第 18 卷 第10期　　高能物理与核物理　　Vol. 18, No. 10
1994 年 10 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Oct., 1994

# 4+2$D$ 维 Einstein-Maxwell 量子宇宙*

倪致祥　马　涛[1)]
(阜阳师范学院物理系　安徽　236032)
1993 年 6 月 16 日收到

**摘　要**

利用推广的 Hartle-Hawking 假设,研究了 4+2$D$ 维 Einstein-Maxwell 量子宇宙，计算了微超空间波函数的近似解。发现当 $D \leqslant 2$ 时存在与观测宇宙相符合的暴胀解.

**关键词**　量子宇宙,微超空间,临界维数.

## 1 引　言

自从 J. B. Hartle 和 S. W. Hawking 提出了"宇宙的边界条件就是宇宙不存在边界"[1],宇宙初态的奇异性问题有了一个解决的好方案. 量子宇宙学引起了人们重视. 按 Hartle-Hawking 方案,宇宙量子态为欧氏量子引力中的基态，其波函数由对所有紧致 4 度规和规则物质场的路径积分给出. 已经构造出一些量子宇宙模型，其量子态的经典极限和观测宇宙某些性质相符. 这些成功的尝试有力地支持了 H-H 方案.

近年来,把 H-H 方案扩充到高维理论,寻找与观测宇宙一致的波函数已成为一个非常令人感兴趣的课题.[2]利用推广的 H-H 方案，Halliwall 研究了 6 维 Einstein-Maxwell 理论和 6 维超引力，[3]李新洲等研究了 10 维 Kalb-Ramond 理论[4]和 8 维 Einstein-杨-Mills 理论[5]. 本文中我们将讨论一类含有偶数维额外空间的 Einstein-Maxwell 理论. 利用推广的 H-H 方案我们计算了微超空间中的波函数，发现其中一类波函数的经典极限对应于额外空间收缩，3 维空间指数膨胀的 inflation 宇宙.

## 2　4+2$D$ 维 Einstein-Maxwell 理论的正则形式

带有宇宙常数 $\Lambda$ 的 4+2$D$ 维 E-M 理论的作用量为

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int_M d^{4+2D}z\sqrt{g}\,(R-2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial M} d^{3+2D}zKh^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\int_M d^{4+2D}z\sqrt{g}\,F_{MN}F^{MN} \tag{2.1}$$

---

* 国家自然科学基金和安徽省教委资助.
1) 华东理论物理研究所　上海　200237.

其中 $F_{MN}$ 为 Maxwell 场强，$M,N=0,1,2,\cdots,3+2D,h=\det h_{IJ},K=K^{IJ},h_{IJ},I,J=1,2,\cdots,3+2D,h_{IJ}$ 和 $K^{IJ}$ 分别为类空超曲面上的内秉度规和第二基本形式．取推广的 Robertson-Walker 度规

$$g_{MN}\mathrm{d}z^M\mathrm{d}z^N=\sigma^2\left[-N^2(t)\mathrm{d}t^2+a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2+\sum_{i=1}^{D}b_i^2(t)\mathrm{d}\Omega_{2,i}^2\right] \tag{2.2}$$

其中 $N(t)$ 为延迟函数，$a(t)$ 和 $b_i(t)$ 分别为三维空间和额外空间中的标度因子，相应地有

$$\mathrm{d}\Omega_3^2=\mathrm{d}r^2+\sin^2r(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\quad \mathrm{d}\Omega_{2,i}^2=\mathrm{d}\theta_i^2+\sin^2\theta_i\mathrm{d}\varphi_i^2$$

容易得出具有拓朴 $R\times S^3\times S^2\times S^2\times\cdots\cdots\times S^2$ 的解为

$$\sum_N A_N\mathrm{d}z^N=\sum_{i=1}^{D}\frac{1}{2e}(\cos\theta_i\mp 1)\mathrm{d}\varphi_i \tag{2.3}$$

这对应于额外空间中各个 2 球的磁单极子数均为 1 的情况．

将(2.2)和(2.3)代入(2.1)式，我们得到

$$\begin{aligned}S=&\frac{3}{16G}(4\pi\sigma^2)^{D+1}\int\mathrm{d}tNa^3\prod_{i=1}^{D}b_i^2\left\{\frac{1}{a^2}-m^2\left[\sum_{i=1}^{D}\left(\frac{b_0^2}{b_i^2}-1\right)^2+\varepsilon\right]\right.\\&\left.+\frac{1}{N^2}\left[\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{D}\left(\frac{\dot b_i}{b_i}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\sum_{i=1}^{D}\frac{\dot b_i}{b_i}\right)^2-2\frac{\dot a}{a}\left(\sum_{i=1}^{D}\frac{\dot b_i}{b_i}\right)-\frac{\dot a^2}{a^2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中

$$m^2=\frac{e^2\sigma^2}{12\pi G},\quad b_0=\frac{\sqrt{6}}{6m},\quad \varepsilon=\sigma^2\left(\Lambda-\frac{e^2\cdot D}{4\pi G}\right)$$

