第17卷 第6期
1993年6月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 6
June, 1993

静轴对称自对偶 Yang-Mills 场的隐对称及其代数结构*

郝三如

（长沙水电师范学院物理系， 410077）

摘　要

本文给出了静轴对称自对偶 Yang-Mills（SDYM）场的新的变换，并证明它们是对称变换；对于李群 $SL(N,R)/SO(N)$ 的李代数生成元 θ 所取两种形式，给出了相应的对称变换形式；利用 Yang-Baxter 等式及括号，得到了基本场对称变换的 Loop（或 Kac-Moody）和共形（或 Virasoro）的代数结构. 本文中得到的结论可以推广到其它模型.

一、引言

近年来，在二维主手征模型[1-4]及四维自对偶 Yang－Mills 场方程[5-8]中理解存在无穷参数的隐藏对称和 Loop 李代数结构方面已取得很大进展更进一步的研究表明，在某些非线性模型中[9-12]也存在着与 Virasoro 代数相关的共形对称. 对这类问题的研究有两种基本方法：一种是明显构造出基本场[1,6-8]的无穷小隐对称变换；另一种方法[9,10]是对辅助量一线性方程组的解，进行正则的无穷小 Riemann-Hilbert 变换. 本文，我们用第一种方法构造出物理上最为关心的静轴对称 SDYM 场具体的变换形式，并讨论静轴对称 SDYM 场的这种无穷小变换的对称性，进而给出其代数结构.

在第二节中，我们简单地分析在静轴对称情况下 SDYM 场约化成一个二维场理论的对称性. 构造出基本场的无穷小正则变换，并证明它是一种对称变换. 在第三节中，我们给出了对称变换的代数结构. 一个简短的讨论和说明在最后一节中给出.

二、静轴对称 SDYM 场方程及对称变换

众所周知，四维欧时空中的 $SU(N)$ 规范的 SDYM 场方程是

$$F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \qquad (2.1)$$

本文1991年12月26日收到.

* 湖南省科委资助.

据杨[11]的方法，我们在基空间选取复坐标

$$\begin{aligned} \mathrm{u} &= \frac{1}{2}(x+iy), \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{2}(Z-i\tau). \\ \bar{\mathrm{u}} &= \frac{1}{2}(x-iy), \qquad \bar{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}(Z+i\tau). \end{aligned} \tag{2.2}$$

那么，自对偶条件（2. 1）式约化成

$$F_{\mathrm{uv}} = F_{\bar{\mathrm{u}}\bar{\mathrm{v}}} = 0 \tag{2.3}$$

$$F_{\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}} + F_{\mathrm{v}\bar{\mathrm{v}}} = 0 \tag{2.4}$$

方程（2. 3）隐含规范势可以写成复二维空间的纯规范，而（2. 4）式就是这种规范必须满足的约束. 选取适当的规范后，就可以得到通常形式下的所谓 J-形式[12]：

$$\partial_{\mathrm{u}}(J^{-1}\partial_{\bar{\mathrm{u}}}J) + \partial_{\mathrm{v}}(J^{-1}\partial_{\bar{\mathrm{v}}}J) = 0, \tag{2.5}$$

上式中的 J 是取值在 SL（N，C）上的矩阵函数. 由于可以有两个 Killing 矢量存在，这样可以选取柱坐标，利用演化算子 n，在对称空间 SL（N，R）/SO（N）中构造一个实的静轴对称的 SDYM 场 N（ρ，z）：

$$N(\rho,z) = gng^{-1}, g\varepsilon SL(N.R), N^2(\rho,z) = 1.$$

由此（2. 5）式就可以约化到二维空间中实的静轴对称 SDYM 场方程[12]，

$$\partial_\rho(\rho A_\rho) + \partial_z(\rho A_z) = 0, \tag{2.6}$$

式中 $A_\mu = N^{-1}\partial_\mu N. \mu = \rho, z$ 是柱坐标，并且 $N(\rho,z)\varepsilon SL(N,R)/SO(N)$.

