第 18 卷 第 2 期　　高能物理与核物理　　Vol. 18, No. 2
1994 年 2 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1994

几率分布指数律与间歇现象*

张孝泽　王仲奇　萨本豪　郑玉明　陆中道　刘洪民
(中国原子能科学研究院　北京　102413)

1992 年 7 月 6 日收到

摘　　要

本文举例指出,落入快度区间的概率本身具有某种分布,并不一定能导致阶乘矩随区间长度变化的指数律,因此,不是导致 Intermittency 行为的充分条件.

关键词　间歇现象,指数律,动力学起伏,统计起伏,几率分布.

1　引　　言

最近几年来,人们对粒子多重产生中是否有间歇现象(Intermittency)发生了浓厚的兴趣. Bialas 和 Peschanshi 首先提出了用粒子快度分布的阶乘矩分析来研究 Intermittency[1,2].

设一次事件中落在第 1 个,第 2 个,…,第M个快度区间内的粒子数目为 $N_1, N_2, \cdots$, N_M, 则此事件发生的几率可表为:

$$Q(N_1,N_2,\cdots,N_M)=\int_0^1\cdots\int_0^1 P(p_1,p_2,\cdots,p_M) \cdot B(N_1,N_2,\cdots,N_M|p_1,p_2,\cdots p_M)\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_M \tag{1}$$

其中, p_1, p_2, $\cdots$, p_M 分别为粒子落在第 1 个, 第 2 个, …第M个快度区间内的概率, $P(p_1,\cdots,p_M)$ 是它们的联合概率密度函数; $\sum\limits_{m=1}^{M} p_m=1$; 而 $B(N_1, N_2,\cdots, N_M|p_1, p_2, \cdots,p_M)$ 则表示在给定 $p_1,p_2,\cdots,p_M$ 条件下,在一个事件中,在第 1 个,第 2 个,…第M个间隔内分别落入 $N_1,N_2,\cdots,N_M$ 个粒子的几率. $P(p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 由物理过程决定,描述动力学起伏, 而 $B(N_1,N_2,\cdots,N_M|p_1, p_2,\cdots, p_M)$ 描述统计起伏;当多重数 $N=\sum\limits_{m=1}^{M} N_M$ 固定时, $B(N_1, N_2, \cdots, N_M|p_1, \cdots, p_M)$ 取多项分布; 而当多重数不固定时, $B(N_1,\cdots,N_M|p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 取泊松分布. 相应的阶乘矩分别定义为:

$$\langle F_i\rangle_Q=M^{i-1}\left\langle\sum_{m=1}^{M}\frac{N_m(N_m-1)\cdots(N_m-i+1)}{N(N-1)\cdots(N-i+1)}\right\rangle_Q \tag{2}$$

和

* 国家自然科学基金资助.

$$\langle F_i\rangle_Q = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{\langle N_m(N_m-1)\cdots(N_m-i+1)\rangle_Q}{\langle N_m\rangle_Q^i} \tag{3}$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots$$

这里，$\langle\ \rangle_Q$ 表示对满足分布 $Q(N_1,N_2,\cdots,N_M)$ 的所有事件求平均。 在(2)和(3)中隐含：

$$N_m(N_m-1)\cdots(N_m-i+1)=0,\ 当\ N_m\leqslant i-1,$$

$$m=1,2,\cdots,M \tag{4}$$

利用阶乘矩 $\langle F_i\rangle_Q$ 的好处是：它消除统计起伏，它的量度是来自分布 $P(p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 的动力学起伏。实际上，

$$\langle F_i\rangle_Q = \left\langle\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(Mp_m)^i\right\rangle_P = \langle C_i\rangle_P, \tag{5}$$

上式中，$\langle\ \rangle_P$ 表示对分布 $P(p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 取平均。

Bialas 和 Peschanski 认为：如果阶乘矩 $\langle F_i\rangle_Q$ 与 $\delta y=\dfrac{\Delta y}{M}$ 间有以下关系：

$$\langle F_i\rangle_Q = M^{\varphi_i} = \left(\frac{\Delta y}{\delta y}\right)^{\varphi_i} \tag{6}$$

则称为间歇 (Intermittency) 行为。 这儿，Δy 为整个快度区间，δy 为 Δy 经 M 等分后的小区间。他们进一步指出；当 $p_1,p_2,\cdots,p_M$ 遵从以下分布时：

$$P(p_1,p_2,\cdots,p_M)=\prod_{m=1}^{M}\delta(p_m-\bar{p}_m), \tag{7}$$

这儿，

$$\bar{p}_m = \frac{\int_{y_{m-1}}^{y_m} g(y)\mathrm{d}y}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} g(y)\mathrm{d}y},\ m=1,2,\cdots,M;$$

$$\Delta y = y_{\max}-y_{\min},\ \delta y=\Delta y/M;$$

$$y_m = y_{\min}+m\cdot\delta y;$$

$$\delta(x)=0,\ x\neq 0;\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1;$$

