空间中存在固有约束，为约束 Hamilton 系统。虽然约束系统的 Dirac 理论及其在场论中应用的研究已取得了相当的进展，但该理论中的某些基本问题，至今仍不断有讨论，其中之一就是 Dirac 猜想[1]。该猜想认为系统的所有第一类约束均是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换。尽管对这个猜想有不同争议[2,3]，但是许多重要的物理系统，按 Dirac 猜想，尚未导致不正确的结果[4,5]。第 2 节中，将 Castellani 的讨论[4]略加修改，并将其推广到场论情形，导出了规范生成元的形式，同时从另一个角度研究了规范生成元中与第一类约束联系的系数之间的关系。在第 3 节中，研究系统在相空间中的量子对称性质。场论中定域不变性导致的 Ward 恒等式，通常用位形空间中的变量来表述[6,7]。当相空间中的生成泛函对动量的路径积分不能积出时，或积出后有效拉氏量出现奇异时[8,9]，特别是约束 Hamilton 系统，当约束结构比较复杂时，常常难于作出对动量的泛函积分。因此，研究系统在相空间中的对称性质，就具有更普遍的意义。从相空间中的生成泛函在正则变量变换下的不变性出发，导出了系统在相空间中的 Ward 恒等式。对于一个给定的用奇异拉氏量描述的系统，求出它所含的第一类约束，就可构造出规范生成元，从而就有相应的正则形式的 Ward 恒等式。在第 4 节中给出了理论的初步应用。讨论了与混合陈-Simons 拉氏量等价的场论模型的固有顶角、传播子等之间的关系。在结语和讨论中，说明了如何简捷地导出非

---

* 国家自然科学基金和北京市自然科学基金资助。

1) CCAST

Abel 规范理论中正则形式的 Ward 恒等式.

2 规范生成元

设 $\phi^\alpha(x)(\alpha=1,2,\cdots,N)$ 为场量，α 为不同场或场的分量指标，$x=(t,\boldsymbol{x})$，平坦时空度规为 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+1-1-1-1)$. 记 $\phi^\alpha_{,\mu}=\partial_\mu\phi^\alpha=\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\phi^\alpha$. 设场的拉氏量密度为 $\mathscr{L}(\phi^\alpha,\phi^\alpha_{,\mu})$，场的正则动量密度和哈氏量密度分别为 $\pi_\alpha=\partial\mathscr{L}/\partial\dot\phi^\alpha$ 和 $\mathscr{H}_c=\pi^\alpha\dot\phi^\alpha-\mathscr{L}$（重复指标代表求和）. 奇异拉氏量的 Hess 矩阵（$H_{\alpha\beta}$）退化，$\det|H_{\alpha\beta}|=\det|\partial^2\mathscr{L}/\partial\dot\phi^\alpha\partial\dot\phi^\beta|=0$，由正则动量密度定义式不能全部解出 $\dot\phi^\alpha$ 作为 ϕ^α 和 π_α 的函数. 设 Hess 矩阵的秩为 N-R，那么正则变量 ϕ^α 和 π_α 之间在相空间中存在 R 个约束[10]

$$\phi_a^0(\phi^\alpha,\pi_\alpha)\approx 0\quad(a=1,2,\cdots,R).\tag{1}$$

并称它们为初级约束. 记号≈代表弱等，表示等式在约束超曲面上成立. 此约束 Hamilton 的正则方程为[11]

$$\dot\phi^\alpha=\delta H_{\mathrm{T}}/\delta\pi_\alpha=\{\phi^\alpha,H_{\mathrm{T}}\},\dot\pi_\alpha=-\delta H_{\mathrm{T}}/\delta\phi^\alpha=\{\pi_\alpha,H_{\mathrm{T}}\},\tag{2}$$

其中

$$H_{\mathrm{T}}=H_c+H_1=\int d^3\boldsymbol{x}(\mathscr{H}_c+\lambda^a\phi_a^0),\tag{3}$$

H_{T} 为总哈密顿量，H_c 为正则哈密顿量，$\lambda^a(x)$ 为拉氏乘子，{,}代表场的 Poisson 括号.