利用由运动方程和 Gallss-Codazzi 方程之间的分立对偶对称推广得到的连约对偶对称变换，能够得到静轴对称 SDYM 场方程的线性化系统：

$$\partial_\rho U(\rho,z,l) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}(A_z - \lambda A_\rho)U(\rho,z,l), \tag{2.7a}$$

$$\partial_z U(\rho,z,l) = -\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(A_\rho + \lambda A_z)U(\rho,z,l). \tag{2.7b}$$

其中 $U(\rho,z,l)$ 取值在李群 SL（N，R）/SO（N）的李代数 g 上，而 λ 是 ρ，z 和参数 l 的函数，

$$\lambda \equiv \lambda(\rho,z,l) = \frac{1}{l\rho}(1 - lz - \sqrt{(1-lz)^2 + l^2\rho^2}). \tag{2.8}$$

（2. 7）式两边的 $U(\rho,z,l)$ 可以相差一个常数乘积的自由度，因此总可以把 U（ρ，z，l）归一化为：

$$U(\rho,z,l=0) = I. \tag{2.9}$$

将（2. 7）与其它的模型[1-4,13,14]的 Zakharov-Mikhailoy 线性方程比较，我们发现存在如下差异：

1. 这里的两个偏导数是对空间坐标 ρ 和 z.
2. 这里的“规范势”是 A_ρ 和 A_z 的线性函数系数组合.
3. 参数 λ 是坐标 ρ，z 和参数 l 的函数.

现在我们证明（2. 7）的可积性. 利用方程（2. 8），我们有：

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} = \frac{\lambda(1-\lambda^2)}{\rho(1+\lambda^2)}, \frac{\partial\lambda}{\partial z} = -\frac{2\lambda^2}{\rho(1+\lambda^2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}\right]=-\frac{4}{\rho^2}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2,\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}\right]=-\frac{2}{\rho^2}\frac{\lambda^2(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^3}. \tag{2.10}$$

由上各式以及（2，7）很易证明（2. 6）式的运动方程就是系统线性方程（2. 7）的可积条件：

$$(\partial_z\partial_\rho-\partial_\rho\partial_z)U(\rho,z,l)=\frac{\lambda}{\rho(I+\lambda^2)}[\partial_\rho(\rho A_\rho)+\partial_z(\rho A_z)]. \tag{2.11}$$

下面利用我们在文献［13，14］中使用的方法来构造 A_ρ 以及 A_z 的变换形式.

利用标准的 R-H 方法，在复参数平面上取一个光滑的封闭典线 C，假定 $U\ (l)\equiv U\ (\rho,\ z,\ l)$ 在 $C+C_\pm$ 上除有限点外是解析的，并设 $\theta\ (l)$ 是群的生成元函数，而 $g\ (l)$ 是群元素. 这样在复平面上定义矩阵 $G\ (l)\ =V\ (l)\ g\ (l)\ V^{-1}\ (l)$，并设 $\chi_\pm$ 分别在 $C+C_\pm$ 上解析，由此在 C 上定义：

$$\chi_-=\chi_+G(l). \tag{2.12}$$

利用上式我们可定义新解 $U'\ (\rho,\ z,\ l)$：

$$U''(l)=\chi_+\ (l)U(l)\qquad in\ C_+, \tag{2.13a}$$

$$=\chi_-\ (l)U(l)\qquad in\ C_-. \tag{2.13b}$$

显然在 C 上两式是相容的. 利用(2.13a)式，两边用 ∂_ρ 作用，并考虑到(2.7)式有：

$$\partial_\rho U'(l)U'(l)^{-1}=\partial_\rho\chi_+\chi_+^{-1}+\chi_+\ (l)\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(A_z-\lambda A_\rho)\chi_+^{-1}$$

因此有：

$$\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(A'_z-\lambda A'\rho)=\partial_\rho\chi_+\chi_+^{-1}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\chi_+\ (l)(A_z-\lambda A_\rho)\chi_+^{-1}. \tag{2.14}$$