而 $g(y)$ 是一个平滑的快度分布；那么，阶乘矩 $\langle F_i\rangle_Q$ 就一定没有(6)式那样的指数律行为。由此而知，要使 $\langle F_i\rangle_Q$ 有随 δy 变化的指数律行为(6)，$(p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 必须服从除(7)外的概率分布才行。

问题是：是否$(p_1,\cdots,p_M)$遵从除(7)式外的某种概率分布，就能导致 Intermittency 行为——阶乘矩 $\langle F_i\rangle_Q$ 的指数律(6)呢？或者，$(p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 遵从什么样的分布才能导致 Intermittency 行为？

2 简化的 α 级联模型

到目前为止，能够导致 Intermittency 行为的动力学起伏是各种形式的 α 模型[1-4]。

下面,我们讨论一种最简单的 α 级联模型

设级联过程有 s 步. 每一步 l 的每一支只有两个分支. 第一分支上概率 $\tilde{p}_1=p$, 第二分支上概率为 $\tilde{p}_2=1-p$, p 为常数, $0<p<1$. 于是, s 步级联后共有 $M=2^s$ 个分支,正好对应于M个间隔. 第m个间隔几率 p_m 如下得到:

$$p_m=\tilde{p}_{i_1}\cdot\tilde{p}_{i_2}\cdot\cdots\cdots\tilde{p}_{i_s},$$

$$\tilde{p}_{i_l}=\begin{cases}p, & i_l=1\\ 1-p, & i_l=2\end{cases} \tag{8}$$

m可用序列 $(i_1,i_2,\cdots,i_s)$ 来表示:

$$m=i_1+(i_2-1)2+\cdots+(i_s-1)2^{s-1}$$

这样一来,

$$\begin{aligned}\langle F_i\rangle_Q&=\left\langle\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(Mp_m)^i\right\rangle_P=M^{i-1}\left\langle\sum_{m=1}^{M}p_m^i\right\rangle_P\\&=M^{i-1}\sum_{k=0}^{s}C_s^k[p^k(1-p)^{s-k}]^i\\&=M^{i-1}\sum_{k=0}^{s}C_s^k(p^i)^k((1-p)^i)^{s-k}\\&=M^{i-1}[p^i+(1-p)^i]=M^{\varphi_i}\end{aligned} \tag{9}$$

这儿,

$$\varphi_i=(i-1)+\log[p^i+(1-p)^i]/\log 2 \tag{10}$$

易证: p 取$(0,1)$上任何值, 只要 $p\neq 1/2$, φ_i 恒大于 0, 且与M无关. 这意味着, 这种简单的 α 模型,可以导致指数律(6)式, 即导致 Intermittency 行为. 有趣的是, 当 $p=\frac{1}{2}$ 时, $p_m=\left(\frac{1}{2}\right)^s$, $m=1, 2,\cdots, M(=2^s)$; 于是由(10)得出, $\varphi_i=0$; 因此, Intermittency 行为消失.

众所周知, 利用上述 α 模型产生的概率集合有着自相似结构. 这也许是导致 Intermittency 行为的一个原因. $p=1/2$ 时,所产生的概率集合内部仍有这种自相似结构, 只不过它是一种平庸 (trivial) 的自相似结构. 实际上, 这时产生的概率集合是一个十分均匀的等概率集合, 形成的是一个平滑均匀分布. 所以说平庸的自相似结构不能导致非平庸的 (nontrivial) 的 Intermittency 行为.

3 两个不能导致 Intermittency 行为的概率分布

设

$$P(p_1,p_2,\cdots,p_M)=\frac{\delta\left(1-\sum_{m=1}^{M}p_m\right)}{\int_0^1\cdots\int_0^1\delta\left(1-\sum_{m=1}^{M}p_m\right)\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_M} \tag{11}$$

对于这个分布，可以证明它不能导致 Intermittency 行为。由(5)知，

$$\langle F_i\rangle_Q = \left\langle \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(Mp_m)^i\right\rangle_P = M^i\langle p_m^i\rangle_P$$

由(11)不难得出：

$$\langle p_m^i\rangle_P = \frac{i!(M-1)!}{(i+M-1)!}$$

代入 $\langle F_i\rangle_Q$ 中得到：

$$\langle F_i\rangle_Q = M^i\frac{i!(M-1)!}{(i+M-1)!} = i!\frac{M^i}{M(M+1)\cdots(M+i-1)} \tag{12}$$

显然，

$$\lim_{M\to\infty}\langle F_i\rangle_Q = i!$$

表明，$\langle F_i\rangle_Q$ 不会随着M增大而增大。换句话说，具有形为(11)式的概率分布的系统，不能导致 Intermittency 行为。