为了简化(2.4)式，我们作变换

$$\begin{cases}\phi^i=\ln\dfrac{b_i}{b_0},\quad \phi=\displaystyle\sum_{i=1}^{D}\phi^i\\ \mu=\ln a+\phi\end{cases} \tag{2.5}$$

即有

$$S=\int L\mathrm{d}t \tag{2.6}$$

其中 $L=\frac{1}{2}Ne^{3\mu+\phi}\left\{\frac{1}{N^2e^{2\phi}}(-\dot\mu^2+G_{ij}\dot\phi^i\cdot\dot\phi^j)+e^{-2\mu}-m^2V\right\}$，$G_{i,j}=\frac{1}{3}(1+\delta_{ij})$为微超空间的度规张量，

$$V=e^{-2\phi}\left[\sum_{i=1}^{D}(e^{-2\phi^i}-1)^2+\varepsilon\right] \tag{2.7}$$

可调参数 $\sigma$ 的选取使拉格朗日函数 $L$ 中的系数恰为 $\frac{1}{2}$．适当选取 $\Lambda$ 的值可使 $\varepsilon=0$，这时 $V(\phi_i)$ 在 $\phi^i=0$ 处取极小值 $V_{\min}=0$，相当于 4 维有效宇宙常数为零，这是人们所感兴趣的情况．

由经典理论得到广义动量及哈密顿量为

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}} = -\frac{1}{Ne^\phi} e^{3\mu}\dot{\mu}$$
$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} = \frac{1}{Ne^\phi} e^{3\mu} G_{i,j}\dot{\phi}^j \tag{2.8}$$

$$H = \frac{1}{2} N \cdot e^{\phi-3\mu}\{-\pi_\mu^2 + G^{i,j}\pi_i\pi_j + U(\mu,\phi^i)\} \tag{2.9}$$

其中 $G^{i,j} = 3\left(\delta_{ij} - \frac{1}{D+1}\right)$ 为 $G_{i,j}$ 的逆,

$$U(\mu,\phi^i) = m^2 e^{6\mu} V(\phi^i) - e^{4\mu} \tag{2.10}$$

因为$N$的选取有任意性，故由(2.9)式我们可得哈密顿约束 $H=0$，取 $N = e^{-\phi}$ 容易得到体系的经典运动方程为

$$\frac{d}{dt}(e^{3\mu}\dot{\mu}) = \frac{1}{2} e^{-3\mu} \frac{\partial U}{\partial \mu}$$
$$\frac{d}{dt}(e^{3\mu} G_{ij}\dot{\phi}^j) = -\frac{1}{2} e^{-3\mu} \frac{\partial U}{\partial \phi^i} \tag{2.11}$$

## 3　Wheeler-Dewitt 方程及其解

对哈密顿约束进行量子化,我们立即可以得到 Wheeler-Dewitt 方程[7]. 适当选择算符次序后[8],即有

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - G^{ij}\frac{\partial^2}{\partial \phi^i \partial \phi^j} + U(\mu,\phi^i)\right]\psi(\mu,\phi^i) = 0 \tag{3.1}$$

由于 $G_{i,j}$ 为正定,故上式为 $D+1$ 维微超空间中的双曲型方程.

采用推广的 H-H 方案，波函数可表示为紧致 4+2$D$ 维度规和正则物质场上的路径积分

$$\psi = \int_c d[\mu]d[\phi^1]\cdots d[\phi^D]e^{-I} \tag{3.2}$$

其中 $I = -iS$ 为欧氏作用量,积分路径采用欧氏时间 $\tau = i\int N dt$ 来描述. 取 $\tau = 0$ 为初始时刻,由度规的紧致性和物质场的正则性要求,初始条件可取为

$$\begin{cases} a = 0, & b_i > 0 \\ \dot{a} = 1, & \dot{b}_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,D) \tag{3.3}$$

这意味着 $\tau \to 0$ 时，$\mu \to -\infty$。 从初始点 $\tau = 0$ 到一个非常接近于 $\tau = 0$ 的点$(\mu,\phi^i)$的任意路径的欧氏作用量容易积出为

$$I = -\frac{1}{2} e^{2\mu} + \frac{1}{8} m^2 e^{4\mu} V(\phi^i) \tag{3.4}$$

因此在 $\mu \to -\infty$ 时,波函数的渐近形式为

$$\psi(\mu,\phi^i) = \exp\left\{\frac{1}{2} e^{2\mu} - \frac{1}{8} m^2 e^{4\mu} V\right\} \tag{3.5}$$

这个结果提供了 Wheeler-Dewitt 方程的边界条件.