在 C 上，如果我们取 $\chi_+=\chi_-$ 时，则有：

$$\chi_+\ (l)=G(l)$$

在无穷小群元变换下，$g\ (l)\ =I+\theta\ (l)$，因此有：

$$\chi_+\ (l)=I+U(l)\theta(l)U(l)^{-1}. \tag{2.15}$$

定义 $\delta A_\rho=A'_\rho-A\rho,\delta A_z=A'_z-A_z$. 则有：

$$\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(\delta A_z-\lambda\delta A_\rho)=\partial_\rho(U(l)\theta(l)U^{-1}(l))+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U(l)\theta(l)U^{-1}(l),A_z-\lambda A_\rho]. \tag{2.16}$$

同理利用 ∂_z 作用有：

$$-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(\delta A_\rho+\lambda\delta A_z)=\partial_z(U(l)\theta(l)U^{-1}(l))-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U(l)\theta(l)U^{-1}(l),A_\rho+\lambda A_z]. \tag{2.17}$$

利用(2.16)及(2.17)两式有 A_ρ,A_z 的新变换：

$$\delta A_\rho=-\frac{1}{\lambda}\partial_z(U(l)\theta(l)U^{-1}(l))-\partial_\rho(U\theta U^{-1})+[U\theta U^{-1},A_\rho], \tag{2.18a}$$

$$\delta A_z=\frac{1}{\lambda}\partial_\rho(U\theta U^{-1})-\partial_z(U\theta U^{-1})+[U\theta U^{-1},A_z]. \tag{2.18b}$$

其中 $\theta\equiv\theta\ (l)$ 是群 $SL\ (N.\ R)\ /SO\ (N)$ 的李代数生成元. 下面，我们来具体证明上面构造的变换（2. 18）是对称变换. 利用（2. 7）有：

$$\partial_z(U\theta U^{-1}) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U\theta U^{-1}, A_\rho + \lambda A_z], \tag{2.19a}$$

$$\partial_\rho(U\theta U^{-1}) = -\frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U\theta U^{-1}, A_z - \lambda A_\rho]. \tag{2.19b}$$

由运动方程（2.6）以及方程（2.10）和恒等式 $\partial_\rho A_z - \partial_z A_\rho = [A_z,\ A_\rho]$，并利用（2.7）及上两式可得：

$$\begin{aligned}
&(\partial_\rho^2 + \partial_z^2)(U(l)\theta(l)U^{-1}(l)) \\
&= -\frac{\lambda}{\rho(1+\lambda^2)}[U\theta U^{-1}, A_z + \lambda A_\rho] + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U\theta U^{-1}, [A_\rho, A_z]] \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\{[[U\theta U^{-1}, A_z], A_z] + [[U\theta U^{-1}, A_\rho], A_z]\}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

由 A_ρ 及 A_z 的变换形式(2.18)，则有：

$$\begin{aligned}
&\partial_\rho(\rho\delta A_\rho) + \partial_z(\rho\delta A_z) \\
&= \partial_\rho\left\{-\frac{\rho}{\lambda}\partial_z(U\theta U^{-1}) - \rho\partial_\rho(U\theta U^{-1}) + [U\theta U^{-1}, \rho A_\rho]\right\} \\
&\quad + \partial_z\left\{\frac{\rho}{\lambda}\partial_\rho(U\theta U^{-1}) - \rho\partial_z(U\theta U^{-1}) + [U\theta U^{-1}, \rho A_z]\right\}
\end{aligned}$$

考虑到(2.10)式及反复运用辅助方程(2.19)，上式简化为：

$$\begin{aligned}
&\partial_\rho(\rho\delta A_\rho) + \partial_z(\rho\delta A_z) \\
&= -\frac{\lambda}{1+\lambda^2}[U\theta U^{-1}, A_z + \lambda A_\rho] - \rho(\partial_\rho^2 + \partial_z^2)(U\theta U^{-1}) \\
&\quad - \frac{\rho\lambda}{(1+\lambda^2)}[[U\theta U^{-1}, A_z - \lambda A_\rho], A_\rho] + \frac{\rho\lambda}{1+\lambda^2}[[U\theta U^{-1}, A_\rho + \lambda A_z], A_z].
\end{aligned}$$