初级约束的自洽性条件，$\{\phi_a^0,H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$，可给出次级约束，次级约束的自洽性条件，可逐次给出其他次级约束，$\phi_a^k=\{\phi_a^{k-1},H_{\mathrm{T}}\}\approx 0$，直至 ϕ_a^m 适合

$$\phi_a^{m+1}=\{\phi_a^m,H_{\mathrm{T}}\}=c_{ak}^b\phi_b^k(k\leqslant m)$$

为止. 全部约束可分为两类，如果一个约束 ϕ_a 对任意约束 ϕ_b 均有 $\{\phi_a,\ \phi_b\}=0\ (\mathrm{mod}\ \phi_c)$，则称 ϕ_a 为第一类约束，否则为第二类约束.

从规范变换保持系统的正则方程(2)不变出发，可以构造规范变换的生成元. 先考虑系统仅含第一类约束的情形. 设系统的轨线（ϕ^α，π_α，λ^a）和无穷小规范变更后的轨线（$\phi^\alpha+\xi^\alpha,\pi_\alpha+\eta_\alpha,\lambda^a+\zeta^a$）均适合(1)和(2)式，在变更后的轨线方程中，关于 ξ,η,ζ 等小量展开，并利用未变更的轨线方程，得

$$\dot\xi^\alpha\approx\int d^3\boldsymbol{x}\left[\frac{\delta^2H_{\mathrm{T}}}{\delta\phi^\beta\delta\pi_\alpha}\xi^\beta+\frac{\delta^2H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_\beta\delta\pi_\alpha}\eta_\beta\right],\tag{4a}$$

$$\dot\eta_\alpha\approx-\int d^3\boldsymbol{x}\left[\frac{\delta^2H_{\mathrm{T}}}{\delta\phi^\beta\delta\phi^\alpha}\xi^\beta+\frac{\delta^2H_{\mathrm{T}}}{\delta\pi_\beta\delta\phi^\alpha}\eta_\beta\right],\tag{4b}$$

$$\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\phi^\alpha}\xi^\alpha+\frac{\partial\phi_a^0}{\partial\pi_\alpha}\eta_\alpha\approx 0.\tag{4c}$$

将规范变换的生成元表为

$$G=\int d^3\boldsymbol{x}\varepsilon_j^{(k)}G_k^j(\phi^\alpha,\pi_\alpha),\tag{5}$$

其中 $\varepsilon_j^{(k)}=\partial_0^k\varepsilon_j(x)$，$\varepsilon_j(x)$ 为时空的任意函数. 由此生成元产生的正则变量的变更为

$$\xi^{\alpha}=\{\phi^{\alpha},G\}=\delta G/\delta\pi_{\alpha},\eta_{\alpha}=\{\pi_{\alpha},G\}=-\delta G/\delta\phi^{\alpha}. \tag{6}$$

将(6)式代入(4)式,由 $\varepsilon_j(x)$ 的任意性,得

$$\frac{\partial}{\partial\phi^{\alpha}}[G^j_{k-1}+\{G^j_k,H_{\mathrm{T}}\}]=0 \quad (\bmod\ \phi^0_a), \tag{7a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\pi_{\alpha}}[G^j_{k-1}+\{G^j_k,H_{\mathrm{T}}\}]=0 \quad (\bmod\ \phi^0_a), \tag{7b}$$

$$\{G^j_k,\phi^0_a\}=0 \qquad (\bmod\ \phi^0_a). \tag{7c}$$

因为正则变量变更后的轨线仍保持在约束超曲面上,对次级约束 ϕ^n_a 亦应有 $\{G^j_k,\phi^n_a\}\approx 0$. 因此所有 G^j_k 必为第一类约束. 由于系统仅含第一类约束,(7)式中可用 H_c 来代替 H_{T}. 从而得递推关系[12]

$$\{G^j_0,H_c\}=0 \quad (\bmod\ \phi^0_a), \tag{8a}$$

$$G^j_{k-1}+\{G^j_k,H_c\}=0 \quad (\bmod\ \phi^0_a),k=1,2,\cdots,m, \tag{8b}$$

$$G^j_m=0 \quad (\bmod\ \phi^0_a). \tag{8c}$$

由 (8b) 可知, G^j_{k-1} 可从 G^j_k 导出. 从每一个初级约束 G^j_m 出发, 由 (8b) 逐次求出 G^j_k,直至 G^j_0 适合 (8a) 为止. 这样求出 G^j_k 后,代入(5)式就可构造出规范变换的生成元. 除 χ^n-型约束外,所有第一类约束均是规范生成元的组成部分[4].

