第17卷 第9期
1993年9月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 9
Sept., 1993

膨胀宇宙中孤立气团的运动

张邦固
(科学出版社,北京 100717)

摘 要

本文讨论了膨胀宇宙中孤立气团的运动。发现,除了静态孤立气团的收缩条件(分层统计均匀和初始半径大于临界值 D_r^{-1})之外,膨胀情形下收缩条件还要包括,哈勃常量 H 小于某个常量 D_t.

一、引 言

文献[1]和[2]讨论了静态孤立气团的运动,方程如下[3].

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}f+\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{a}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}f=0. \tag{1}$$

其中分布函数 $f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t)$ 是坐标空间中 $\boldsymbol{r}$ 附近单位体积内、速度空间内 $\boldsymbol{v}$ 附近单位元内、t 时刻的粒子数,$\boldsymbol{a}$ 是粒子的加速度.主要结论是,在分层均匀的条件下,如果气团初始半径 r_0 大于临界值

$$D_r^{-1}=(3kT/4\pi n_0 m^2 G)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

气团就会在自身的引力作用下收缩,并在诞生时间 $d_t^{-1}=\mathrm{e}^{\frac{1}{24}}D_t^{-1}$ 内形成恒星.其中

$$D_t=\left(\frac{4\pi}{3}n_0 mG\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

(2)式中的 k 为玻耳兹曼常量,T 和 n_0 分别是初始时刻气团中心处的绝对温度和粒子数密度,m 是单个粒子的质量,G 是引力常量.

本文将讨论膨胀宇宙中孤立气团收缩的条件及形成恒星所需要的时间.

二、宇宙膨胀在孤立气团中的反映

根据哈勃定律[4],宇宙膨胀主要表现在,任何两个天体之间的相对速度的方向背向对方,大小正比于它们之间的距离:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{r}=Hr, \tag{4}$$

其中的比例常量 H 称哈勃常量.当前,H 的数值是[5]

$$H=15(\mathrm{km/s})(\mathrm{Ml.\,y.})^{-1}. \tag{5}$$

本文1992年3月27日收到.

对于宇宙当中的粒子(原子、分子、尘埃),哈勃定律也应该适用.也就是说,除了无规热运动之外,气团粒子还有一个可以用哈勃定律描述的膨胀速度 $\dot{r}$.宇宙膨胀是过去大爆炸的遗迹,换句话说,它只能以初始条件的形式影响气团的运动.综上所述,这时的初始条件应该是

$$f_0 = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} C_v^3 \exp\{-\frac{1}{2} C_v^2 [(v_r - \dot{r})^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2]\} n_0 \begin{cases} 1, & r < r_0. \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \tag{6}$$

其中还包含了分层统计均匀(服从麦克斯韦分布)和均匀密度的假设.当然,初始条件[6]只能是真实物理状况的一种近似,一个模型,希望它能反映出实际情况的主要特征.

将哈勃定律(4)代入,整理后,可以将初始条件写成

$$f_0 = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} C_v^3 \exp[-\frac{1}{2}(V_r - \sigma x)^2 - \frac{1}{2} V_\theta^2 - \frac{1}{2} V_\varphi^2] n_0 \begin{cases} 1, r < r_0. \\ 0, r > r_0. \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$C_v = (m/kT)^{\frac{1}{2}} = \frac{D_r}{D_t},\ \boldsymbol{V} = C_v \boldsymbol{v}. \tag{8}$$

$$\sigma = C_v H r_0,\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}/r_0. \tag{9}$$

三、孤立气团的运动

从基本动力学方程(1)出发,采用时间级数展开[6]:

$$f(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{x}, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^i f_i(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{x}), \tag{10}$$

并假设[2]

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}} = \hat{\hat{I}} \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^2 \tau^i, \tag{11}$$

可以得到关于 $f_i(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{x})$ 的递推公式:

$$(i+1) f_{i+1}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{V}}{R_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} f_i + \sum_{j=0}^{i} (C_j x^2 \boldsymbol{V} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{V}} + R_0 A_j \frac{\partial}{\partial V_r}) f_{i-j} = 0. \tag{12}$$

(10)中 $\tau = D_t t$ 是无量纲的时间.(11)中的 $\hat{\hat{I}}$ 是单位张量,C_i 为待定常数,需逐级地用粒子数守恒判据[2]

$$N_i = \int d^3 r \eta_i(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{13}$$

来确定.其中

$$\eta_i(r) = \int d^3 v f_i(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}). \tag{14}$$

(12)中的 $R_0 = D_r r_0$,而

$$A_j = -\frac{3}{x^2} \int_0^x x'^2 dx' \eta_j(x') n_0^{-1}. \tag{15}$$

不难得到

$$C_0 = \frac{5}{3} \frac{\sigma}{R_0}. \tag{16}$$

$$f_1 = \frac{\sigma}{R_0}(-1+\frac{5}{3}x^2)(V^2 - V_r x\sigma)f_0 - R_0 x(V_r - x\sigma)f_0. \tag{17}$$

$$\eta_1 = n_0\frac{\sigma}{R_0}(-3+5x^2). \tag{18}$$

与静态情况不同,这里的 η_1 不再为零. 它是一个使气团中心密度减少的弥散项. 把(9)中的 σ 与 R_0 相除,有

$$\sigma/R_0 = H/D_t. \tag{19}$$

也就是说,此弥散项与哈勃常量有关,H 越大,宇宙膨胀越快,此弥散项越大.