将（2.20）式代入，并利用 *Jacobi* 恒等式 $[x,\ [y,\ z]] + [y,\ [z,\ x]] + [z,\ [x,\ y]] = 0$，得到：

$$\partial_\rho(\rho\delta A_\rho) + \partial_z(\rho\delta A_z) = 0. \tag{2.21}$$

因此，由（2.18）式给出的变换的确是静轴对称的 SDYM 场的隐对称变换. 定义了线性方程（2.7）的解 $U\ (\rho,\ z,\ l)$ 的变换后，很易证明（2.18）式给出的变换也是（2.7）式的对称变换.

三、对称变换的代数结构

借助 Yang-Baxter 等式[15]，如果群李代数的生成元 $\theta\ (l)$ 取适当形式，则相对于对称变换（2.18）式，可以构造出 Loop 和 Virasoro 的代数结构.

利用无穷小 *R-H* 变换，构造出 $U\ (\rho,\ z,\ l)$ 的明显变换形式[10]：

$$\delta U(l) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d\mu}{\mu - l}B(\mu)U(l), \tag{3.1}$$

其中 $U\ (l)\ \equiv U\ (\rho,\ z,\ l)$. 是（2.7）的解，而 $B\ (\mu)\ = U\ (\mu)\ \theta\ (\mu)\ U^{-1}\ (\mu)$. 利用

Yang-Baxter 等式及括号可构造它的两种解

$$R^{n,a}=R(l^nt^a)=\begin{cases}-l^nt^a, & n\geqslant 0\\ -(z-l^n)t^a, & n<0\end{cases} \tag{3.2}$$

$$R^n\equiv R(l^{n+1}\frac{\partial}{\partial l})=\begin{cases}-l^{n+1}\dfrac{\partial}{\partial l}, & n\geqslant 0\\ -(2l-l^{n+1})\dfrac{\partial}{\partial l}, & n<0\end{cases} \tag{3.3}$$

利用 $R^{n,a}$以及 R^n，将 θ（μ）展开，从而得到 U（l）的变换为：

$$\delta^{n,a}U(l)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\mathrm{d}\mu}{\pi-l}B^{n,a}(\mu)U(l). \tag{3.4}$$

$$B^{n,a}(\mu)=U(\mu)R^{n,a}(\mu)U^{-1}(\mu), \tag{3.5}$$

$$\delta^nU(l)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu-l}B^n(\mu)U(l). \tag{3.6}$$

$$B^n(\mu)=U(l)R^nU(l)^{-1}\equiv U(l)R(l^{n+1}\frac{\partial}{\partial l})U^{-1}(l). \tag{3.7}$$

利用展开后的 θ（l）形式可以得到对称变换（2.18）的相应变换形式：

$$\delta^{n,a}A_\rho=-\frac{1}{\lambda}\partial_zB^{n,a}(l)-\partial_\rho B^{n,a}(l)+[B^{n,a}(l),A_\rho], \tag{3.8a}$$

$$\delta^{n,a}A_z=\frac{1}{\lambda}\partial_\rho B^{n,a}(l)-\partial_zB^{n,a}(l)+[B^{n,a}(l),A_z], \tag{3.8b}$$

$$\delta^nA_\rho=-\frac{1}{\lambda}\partial_zB^n(l)-\partial_\rho B^n(l)+[B^n(l),A_\rho], \tag{3.9a}$$

$$\delta^nA_z=\frac{1}{\lambda}\partial_\rho B^n(l)-\partial_zB^n(l)+[B^n(l),A_z], \tag{3.9b}$$