当系统同时含第一类约束和第二类约束时, 只要由初级第一类约束导出的次级第一类约束系列与第二类约束完全分开, 上述构造规范生成元的方法对此类系统的第一类约束也是适用的.

文[5]中研究了由第一类约束线性组合构成的规范生成元中,其组合系数所满足的微分方程组. 为了得到该方程组,作者在文[5]中丢掉了(3.8)式左端最后一项, 这是欠严格的. 这里给出一个证明. 设系统所含的独立约束为第一类的,初级第一类约束为 $\phi^0_k(k=1,2,\cdots,K)$, 次级第一类约束为 $\chi_l(l=1,2,\cdots,L)$. 按 Dirac 的处理,规范生成元可表为(有限自由度系统)

$$G=\omega^l(t)\chi_l+\varepsilon^k(t)\phi^0_k. \tag{9}$$

规范变换的生成元应满足的充要条件为[13]

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\{G,H_{\mathrm{T}}\}=0,\{G,\phi^0_k\}=0 \quad (\bmod\ \phi^0_k), \tag{10}$$

将(9)式代入(10)式,得

$$\frac{\mathrm{d}\omega^l}{\mathrm{d}t}\chi_l+\omega^n\alpha_{nl}\chi_l+\varepsilon^n\beta_{nl}\chi_l=0 \quad (\bmod\ \phi^0_k), \tag{11}$$

其中 α_{nl},β_{nl} 适合

$$\{\chi_l,H_c\}=\alpha_{lm}\chi_m,\{\phi^0_k,H_c\}=\beta_{km}\chi_m \ (\bmod\ \phi^0_k). \tag{12}$$

由于约束 χ_l 的线性无关性, 由(11)式得规范生成元中其组合系数应满足下列微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\omega^l}{\mathrm{d}t}+\omega^n\alpha_{nl}+\varepsilon^n\beta_{nl}=0 \quad (\bmod\ \phi^0_k). \tag{13}$$

这样就正确地得到了文[5]中的基本结果. 不难验证: 按(5)式和 (8) 式确定的生成元与

按(9)式和(13)式确定的生成元的结果是一致的.

3 正则形式的 Ward 恒等式

在规范场理论中 Ward 恒等式不但是理论可重正化的保证，而且在一些具体计算中(如 QCD 中的某些计算)也起重要作用，利用它可将高阶固有顶角的计算化为低阶固有顶角的计算. 通常对 Ward 恒等式的研究是用位形空间中的(有效)拉氏量，通过 Green 函数生成泛函的不变性来导出的[6,7]. 但是，当相空间中的生成泛函对动量的泛函积分不能积出时，或积出后有效拉氏量出现奇异时[8,9](这些奇异性寄希望于在重正化过程中消去)，特别是约束 Hamilton 系统，当约束结构比较复杂时，要作出对动量的泛函积分则是十分困难的，甚至是不可能的. 因此研究系统在相空间中的对称性质，就十分必要.

先讨论由非奇异拉氏量描述的系统. 对场量 $\phi^\alpha(x)$ 和它的正则动量 $\pi_\alpha(x)$ 分别引入外源 $J_\alpha(x)$ 和 $J_1^\alpha(x)$，将 Green 函数的生成泛函表为

$$Z[J,J_1]=\int\mathscr{D}\phi^\alpha\mathscr{D}\pi_\alpha\exp\left\{i\left[I^{\mathrm{P}}+\int\mathrm{d}^4x(J_\alpha\phi^\alpha+J_1^\alpha\pi_\alpha)\right]\right\},\tag{14a}$$

$$I^{\mathrm{P}}=\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{P}}=\int\mathrm{d}^4x(\pi_\alpha\dot{\phi}^\alpha-\mathscr{H}_c),\tag{14b}$$