分析一下分布(11)可以看出，若对于某个固定的 M，有几率 $(p_1,p_2,\cdots,p_M)$，当M变为 $(M+1)$ 时，由于新的 $(M+1)$ 个等间隔与原来的M个等间隔，无任何对应关系，因而重新产生的几率 $(p_1',p_2',\cdots,p_{M+1}')$ 与 $(p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 一般毫无关系。不过对于式(11)这种几率分布函数，亦可以做如下概率抽样，即从分布(11)式抽样得到M个等间隔时的概率 $(p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 后，再随机选取其中某个概率 p_m，并使其随机分为 p_{m1} 和 p_{m2}，而得到 $(M+1)$ 等间隔的概率 $(p_1,p_2,\cdots,p_{m-1},p_{m1},p_{m2},p_{m+1},\cdots,p_M)$，从而达到 $(p_1,p_2,\cdots,p_M)$ 与 $(p_1'=p_1,p_2'=p_2,\cdots,p_{M+1}'=p_M)$ 间有密切关系。

另一个不能导致 Intermittency 行为的分布是

$$p_m = \frac{\xi_m}{\sum_{m=1}^{M}\xi_m},\qquad m=1,2,\cdots,M. \tag{13}$$

这儿，$\{\xi_m\}_1^M$ 是$(0,1)$上均匀分布的随机数序列。

由(5)式再次可得：

$$\langle F_i\rangle_Q = M^{i-1}\left\langle\sum_{m=1}^{M}p_m^i\right\rangle_P$$

这时，难于直接得到 $\left\langle\sum_{m=1}^{M}p_m^i\right\rangle_P$ 的简单表达式。为此，我们用蒙特卡罗方法计算 $i=2$, 3,4,5 和 $M=1,2,4,\cdots 64$ 下的 $\left\langle\sum_{m=1}^{M}p_m^i\right\rangle_P$ 的值（利用了 10^6 个代表点），进而得到 $\langle F_i\rangle_Q$ 的值。$\langle F_i\rangle_Q$ 随M变化的曲线，画在图 1 中。从图 1 中可以看出，对 $i=2,3$, 4,5 的各条曲线，当$M\to\infty$时，$\langle F_i\rangle_Q$ 均不会趋向无穷。因此，这种分布也不能导致 Intermittency 行为。

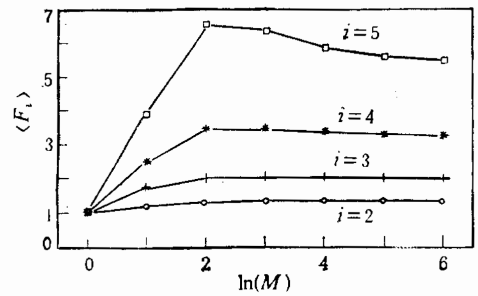

图1 $\langle F_i \rangle$ 随 $\ln(M)$ 的变化

4 讨论

在第三节中给出的两个例子表明,不是随便一种概率分布都能导致 Intermittency 行为. Bialas 和 Peschanski 虽经指出,具有除(7)外的几率分布是导致 Intermittency 行为的必要条件;然而我们的举例表明,它们并不是导致 Intermittency 行为的充分条件.

另一方面,已有许多模型[5-7],它们都能导致分布的阶乘矩随间矩的指数律变化行为,即所谓的 Intermittency 行为. 但是,它们并不一定有多少动力学因素,有的模型根本是一种纯数学模型. 因此,分布的阶乘矩随间隔变化的指数律行为,并不是 Intermittency 的充分条件.

在解释和分析粒子多重产生实验中的 Intermittency 现象方面,正如 Bialas 所说,还没有一种完整的理论[8]. 还应该从 QCD 和强子化过程的关系上去研究,找根源.

最近,有人建议将大偏差理论作为用阶乘矩分析 Intermittency 行为的补充工具,进而揭示出 Intermittency 的本质;实际上也没有取得明显进展[9]. 因此,正确地描述和解释 Intermittency,仍然是一个值得进一步研究的问题.

参考文献

[1] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B273** (1986) 703.
[2] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B308** (1988) 857.
[3] 吴元芳、张昆实、刘连寿,科学通报,**36**(1991)21.
[4] 陆中道、萨本豪、郑玉明、张孝泽,高能物理与核物理 **17**(1993)949.
[5] 刘洪民、萨本豪、郑玉明、陆中道、王仲奇、张孝泽,高能物理与核物理,**15**(1991)131.
[6] J. Seixas, *Mod. Phys. Lett.*, **A6** (1991) 1237.
[7] P. Bozek, M. Ploszajczak and A. Tucholski, *Nucl. Phys.*, **A539** (1992) 693.
[8] A. Bialas, *Nucl. Phys.*, **A525** (1991) 345c.
[9] J. Seixas and R. Vilela Mendes, *Nucl. Phys.*, **B383** (1992) 622.

Probability Distributions of the Probabilities, Power Law and Intermittency

Zhang Xiaoze　Wang Zhongqi　Sa Benhao　Zheng Yuming
Lu Zhongdao　Liu Hongming
(*China Institute of Atomic Energy, Beijing* 102413)

Received on July 6, 1992.

Abstract

Two examples are presented to show that the probability distributions of the probabilities, with which the particles fall into the corresponding rapidity intervals, are not sure to lead to the power law behaviour of the fractorial moments of the rapidity distribution, and hence are not a sufficient condition to get the intermittency behaviours.

Key Words Intermittency, Exponential law, Dynamical fluctuation, Statistical fluctuation, Probability distribution.