第18卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 18, No. 2
1994年2月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1994

束流光学中的变换群
(II) 束流光学单元与系统

郁　庆　长
(中国科学院高能物理研究所　北京　100039)

1992年11月16日收到

摘　　要

在研究束流光学中的各种变换群的基础上讨论了周期场聚焦、束的匹配、色散和象差等问题.

关键词　束流光学,变换群,周期场聚焦.

1　对称变换群

在本文第一部分中讨论了带电粒子束在束流光学系统中运动时发射相图与粒子分布函数的变换. 研究了这些变换组成的各种群: 束传输群、线性传输群、相图保持群 (CP 群)与分布保持群 (DP 群)[1]. 现在讨论另一种重要的群: 对称变换群.

保持一个束流光学单元不变的变换称为此单元的对称变换. 例如轴对称单元绕对称轴转动任意角度的变换都是此单元的对称变换. 一个束流光学单元的传输变换 T 和它的对称变换 S 对易,

$$TS = ST. \tag{1}$$

一个束流光学单元的所有对称变换组成它的对称变换群.

2　反向变换

假定一个束流光学单元的传输变换为 T, 当束反向通过此单元时可得到它的反向变换 T^{R},

$$T^{R} = K_{R}T^{-1}K_{R}. \tag{2}$$

K_{R} 是反向算符, 它保持粒子的位置不变而使其动量反转. K_{R} 相应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

一个前后对称单元在反向时传输变换 T 保持不变，即

$$T^{R}=T,\quad T^{-1}=K_{R}TK_{R}. \tag{4}$$

此时 T 的本征相图集在反向算符作用下不变，也就是说由 $T\mathscr{E}=\mathscr{E}$ 可导出 $TK_{R}\mathscr{E}=K_{R}\mathscr{E}$，$\mathscr{E}$ 为 T 的本征相图.

3　周期场系统

周期场系统是最重要的束传输系统．一个周期场系统中场周期的起点可以任意选择．例如可选图 1 中 A 或 B 为场周期的起点．设场周期 AA'，BB' 相应的传输变换为 T_A 与 T_B，则

$$T_{B}=M_{AB}T_{A}M_{AB}^{-1}, \tag{5}$$

这里 M_{AB} 为区间 AB 相应的传输变换．显然对于一个周期场系统，不同起点的周期相应的变换都是共轭的．

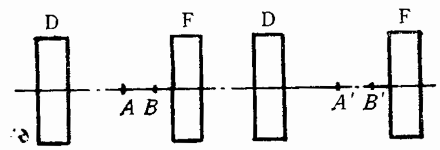

图 1　一个周期场系统

考虑一个由相同的四极透镜组成的 FODO 周期场系统．选择一个漂移段的中点(如图 1 中 A)作为场周期的起点．当各透镜的聚焦能力相同时，此场周期的传输变换 T 在 x 方向对束的作用等于其反向变换在 y 方向对束的作用，即

$$T^{R}=K_{Q}TK_{Q}, \tag{6}$$

K_Q 是 x 与 y 方向相互交换算符，它相应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

传输变换 T 的本征相图集在算符 K_Q 与 K_R 联合作用下不变．即由 $T\mathscr{E}=\mathscr{E}$ 可导出 $TK_{Q}K_{R}\mathscr{E}=K_{Q}K_{R}\mathscr{E}$.

4　束的匹配

对于一个给定的发射相图 $\mathscr{E}$，所有满足

$$TM\mathscr{E}=M\mathscr{E} \tag{8}$$

的传输变换组成束传输群的一个子群，这里 M 是一个任意的传输变换．这个子群中的变换称为与相图 $\mathscr{E}$ 可匹配的变换，因为借助于某个匹配段(相应于 M)可以实现具有相图 $\mathscr{E}$ 的束与相应于变换 T 的束流光学单元间的匹配.

考虑两个 FODO 系统 A_1 与 A_2．我们将设计一个匹配段实现束从 A_1 到 A_2 的匹配．设 A_1 的一个漂移段的中点为 O_1，A_2 的一个漂移段的中点为 O_2．把匹配段安置在 O_1O_2

间. 在 O_1 处束的相图 $\mathscr{E}_1$ 满足

$$K_Q K_R \mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_1. \tag{9}$$

设匹配段的传输变换为 T. 在 O_2 处束的相图为

$$\mathscr{E}_2 = T\mathscr{E}_1, \tag{10}$$

它应当满足

$$K_Q K_R \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_2. \tag{11}$$

这可用两种方式来实现:

1) $K_Q K_R T K_R K_Q = T$; (12)

2) $K_Q K_R T K_R K_Q = K_x K_y T$. (13)

此处 K_x 与 K_y 是 xz 平面与 yz 平面的镜象反射算符,它们相应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

由于四极透镜对 xz 平面与 yz 平面对称,所以 T 与这两个算符对易.

