第17卷 第6期
1993年6月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 6
June, 1993

亏格 g Riemann 曲面上比热的模对偶性质

颜 骏* 胡诗可

(四川大学物理系, 成都 610064)

摘 要

本文通过引入两维标量场和采用 Vafa 的算子方法导出了亏格 g Riemann 曲面上的自由能，并由此获得了比热的模对偶关系.

一、引言

近年来，高亏格 Riemann 曲面上弦自由能的数学和物理性质正逐渐地被人们澄清. 在亏格数 $g=1$的情况下，Alvarez 和 Osorio 用 Hecke 算子和模子群 Γ_0 (2) 的陪集分解方法证明了弦自由能的模不变性[1]. 任意亏格 Riemann 面上自由能的模不变定理的证明则是由 McClain 和 Roth 等人做出的[2,3]. 作为这一定理的直接应用，Alvarez 等人研究了玻色弦自由能的模对偶变换[4]，这类变换可将弦的低温相映射到高温相，因此有助于对弦的相变机理的深入理解. 本文主要是在前面工作的基础上[5—7]，采用 Vafa 的算子方法导出了玻色弦耦合两维标量场体系的自由能；并通过 theta 函数的模变换进一步获得了自由能和比热的对偶关系式.

二、用算子方法推导 Riemann 面上的自由能

通常，有多种方法可以导出高亏格 Riemann 曲面上自由能的表达式，如 Atick 和 Witten 使用过的几何方法就是其中之一[8]. 另外一种推导是 Vafa 和 Sen 等人提出的算子方法[9,10]. 本文将采用后一种方法来导出亏格 g Riemann 面上的自由能.

首先假定亏格 g Riemann 面 Mg 上有一小圆盘 D，在盘的中心引入通常的 Fock 真空态 $|0\rangle_F$ (对应于 Riemann 球)，在盘的边界 ∂D 引入亏格 g 真空态 $|0\rangle_g$，那么零温系统的配分函数可表示为:[10]

$$\mathbb{Z}_g = {}_F\langle 0|0\rangle_g. \tag{1}$$

这里，真空态 $|0\rangle_g$ 和 $|0\rangle_F$ 之间可通过 Bogoliubov 变换相联系，即 $|0\rangle_g=\mathbb{Z}_g e^G|0\rangle_F$，$G$ 可根据 Vafa 的算子方法确定. 从唯象的观点来看，我们还希望考虑到温度 ($\beta\neq 0$) 效应

本文1991年12月3日收到.

* 现在地址: 西南应用磁学研究所，绵阳市，621000.

对一种现实弦模型的修正，例如在讨论甚早期宇宙中的弦模型时，就必须考虑到温度这个至关重要的因素. 对于高温状态下的真空，除了玻色弦本身的作用外，两维标量场 φ 也可能对真空态有一定贡献. 这类标量场是 L. A. Gaume 等人在讨论 Riemann 面上的玻色-费米等价性时引入的[11]. 正如我们在前文中所分析的那样[7]，由于高温状态下弦的内禀真空可能发生起伏，其直接的物理效应就是导致了玻色弦坐标与两维标量场的耦合.

这时，零温状态下的真空态可以由如下的高温真空态所代替：

$$|0\rangle_{\mathrm{F}} \otimes |\beta\rangle_{g(x)} \otimes |\beta\rangle_{g(\varphi)}. \tag{2}$$

类似地，$|0>_g$ 可重新表示为：

$$|0\rangle_{g} \otimes |\beta\rangle_{g(x)} \otimes |\beta\rangle_{g(\varphi)}. \tag{3}$$

由此我们可以定义：

$$_{g(x)}\langle\beta|x^{(0)}|\beta\rangle_{g(x)} = \beta\int mB = \beta\lambda_{g(x)}. \tag{4}$$

$$_{g(\Phi)}\langle\beta|\Phi^{(0)}|\beta\rangle_{g(\varphi)} = \beta\int nA = \beta\lambda_{g(\varphi)}. \tag{5}$$

式中，$x^{(0)}$，$\varphi^{(0)}$分别是弦坐标和两维标量场的“时间”分量. 为了计算上的明确和简洁起见，我们在公式（4）、（5）中采取了前文[7]中类似的假定，即 $x^{(0)}$，$\varphi^{(0)}$的非零真空期待值仅取在 Riemann 面上的 b，a 同调基上，而 a，b 同调基上的期待值则为零. 这里的调和1一形式 A，B 分别对偶于 Riemann 面 Mg 上的 a，b 同调基[7,11] m，n 是绕同调基 b，a 循环的绕数. 这里，$\lambda_{g(x)}$，$\lambda_{g(\varphi)}$还可以展开为：