I^{P} 为场的正则作用量. 显然 Green 函数为

$$G(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|T[\hat{\phi}^\alpha(x_1)\cdots\hat{\phi}^\alpha(x_n)]|0\rangle=\frac{1}{i^n}\left.\frac{\delta^n Z[J,J_1]}{\delta J_\alpha(x_1)\cdots\delta J_\alpha(x_n)}\right|_{J_\alpha=J_1^\alpha}=0.\tag{15}$$

考虑相空间中的无穷小变换

$$\begin{cases}\phi^{\alpha\prime}(x)=\phi^\alpha(x)+S_\sigma^\alpha\varepsilon^\sigma(x),\\ \pi_\alpha'(x)=\pi_\alpha(x)+T_{\alpha\sigma}\varepsilon^\sigma(x),\end{cases}\tag{16}$$

其中 $\varepsilon^\sigma(x)(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，它们在四维时空区域的边界上为零，S_σ^α 和 $T_{\alpha\sigma}$ 为线性微分算符[14]. 在(16)式变换下，正则作用量 (14b) 的变分为[14]

$$\delta I^{\mathrm{P}}=\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\phi^\alpha}\delta\phi^\alpha+\frac{\delta I^{\mathrm{P}}}{\delta\pi_\alpha}\delta\pi_\alpha+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_\alpha\delta\phi^\alpha)\right],\tag{17}$$

$$\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\phi^\alpha=-\dot{\pi}_\alpha-\delta H_c/\delta\phi^\alpha,\quad\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\pi_\alpha=\dot{\phi}^\alpha-\delta H_c/\delta\pi_\alpha.\tag{18}$$

由 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的边界条件，(17)式右端第三项可化为零. 设变换(16)式的 Jacobi 行列式为 1，生成泛函 (14a) 在(16)式变换下不变，就有

$$Z[J,J_1]=\int\mathscr{D}\phi^\alpha\mathscr{D}\pi_\alpha\left[1+i\delta I^{\mathrm{P}}+i\int\mathrm{d}^4x(J_\alpha\delta\phi^\alpha+J_1^\alpha\delta\pi_\alpha)\right]$$
$$\cdot\exp\left\{iI^{\mathrm{P}}+i\int\mathrm{d}^4x(J_\alpha\phi^\alpha+J_1^\alpha\pi_\alpha)\right\},\tag{19}$$

它表明 $\delta Z/\delta\varepsilon^\sigma=0$. 由(17)和(19)式，得相空间中的 Ward 恒等式

$$[\tilde{S}_\sigma^\alpha(\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\phi^\alpha)+\tilde{S}_\sigma^\alpha J_\alpha+\tilde{T}_{\alpha\sigma}(\delta I^{\mathrm{P}}/\delta\pi_\alpha)+\tilde{T}_{\alpha\sigma}J_1^\alpha]_{\substack{\phi^\alpha\to -i\delta/\delta J_\alpha\\ \pi_\alpha\to -i\delta/\delta J_1^\alpha}}=0.\tag{20}$$

其中 $\tilde{S}_\sigma^\alpha$ 和 $\tilde{T}_{\alpha\sigma}$ 分别代表 S_σ^α 和 $T_{\alpha\sigma}$ 的伴随算符[15].

设一奇异拉氏量系统，在相空间中的所有第一类约束为 $\Lambda_k(k=1,2,\cdots,K_1)$，所有

第二类约束为 $\theta_j(j=1,2,\cdots,J)$，与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k(k=1,2,\cdots,K_1)$。此约束 Hamilton 系统 Green 函数的生成泛函为[11]

$$Z[J,J_1]=\int \mathscr{D}\phi^a\mathscr{D}\pi_a\prod_{j,k,l}\delta(\theta_j)\delta(\Lambda_k)\delta(\Omega_l)\det|\{\Lambda_k,\Omega_l\}|$$
$$\cdot[\det|\{\theta_i,\theta_j\}|]^{1/2}\exp\{iI^{\mathrm P}+i\int d^4x(J_a\phi^a+J_1^a\pi_a)\}. \tag{21}$$