下面我们讨论波函数的一般性质. 对于微超空间度规 $ds^2 = -d\mu^2 + G_{ij}d\phi^i d\phi^j$ 来说,如果超曲面 $U = C$ 是类空的,则有 $\left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)^2 > G^{ij}\left(\frac{\partial U}{\partial \phi^i}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial \phi^j}\right)$ 因此在某个局部选择一个适当的广义洛仑兹变换,可使超曲面的法向量平行于新的时间轴 $\tilde{\mu}$, 于是 $U(\mu,\phi^i)$ 在此局部仅依赖于新的时间参数. 假定此时波函数随新参数 $\tilde{\phi}^i$ 的变化很小, 由方程(3.1)式不难看出当 $U < 0$ 时波函数应为指数型的,当 $U > 0$ 时为振荡型的. 反之, 如超曲面 $U = C$ 是类时的,波函数随 $\tilde{\mu}$ 变化很小,则 $U < 0$ 时波函数为振荡型, $U > 0$ 时为指数型. 波函数指数区与振荡区的分界面由 $U(\mu,\phi^i) = 0$ 和

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)^2 - G^{i,j}\left(\frac{\partial U}{\partial \phi^i}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial \phi^j}\right) = 0 \tag{3.6}$$

共同决定. 利用表达式(2.10)我们不难得到

| 波函数 | $e^{-2\mu} < m^2V_-$ 或 $e^{-2\mu} > m^2V^+$ | $m^2 \cdot V_- < e^{-2\mu} < m^2V_+$ |
|---|---|---|
| $e^{-2\mu} > m^2V$ | 指数型 | 振荡型 |
| $e^{-2\mu} < m^2V$ | 振荡型 | 指数型 |

上表中

$$V_\pm = \frac{3}{2}V \pm \frac{1}{4}\left(G^{ij}\frac{\partial V}{\partial \phi^i}\frac{\partial V}{\partial \phi^j}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

当 $\phi^i$ 取定值而 $\mu \to -\infty$ 时, 由上表可知波函数应为指数型. 此结果与边界条件(3.5)式一致,这正是我们所预期的.

由(2.7)式可知 $\phi^i = \frac{1}{2}\ln\frac{D+2}{D}$ 是势函数 $V(\phi^i)$ 的临界点,它满足经典运动方程(2.11). 当 $U < 0$ 时,在临界点附近的波函数可由路径积分近似求出

$$\psi \approx A\exp\left\{\frac{1}{3m^2V}\left[1 - (1 - e^{2\mu}m^2V)^{\frac{3}{2}}\right]\right\} \tag{3.8}$$

$\mu \to -\infty$ 时, $A \to 1$, 满足边界条件(3.5).

在 $U > 0$ 区域,利用 WKB 近似可算出

$$\psi \approx B\exp\left(\frac{1}{3m^2V}\right)\cos\left\{\frac{1}{3m^2V}\left[e^{2\mu}m^2V - 1\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right\} \tag{3.9}$$

因为在临界点邻域 $\frac{\partial V}{\partial \phi^i} \doteq 0$, 故(3.7)式中 $V_+ \doteq V_-$, 由前面对波函数的一般讨论可知这时其类型取决于 $U$ 的符号. 当 $U < 0$ 时 $\psi$ 为指数型, 反之为振荡型. 这和(3.8)、(3.9)两式是完全一致的.

## 4 波函数的物理解释和临界维数

在振荡区波函数在经典近似下对应于一个洛仑兹几何,这与我们的观测宇宙相符合.

而在指数区波函数对应于一个欧氏几何，因此可以看成经典禁区。当标度因子 $b_i$ 一定时，$a \to 0$ 将到达一个指数区，这是经典理论所不允许的。

为了讨论振荡区中波函数的意义，我们采用 WKB 近似。把波函数表示为

$$\phi = \mathrm{Re}[ce^{iS}] \tag{4.1}$$

其中 $S$ 为一迅变相因子，$C$ 是缓变函数。将(4.1)式代入 Wheeler-Dewitt 方程(3.1)式后即得

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)^2 + G^{ij}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi^i}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi^j}\right) + U(\mu, \phi^i) = 0 \tag{4.2}$$