利用上面式子进行一些较繁但不难的计算后可以得到下面的丰富的代数结构：

$$[\delta^{n,a},\delta^{m,b}]A_\mu=\begin{cases}f_c^{ab}\delta^{n+m,c}A_\mu, & n.m\geqslant 0\\ f_c^{ab}\delta^{n,c}A_\mu, & n\geqslant 0.\ m<0\\ f_c^{ab}(-\delta^{n+m,c}+\delta^{n.c}+\delta^{m.c})A_\mu, & n,m<0\end{cases} \tag{3.10}$$

$$[\delta^n,\delta^m]A_\mu=\begin{cases}(n-m)\delta^{n+m}A_\mu, & n,m\geqslant 0\\ n\delta^nA_\mu, & n\geqslant 0,m<0\\ (-(n-m)\delta^{n+m}+n\delta^n+m\delta^m)A_\mu, & n,m<0\end{cases} \tag{3.11}$$

上面式子中 f_c^{ab} 为群结构常数，而 $\mu=\rho$，z. 由此可见变换（2.18）是一个对称性很高的变换，由它可以构造出静轴对称 SDYM 场的完整的 Kac-Moody 和 Virasoro 代数结构. 我们要强调的是：（3.8）以及（3.9）式的变换，不论 n，$m\geqslant 0$，还是 n，$m<0$，都是正确的非平庸的对称变换，并且都给出（2.6）式的新解 N'（ρ，z）.

可惜，我们未能找到代数的非平庸的中心项部分.

在文献[12]中已表明：弯曲时空中的手征模型以及引力场中的 Ernst 方程都与静轴对称 SDYM 场方程相似，因此本文的结论对它们也成立.

参 考 文 献

[1] Dolan, L., Roos, A., *Phys. Rev.*, **D22** (1980), 2018.

[2] Hou, B. Y., Ge, M. L. and Wu, Y. S., *Phys. Rev.*, **D24** (1981), 2238.

[3] Dolan, L., *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981), 1371.

[4] Ge, M. L. and Wu, Y. S., *Phys. Lett.*, **B108** (1982), 411.

[5] Forgacs, P., Harvath, Z. and Palla, L., *Phys. Rev.*, **D23** (1981), 1876.

[6] Chau, L. L., Ge, M. L. and Wu, Y. S., *Phys. Rev.*, **D25** (1982), 1080; 1086.

[7] Chau, L. L. Wu, Y. S., *Phys. Rev.*, **D26** (1982), 3581.

[8] Chau, L. L., Ge, M. L. and Sinha, A., Wu, Y. S., *Phys. Lett.*, **B121** (1983), 391.

[9] Ueno. K. and Nakamura, Y., *Phys. Lett.*, **B109** (1982), 273.

[10] 吕景发、赵柳、葛墨林，中国科学，**A4** (1991), 399.

[11] Yang, C. N., *Phys. Rev. Lett.*, **38** (1977), 1377.

[12] Hou, B. Y., Hou, B. Y. and Wang, P., *Intern. J. Mod. Phys.*, **A1** (1986) 193.

[13] 郝三如、李卫，高能物理与核物理，**2** (1989), 120.

[14] 郝三如、李卫，高能物理与核物理，**4** (1989), 320.

[15] Semenov-Tian-Shansky. M. A., *Pull. RIMS.*, **21** (1985), 1237.

The Hidden Symmetries and Their Algebraic Structure of the Static Axially Symmetric SDYM Fields.

HAO SANRU

(*Department of Physics, Changsha Normal University of Water Resources and Electric Power*, 410077)

ABSTRACT

A new explicit transformation about the static axially symmetric self-dual Yang-Mills (SDYM) fields is presented. The theory has proved that the new transformation is a symmetric one. For the two kinds of the Lie algebraic generators of the Lie group SL $(N. R)/SO(N)$, the corresponding transformations are given. By making use of the Yang-Baxter equality and their square brackets we have obtained the Loop and comformal algebraic structures of the symmetric transformations for the basic fields. All the results obtained in this paper can be directly generalized to the other models.