利用 δ-函数以及 Grassmann 变量 $\eta(x),\bar\eta(x)$ 积分的性质

$$\det|\{A_k(x),B_l(y)\}|=\int\mathscr{D}\eta_l(y)\mathscr{D}\bar\eta_k(x)\exp\left[i\int d^4xd^4y\bar\eta_k(x)\{A_k(x),B_l(y)\}\eta_l(y)\right], \tag{22}$$

可将(21)式化为

$$Z[J,J_1]=\int\mathscr{D}\phi^a\mathscr{D}\pi_a\mathscr{D}\lambda_m\mathscr{D}\eta\mathscr{D}\bar\eta\exp\left\{iI_{\mathrm{eff}}^{\mathrm P}+i\int d^4x(J_a\phi^a+J_1^a\pi_a)\right\}, \tag{23a}$$

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm P}=\int d^4x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm P}=\int d^4x(\mathscr{L}^{\mathrm P}+\mathscr{L}_{Lm}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}), \tag{23b}$$

$$\mathscr{L}_{Lm}=\lambda_j\theta_j+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l,\quad \lambda_m=(\lambda_j,\lambda_k,\lambda_l), \tag{23c}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=\int d^4y\left[\bar\eta_k(x)\ \{\Lambda_k(x),\Omega_l(y)\}\eta_l(y)+\frac{1}{2}\eta_i(x)\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}\eta_j(y),\right. \tag{23d}$$

λ_m 为乘子场，$\mathscr{L}_{Lm}$ 表示与乘子场有关的拉氏量密度。在非 Abel 规范理论中，$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 相应于鬼粒子项。

在(16)式变换下，生成泛函 (23a) 也是不变的。奇异拉氏量系统的正则形式 Ward 恒等式，只要将(20)式中的 $I^{\mathrm P}$ 用 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm P}$ 来代替就是了。

4 应 用

在超导理论中，电磁规范不变性自发破缺，有质量光子规范不变拉氏量可通过混合陈-Simons 项来实现[16]，它等价于下列拉氏量

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi-mA_\mu)(\partial^\mu\phi-mA^\mu), \tag{24a}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu, \tag{24b}$$

其中 $\phi(x)$ 为标量场。下面我们先求出这个模型的规范生成元，然后给出正则形式的 Ward 恒等式对这个模型的应用。

相应于场 $A_\mu(x)$ 和 $\phi(x)$ 的正则动量分别为

$$\pi^\mu(x)=-F^{0\mu}(x),\pi(x)=\dot\phi(x)-mA^0(x). \tag{25}$$

系统的正则哈氏量密度为

$$\mathscr{H}_c=\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\pi_i^2+\frac{1}{4}F_{ik}^2+\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi$$
$$+\frac{1}{2}m^2A_i^2-mA_i\partial_i\phi+(\partial_i\pi_i+m\pi)A^0. \tag{26}$$

初级约束和次级约束分别为

$$\phi^0=\Lambda_1=\pi^0(x)\approx 0, \tag{27}$$

$$\phi^1 = \Lambda_2 = -\partial_i \pi_i - m\pi \approx 0, \tag{28}$$

它们是第一类约束．按第 2 节的讨论，规范生成元为

$$G = \int d^3x[\varepsilon(x)(\partial_i\pi_i + m\pi) + \varepsilon(x)_{,0}\pi^0] = \int d^3x[\pi_\mu \partial^\mu \varepsilon(x) + m\pi\varepsilon(x)]. \tag{29}$$

由这个生成元产生的变换为

$$\begin{cases}\delta A_\mu(x) = \{A_\mu(x), G\} = \partial_\mu \varepsilon(x), \delta\pi^\mu(x) = 0,\\ \delta\phi(x) = m\varepsilon(x), \delta\pi(x) = 0.\end{cases} \tag{30}$$