这正好是经典的 Hamiton-Jacobi 方程。因此波函数(4.1)可以看成满足下列方程的经典轨道的叠加

$$\begin{cases} \pi_\mu = \dfrac{\partial S}{\partial \mu} \\ \pi_i = \dfrac{\partial S}{\partial \phi^i} \end{cases} \tag{4.3}$$

在临界点邻域，$U > 0$ 时波函数为振荡型。比较(3.9)与(4.1)两式即可得

$$S = \pm \frac{1}{3m^2 \cdot V}[e^{2\mu}m^2V - 1]^{\frac{3}{2}} \mp \frac{\pi}{4} \tag{4.4}$$

上式在临界点 $\phi^i = \frac{1}{2}\ln\frac{D+2}{D}$ 展开后有

$$S \approx \pm\frac{1}{3}\, me^{3\mu}V_m^{1/2}\left(1 - \frac{1}{2}V_{ij}\delta^i\delta^j\right) \mp \frac{\pi}{4} \tag{4.5}$$

其中 $V_m = \frac{4}{D}\left(\frac{D}{D+2}\right)^{D+2}$ 为 $V(\phi^i)$ 在临界点的值，$\delta^i = e^{-2\phi^i} - \frac{D}{D+2}$ 为偏离，$V_{ij} = \left(\frac{D+2}{2D}\right)^2[(2-D)\delta_{ij} + 2]$。上式代入运动方程(4.3)可得

$$\begin{cases} \dot{\mu} = \eta m V_m^{1/2}\left(1 - \dfrac{1}{2}V_{ij}\delta^i\delta^j\right) \\ G_{ij}\dot{\phi}^j = -\dfrac{2}{3}\,\eta m V_m^{1/2} V_{li}\delta^l e^{-2\phi^i} \end{cases} \tag{4.6}$$

其中 $\eta = \pm 1$，对应不同的经典轨道。当 $\eta = -1$ 时，标度因子 $a$ 指数减小，这不是人们有兴趣的情况。下面我们仅讨论 $\eta = +1$ 的情况。

当 $D = 1$ 时，在临界点 $\phi^1 = \frac{1}{2}\ln 3$，$V$ 取极大值 $V_m = \frac{4}{27}$。对此文献[3]中已作了讨论。在 $\phi^1 < \frac{1}{2}\ln 3$ 时有标度因子 $a$ 作指数增加，同时 $b_1$ 减小的物理解。

当 $D = 2$ 时，在临界点 $\phi^1 = \phi^2 = \frac{1}{2}\ln 2$，$V$ 取极大值 $V_m = \frac{1}{8}$。(4.6)式成为

$$
\begin{cases}
\dot{\mu}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}m[1-(e^{-2\phi^1}+e^{-2\phi^2}-1)^2] \\
\dot{\phi}^1=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}m(e^{-2\phi^1}+e^{-2\phi^2}-1)(2\cdot e^{-2\phi^1}-e^{-2\phi^2}) \\
\dot{\phi}^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}m(e^{-2\phi^1}+e^{-2\phi^2}-1)(2\cdot e^{-2\phi^2}-e^{-\phi^1})
\end{cases}
\tag{4.7}
$$

为了方便,我们令:

$$
\begin{cases}
z_+=e^{-2\phi^1}+e^{-2\phi^2} \\
z_-=e^{-2\phi^1}-e^{-2\phi^2}
\end{cases}
\tag{4.8}
$$

则有:

$$
\begin{cases}
\dot{\mu}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}m[1-(z_+-1)^2] \\
\dot{z}_+=\dfrac{\sqrt{2}}{6}m(z_+-1)(z_+^2+3z_-^2) \\
\dot{z}_-=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}m(z_+-1)z_+z_-
\end{cases}
\tag{4.9}
$$

当初值充分接近极大值点时，$z_{+0}\approx 1$，$\dot{\mu}\approx\dfrac{\sqrt{2}}{4}m$。 故标度因子 $a$ 将按 $\exp\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}mt\right)$ 指数增加。如果初值 $z_{+0}<1$，则 $z_+$ 将按指数律减小，这时额外空间的标度因子 $b_1$ 和 $b_2$ 将迅速增加。这种情况不对应于观察宇宙。

如果 $z_{+0}>1$，此时 $z_+$ 和 $|z_-|$ 均迅速增加。但是只要初值足够接近极大值点，在 $z_+$ 接近 2 时 $|z_-|$ 就能保持足够小的量值。 这种情况下 $\phi^1$ 和 $\phi^2$ 将几乎同时减小到极小值点 $\phi^1=\phi^2=0$ 附近。此时 $\dot{\mu}\approx 0$，标度因子 $a$ 指数膨胀的过程结束。 在过程中宇宙尺度膨胀为 $|\phi_0^1+\phi_0^2-\ln 2|^{-1}$ 量级，在适当的初值条件下，我们能获得足够大的暴胀来解决平坦性问题。