继续推到第二级,有

$$A_1 = \frac{\sigma}{R_0}3x(1-x^2). \tag{20}$$

$$C_1 = -\frac{5}{3} + 3\frac{17}{63}\frac{\sigma^2}{R_0^2}. \tag{21}$$

$$\eta_2 = n_0[\frac{3}{2} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{\sigma^2}{R_0^2}(6 - 18\frac{13}{14}x^2 + 12\frac{1}{2}x^4)]. \tag{22}$$

可以看出,如果忽略掉与$\frac{\sigma}{R_0}$有关的项,则结果与静态情况完全相同.

在进行讨论之前,让我们来看看非均匀初始密度分布情形下会有什么结果,即代替(6),用下式为初始条件:

$$f_0 = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}C_v^3\exp\{-\frac{1}{2}C_v^2[(v_r-\dot{r})^2+v_\theta^2+v_\varphi^2]\}n_0(1-x^2)\begin{cases}1, x<1.\\0, x>1.\end{cases} \tag{23}$$

重复上述步骤,可以发现,相应有

$$\eta_1 = n_0\frac{\sigma}{R_0}(-3+5x^2), \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\eta_2 = {} & n_0(\frac{3}{2} - 7x^2 + \frac{63}{10}x^4) + n_0\frac{\sigma^2}{R_0^2}(6-10x^2)\\ & - \frac{n_0}{R_0^2}(1+\frac{35}{4}x^2 - \frac{175}{12}x^4 + \frac{75}{4}\sigma^2x^2 - \frac{105}{4}\sigma^2x^4).\end{aligned} \tag{25}$$

我们看到,这时,在 η_2 中又出现了一些与 R_0^{-2} 有关的项,而且,它们也是使气团中心处密度减少的项. 这种项在静态情形下便出现过,正是如此,静态气团收缩条件中才有 $r_0 > D_r^{-1}$ 这一条. 这是正常的,设想,若令 $H=0$,则膨胀宇宙成了静态的. 各种条件自然应与静态时相同.

四、讨论和结论

将(5)给出的 H 值和(3)中的 D_t 值(设 $n_0m=10^{-19}\text{kg/m}^3$)[7]代入,可得

$$\sigma/R_0 = H/D_t \approx 3\times10^{-4}, \tag{26}$$

它比 1 小得多. 虽然一级近似中只有与 σ/R_0 有关的项,但是,从静态孤立气团的讨论[1,2]知道,气团的收缩只有在 $\tau\sim1$ 时才变得明显. 这时,各级贡献都几乎是平等的. 差三四个数量级的项自然可以忽略. 也就是说,在目前,膨胀环境对孤立气团的运动没有多大影响.

在宇宙早期(大爆炸后约一百万年),由于哈勃常量变大,情况比较复杂.已经知道[8],那时有

$$H = \sqrt{8\pi\bar{\rho}G/3}. \tag{27}$$

其中 $\bar{\rho}$ 是整个宇宙的平均密度,于是

$$\sigma/R_0 = \sqrt{2\bar{\rho}/\rho_0}. \tag{28}$$

现将结论强调一下.除了静态孤立气团的下述收缩条件外:

1. 气团初始分布分层统计均匀.

2. 气团初始半径 r_0 大于临界值 D_r^{-1}.

膨胀环境中的孤立气团还必须满足一个新的收缩条件:

3. 哈勃常数小于某临界值 D_t.

第三个条件在目前是自动满足的.而在宇宙早期,此条件变成

3°. 气团中心处密度大于宇宙平均密度的两倍.

最后,与静态时情形相仿,充分满足上述条件(即 $r_0 \gg D_r^{-1}$,$\rho_0 \gg 2\bar{\rho}$)的孤立膨胀气团会在诞生时间 d_t^{-1} 内形成恒星.

参考文献

[1] Zhang Banggu, Proceedings of the 5th Symposium on the Frontiers and Fundamentals of Theoretical Physics, June 1991, Xin Yang, 275.

[2] Zhang Banggu, Nonlinear Problems in Engineering and Science, Oct. 1991, Beijing, 294.

[3] Zhang Banggu, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 761.

[4] 林忠四郎,早川幸男(师华译),宇宙物理学,科学出版社,1981,§1.5,e).

[5] 温伯格,S.(冼鼎钧等译),最初三分钟,科学出版社,1981.

[6] Zhang Banggu, *J. Phys.*, *A*, **20**(1987), L959.

[7] 佐藤文隆,蓬茨灵运,中野武宣(赵南生,丁之平译),恒星的演化,科学出版社,1983,p34.

[8] 温伯格,S(邹振隆等译),引力论和宇宙论,科学出版社,1984,第(15.6.2)式.

The Motion of an Isolated Gas Group in Expanding Universe

ZHANG BANGGU

(*Science Press, Beijing* 100717)

ABSTRACT

The contraction of an isolated gas group in the expanding universe has been discussed. It is found that in addition to the contracted conditions of the statical isolated gas group, the initial gas group is straticulate statistical uniform and the initial radius is larger than a critical value D_r^{-1}, the contracted conditions of expanding case also include that the Hubble constant H is smaller than a constant D_t.