在这个变换下，系统的拉氏量不变．

采用路径积分量子化．对第一类约束选取相应的规范条件．考虑库仑规范 $\Omega_2 = \partial_i A_i \approx 0$，$\Omega_2$ 的自洽性要求，就有另一规范约束 $\Omega_1 = \partial_i \pi_i + \nabla^2 A^0 \approx 0$．不难验证，$\det|\{\Lambda_\alpha, \Omega_\beta\}|(\alpha,\beta = 1,2)$ 与场量无关，可将这个因子从生成泛函中略去，于是

$$Z[J_\mu, J_1^\mu, J, J_1, U_k, V_l] = \int \mathscr{D}A^\mu \mathscr{D}\pi_\mu \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\pi \mathscr{D}\mu_k \mathscr{D}\omega_l \cdot \exp\left\{i\int d^4x\,[\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}} + J_\mu A^\mu + J_1^\mu \pi_\mu + J\phi + J_1\pi + U_k\mu_k + V_l\omega_l]\right\}, \tag{31a}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}^{\mathrm{P}} + \mathscr{L}_{Lm} = \mathscr{L}^{\mathrm{P}} + \mu_k \Lambda_k + \omega_l \Omega_l, \tag{31b}$$

U_k, V_l 分别为乘子场 $\mu_k(x), \omega_l(x)$ 的外源，J_μ, J 分别为 A^μ，ϕ 的外源，J_1^μ, J_1 分别为 π_μ, π 的外源．记 $\phi^\alpha = (A^\mu, \phi, \mu_k, \omega_l), \pi_\alpha = (\pi_\mu, \pi), J_\alpha = (J_\mu, J, U_k, V_l)$ 和 $J_1^\alpha = (J_1^\mu, J_1)$，(31a) 式可写为

$$Z[J_\alpha, J_1^\alpha] = \int \mathscr{D}\phi^\alpha \mathscr{D}\pi_\alpha \exp\left\{i\int d^4x\,[\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}} + J_\alpha\phi^\alpha + J_1^\alpha \pi_\alpha]\right\}. \tag{32}$$

生成泛函(32)式和 $\mathscr{L}^{\mathrm{P}}$ 在(30)式变换下不变，变换(30)式的 Jacobi 行列式为 1．此时相空间 Ward 恒等式为

$$\left[-\partial_0\nabla^2 \frac{\delta}{\delta V_1} + \nabla^2 \frac{\delta}{\delta V_2} + mJ - \partial_\mu J^\mu\right] Z[J, J_1] = 0. \tag{33}$$

令 $Z[J, J_1] = \exp\{iW[J, J_1]\}$，则(33)式化为

$$\left[-\partial_0\nabla^2 \frac{\delta}{\delta V_1} + \nabla^2 \frac{\delta}{\delta V_2} + mJW^{-1} - \partial_\mu J^\mu W^{-1}\right] W[J, J_1] = 0. \tag{34}$$

用 Legendre 变换引入固有顶角的生成泛函

$$\Gamma[\phi^\alpha, \pi_\alpha] = W[J, J_1] - \int d^4x(J_\alpha\phi^\alpha + J_1^\alpha\pi_\alpha), \tag{35a}$$

$$\delta W/\delta J_\alpha(x) = \phi^\alpha(x),\ \ \delta\Gamma/\delta\phi^\alpha(x) = -J_\alpha(x), \tag{35b}$$

$$\delta W/\delta J_1^\alpha(x) = \pi_\alpha(x),\ \ \delta\Gamma/\delta\pi_\alpha(x) = -J_1^\alpha(x). \tag{35c}$$

于是相空间中的 Ward 恒等式(33)化为

$$-\partial_0\nabla^2\omega_1(x_1) + \nabla^2\omega_2(x_1) - m\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x_1)} + \partial^\mu_{x_1}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x_1)} = 0. \tag{36}$$

将(36)式关于 $\phi(x_2)$ 求泛函微商，然后让 $A^\mu = \phi = \omega_1 = \omega_2 = 0$，得

$$\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}=\frac{1}{m}\partial^{\mu}_{x_1}\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta A^{\mu}(x_1)\delta\phi(x_2)}. \tag{37}$$

将(36)式关于 $A^{\mu}(x)$ 求三次泛函微商,然后让所有场为零,得

$$\partial^{\mu}_{x_1}\frac{\delta^4\Gamma[0]}{\delta A^{\mu}(x_1)\delta A^{\nu}(x_2)\delta A^{\rho}(x_3)\delta A^{\sigma}(x_4)}=m\frac{\delta^4\Gamma[0]}{\delta\phi(x_1)\delta A^{\nu}(x_2)\delta A^{\rho}(x_3)\delta A^{\sigma}(x_4)}. \tag{38}$$