当 $D\geqslant 3$ 时，$\phi^i=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{D+2}{D}$ 为势函数 $V(\phi^i)$ 的鞍点。在鞍点邻域沿 $(1,1,\cdots,1)$ 方向 $V$ 取极大值，与之正交的其它方向上 $V$ 均取极小值。因此在初值足够接近鞍点时，只考虑沿 $(1,1,\cdots,1)$ 方向的运动将是一个很好的近似。 此时我们可设 $\phi^1=\phi^2=\cdots=\phi^D=\varphi$，势函数 $V$ 约化为

$$V=De^{-2D\varphi}(e^{-2\varphi}-1)^2 \tag{4.10}$$

运动方程(4.6)式约化为

$$\dot{\mu}=mV_m^{1/2}\left[1-\frac{(D+2)^3}{8D}\left(e^{-2\varphi}-\frac{D}{D+2}\right)^2\right] \tag{4.11}$$

$$\dot{\varphi}=-\frac{m}{2}\frac{(D+2)^3}{D^2(D+1)}V_m^{1/2}\left(e^{-2\varphi}-\frac{D}{D+2}\right)e^{-2\varphi} \tag{4.12}$$

当 $\varphi\approx\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{D+2}{D}$ 时，由(4.11)式可知标度因子 $a$ 将按指数律 $\exp(mV_m^{1/2}t)$ 增大。只要

初值 $\varphi_0$ 稍小于 $\frac{1}{2}\ln\frac{D+2}{D}$，则由(4.12)式可知 $\varphi$ 及 $b_i$ 将迅速减小。这正是暴胀解的特点。

然而观测表明，目前宇宙是以幂函数形式膨胀的，这要求存在某个时刻标度因子 $a$ 的指数膨胀过程结束，即 $\dot{\mu}$ 减小为零。由(4.11)式，这等价于要求存在一个临界维数 $D_c$，使得

$$\frac{(D+2)^3}{8D}\left(1-\frac{D}{D+2}\right)^2 \geqslant 1 \tag{4.13}$$

容易看出条件为 $D \leqslant D_c = 2$。$D_c$ 即为我们所考虑的 4+2D 维 Einstein-Maxwell 量子宇宙模型中存在与可观察宇宙一致的暴胀解的临界值。

## 5 结　　论

通过以上讨论，本文得到如下结果。

(1) 给出了时空拓扑为 $R\times S^3\times S^2\times\cdots\times S^2$ 的 4+2D 维 Einstein-Maxwell 量子宇宙模型微超空间波函数的近似解。

(2) 对任意的自然数 $D$，在适当的初值条件下均存在三维空间指数膨胀，额外空间收缩的暴胀解。

(3) 存在临界值 $D_c=2$，仅当 $D\leqslant D_c$ 时上述暴胀解自动转化为幂函数膨胀，与观察宇宙相符合。

## 参　考　文　献

[1] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev.*, **D28** (1983) 2960.
[2] 李新洲等，时空的维数，江西科技出版社(1992)，第 10 章。
[3] J. J. Halliwell, *Nucl. Phys.*, **B266** (1986) 228; *Nucl. Phys.*, **B286**(1987) 729.
[4] Li Xinzhou and Zhong Yu, *Phys. Rev.*, **D42** (1990) 2146.
[5] 李新洲、苏乘，高能物理与核物理，**15**(1991)303.
[6] Li Xinzhou and Zhong Yu., *Comm. in theor. Phys.*, **13**(1991) 113.
[7] B. S. Dewitt, *Phys. Rev.*, **160**(1967) 1113.
[8] S. W. Hawking and D. N. Page, *Nucl. Phys.*, **B264**(1985) 185.
[9] M. S. Turner, *Phys. Rhys. Rev.*, **D28**(1983) 1243.

# The Quantum Cosmology of 4+2$D$ Dimensional Einstein-Maxwell Theory

Ni Zhixiang Ma Tao

*(Department of Physics, Fuyang Teachers' College Anhui* 236032)
Received on June 16, 1993

Abstract

We deal with the quantum cosmology of the 4+2$D$ dimensional Einstein-Maxwell theory, and calculate minisuperspace wave functions by using the Hartle-Hawking proposal. we find that there exists a class of wave functions that correspond to an observed universe in the classical limit when $D \leqslant 2$.

**Key words** quantum cosmology, minisuperspace, critical dimension.