在线性情况下式(12)与(13)分别相应于下述两种方式:

1) $T_{11} = T_{33}, T_{22} = T_{44}, T_{12} = -T_{34}, T_{21} = -T_{43}$;

2) $T_{11} = -T_{33}, T_{22} = -T_{44}, T_{12} = T_{34}, T_{21} = T_{43}$.

此处 T_{ij} 等为传输变换 T 相应的一阶传输矩阵元,未列出的矩阵元均为 0. 这和文献 [2] 所讨论的 FODO 系统两种匹配方式一致.

5 色　散

不同动量的粒子在电磁场中有着不同的运动轨迹，由此产生了色散. 现在讨论色散对束相图的影响. 假定束与束流光学单元匹配. 记所有束粒子在 (x, p_x) 相平面上的相图为 $\mathscr{E}_x$, 动量在 $p_0 - \Delta p$ 与 $p_0 + \Delta p$ 间的束粒子在同一相平面上的相图为 $\mathscr{E}_{0x}$, 此处 $p_0 = \frac{1}{2}(p_{\min} + p_{\max})$, $\Delta p = \frac{1}{2N+1}(p_{\max} - p_{\min})$, $p_{\min}$ 与 $p_{\max}$ 为束粒子动量的最小值与最大值, N 为给定的整数. 动量在 $p - \Delta p$ 与 $p + \Delta p$ 间的束粒子在同一相平面上的相图可表示为 $d(p)\mathscr{E}_{0x}$, 此处 $d(p)$ 为动量偏差算符. $\mathscr{E}_x$ 与 $\mathscr{E}_{0x}$ 间的关系为

$$\mathscr{E}_x = D\mathscr{E}_{0x}, \tag{15}$$

此处 D 为色散算符,

$$D = \sum_{i=-N}^{N} d(p_0 + i\Delta p). \tag{16}$$

这里求和的意义参看本文第一部分第二节.

6 象　　差

假定束与周期场系统不匹配且此周期场系统是非线性的．当束通过许多周期后，它的相图将被扭曲，有效发射度随之增长．有时把这种扭曲称为纤维化[3]． 最后束相图将趋向于它的外接本征相图 $\mathscr{E}_c$． 此处 $\mathscr{E}_c$ 是系统的一个本征相图，它能完全包含束的初始相图 $\mathscr{E}_0$ 而相体积最小．束最后的有效相图 $\mathscr{E}'$ 可写为

$$\mathscr{E}' = A\mathscr{E} = \mathscr{E}_c. \tag{17}$$

此处 A 为象差算符，

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} T^i, \tag{18}$$

T 为场周期的传输变换．

当一部分束粒子落在系统的稳定区域之外时式(17)不能应用．这些粒子迟早将会逃逸．引入逃逸算符 E，使 $E\mathscr{E}$ 表示落在稳定区域内的那些粒子的相图，此时

$$\mathscr{E}' = AE\mathscr{E}. \tag{19}$$

对于周期场系统可以定义对相图 $\mathscr{E}$ 的匹配比和传射率．引入求积算符 Ω，使 $\Omega\mathscr{E}$ 为相图 $\mathscr{E}$ 的相体积．系统对 $\mathscr{E}$ 的匹配比为

$$\mu = \Omega E\mathscr{E}/(\Omega AE\mathscr{E}), \tag{20}$$

对 $\mathscr{E}$ 的传射率为

$$\tau = \Omega E\mathscr{E}/(\Omega\mathscr{E}). \tag{21}$$

匹配比和传射率反映了束和系统之间相互配合的特性．理想的配合应当是 $\mu = 1$，$\tau = 1$．

7 结　束　语

本文在研究束流光学中各种变换群的基础上讨论了周期场聚焦、束的匹配、色散和象差等问题．这些讨论显然是初步的，有待于进一步深入研究．

作者感谢王书鸿和杜东生教授的支持．

参　考　文　献

[1] 郁庆长，高能物理与核物理，**17**(1993)878．
[2] K. L. Brown and R. V. Servranckx, *Nucl. Instr. Meth.*, **A258** (1987) 480.
[3] 郁庆长，强流离子光学原理，原子能出版社，北京，1982，第五章．

Transformation Groups in Beam Optics

(II) Beam Optical Elements and Systems

Yu Qingchang

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing* 100039)

Received on November 16, 1992

Abstract

On the basis of the research of the transformation groups in beam optics, some problems such as the periodic field focusing, beam matching, chromatic dispersion and aberration are discussed.

Key Words Beam optics, Transformation groups, Periodic field focusing.