将(36)式关于 $\pi(x)$ 求两次泛函微商,然后让所有场为零,得

$$\partial^{\mu}_{x_1}\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta A^{\mu}(x_1)\delta\pi(x_2)\delta\pi(x_3)}=m\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\phi(x_1)\delta\pi(x_2)\delta\pi(x_3)}. \tag{39}$$

由(25)式,上式也可用位形空间中的变量来表达。类似地,可由相空间 Ward 恒等式导致其他新关系式。

5 结语和讨论

对于一个给定的用奇异拉氏量描述的系统,一旦找出了系统所含的第一类约束,便可构造出系统规范变换的生成元,由该生成元产生的变换,导致了相应的正则形式的 Ward 恒等式。

从上面讨论的 Abel 规范理论看出,利用相空间 Ward 恒等式导出固有顶角适合的关系时,只需考虑 $\mathscr{L}^{P}(x)+\mathscr{L}_{Lm}(x)$ 中,$\mathscr{L}^{P}(x)$ 的规范不变性,而含乘子场的项 $\mathscr{L}_{Lm}(x)$ 可以是非不变的。对于非 Abel 规范理论情形,一般 $\mathscr{L}_{gh}$ 项不为零,这时需要去寻找保持 $\mathscr{L}^{P}(x)+\mathscr{L}_{gh}(x)$ 不变的定域变换,在该变换下利用正则形式的 Ward 恒等式,就可得到固有顶角所适合的关系式。文[17]中以位形空间中的表述形式讨论了类似情况。这里从正则形式研究不变性和相空间中 Ward 恒等式,其显著优点在于:在生成泛函中可以不事先作出对动量的泛函积分(积分困难或甚至无法积出),而直接去寻求保持 $\mathscr{L}^{P}+\mathscr{L}_{gh}$ 不变的定域变换,就可得到固有顶角所适合的关系式。进一步的应用将在另文中给出。

参考文献

[1] P.A.M. Dirac, Lecture on Quantum Mechanics, 1964, Yeshiva University Press, New York.
[2] Zi ping Li, *Chin. Phys. Lett.*, **10**(1993)68.
[3] Zi ping Li, *Europhs. Lett.*, **21**(1993)141.
[4] L. Castellani, *Ann. Phys.*, (NY), **143**(1982)357.
[5] C.A.P. Galvao and J.B.T. Boechat, *J. Math. Phys.*, **31**(1990) 448.
[6] H. Suura and B-L. Young, *Phys. Rev.*, **D8**(1973) 4353.
[7] T. Lhallabi, *Int. J. Theor. Phys.*, **28**(1989) 875.
[8] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.*, **128**(1962) 885.
[9] Tung sheng Tu, Hung chun Yin and Tunan Ruan, *Nucl. Phys.*, **B164**(1980) 103.
[10] 李子平,经典和量子约束系统及其对称性质,北京工业大学出版社(1993).
[11] D.M. Gitman and I.V. Tyutin, Quantization of Fields with Constraints, 1990, Springer-Verlag, Berlin.
[12] Ziping Li, *J.Phys. A: Math. Gen.*, **24**(1991) 4261.
[13] R. Sugano, *J.Math. Phys.*, **30**(1990)2337.
[14] 李子平,物理学报,**41**(1992)710.

[15] Ziping Li, *Int. J. Theor. Phys.*, **26**(1987)853.
[16] D.Senechal, *Phys. Lett.*, **B297**(1992)138.
[17] 邝宇平和易余萍，高能物理与核物理，**4**(1980)286.

Canonical Symmetry in a System with Singular Lagrangian and Ward Identities

Li Ziping
(*Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)
Received July 16, 1993

Abstract

An algorithm to construct the generator of gauge transformation for a constrained Hamiltonian system is given. The relationships among the coefficients connecting with first-class constraints in the generator is cleared. Based on the phase space generating functional, the corresponding Ward identities in canonical formalism is deduced. The preliminary applications of above results to a model in field theory which is functionally equivalent to the mixed Chern-Simons Lagrangian is discussed in detail.

Key words Dirac's constraints, generator of gauge transformation, Ward Identities.