$$\lambda_{g(x)} = \int H\omega + \int \overline{H}\bar{\omega}. \tag{6}$$

$$\lambda_{g(\varphi)} = \int N\omega + \int \overline{N}\bar{\omega}. \tag{7}$$

式中，ω，$\bar{\omega}$ 分别是 Riemann 面上的第一类阿贝尔微分及其复共轭. 根据定义（4）（5）以及展开式（6）（7），同时应用 Riemann 面上的几何性质：

$$\int_{ai}\omega_j = \delta_{ij};\int_{bi}\omega_j = \Omega_{ij}. \tag{8}$$

那么在 a，b 同调基上分别积分后，不难求得如下系数：

$$H = \frac{1}{2i}(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}m, \qquad \overline{H} = -\frac{1}{2i}(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}m. \tag{9}$$

$$N = -\frac{1}{2i}(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}\overline{\Omega}n, \overline{N} = \frac{1}{2i}(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}\Omega n. \tag{10}$$

式中，Ω（$\overline{\Omega}$）是 Riemann 面上的周期矩阵（及复共轭）. 现在，我们可以分别构造两个算子 exp（$\beta\lambda_{g(x)}a_0^+$），exp（$\beta\lambda g$（φ）a_0^+）作用于 Fock 真空态上. $|0\rangle_{\mathrm{F}}$，

那么有：

$$|\beta\rangle_{g(x)} = \exp(\beta\lambda_{g(x)}a_0^+)|0\rangle_F = |\beta\lambda_{g(x)}\rangle. \tag{11}$$

$$|\beta\rangle_{g(\varphi)} = \exp(\beta\lambda_{g(\varphi)}a_0^+)|0\rangle_F = |\beta\lambda_{g(\Phi)}\rangle. \tag{12}$$

这时不难得到：

$$_{g(x)}\langle\beta|\beta\rangle_{g(x)} = \langle\beta\lambda_{g(x)}|\beta\lambda_{g(x)}\rangle = \exp(\frac{\beta^2}{2\pi\alpha'}\lambda_{g(x)}^+\lambda_{g(x)}). \tag{13}$$

$$
{}_{g(\varphi)}\langle\beta|\beta\rangle_{g(\varphi)} = \langle\beta\lambda_{g(\varphi)}|\beta\lambda_{g(\varphi)}\rangle = \exp\left(\frac{\beta^2}{2\pi\alpha'}\lambda^{+}_{g(\varphi)}\lambda_{g(\varphi)}\right). \tag{14}
$$

公式中$\frac{1}{2\pi\alpha'}$是引入的弦张力系数，将 H（$\bar{H}$）以及 H（$\bar{H}$）代入（6）（7）后求得：

$$
\lambda^{+}_{g(x)}\lambda_{g(x)} = -\frac{1}{2}m(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}m. \tag{15}
$$

$$
\lambda^{+}_{g(\Phi)}\lambda_{g(\Phi)} = -\frac{1}{2}n\Omega(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}\bar{\Omega}n. \tag{16}
$$

在导出上述关系式时，已用了 Riemann 面上的恒等式$\int_{M_g}\omega\Lambda\bar{\omega}=2\mathrm{Im}\Omega$. 所以用算子方法导出的 Riemann 面上的自由能可表示为：

$$
\begin{aligned}
F_g(\beta) &= \sum_{(m,n)\neq 0}\left({}_F\langle 0|\otimes_{g(x)}\langle\beta|\otimes_{g(\Phi)}\langle\beta|\right)\left(|0\rangle_g\otimes|\beta\rangle_{g(x)}\otimes|\beta\rangle_{g(\Phi)}\right) \\
&= \sum_{m,n}\int_{\Gamma_g}(\mathrm{d}\tau)_{\mathrm{WP}}\Lambda_g(\tau)\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'}m^T\mathrm{Im}\Omega^{-1}m-\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'}n^T\mathrm{Im}\Omega'^{-1}n\right).
\end{aligned} \tag{17}
$$

式中，$(\mathrm{d}\tau)_{\mathrm{WP}}$是 Weil—Petersson 测度，$\Lambda_g$（$\tau$）是零温时玻色弦的 g 圈宇宙常数，$(\mathrm{Im}\Omega')^{-1}=\Omega$ $(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}\bar{\Omega}$. 这里的积分区域 Γ_g 不是唯一的. 例如对于 $g=1$的情形，Γ_1可取成复平面上的半条状区域，但通过一个非平庸的模群（或其子群）变换后，可将半条状域映射到模空间上的基本域上[5]. 接下来我们便可以着手讨论弦自由能和比热的模对偶性.

三、比热的模对偶关系

注意到（17）式和我们前文中用几何方法导出的弦自由能在形式上是一致的[7]. 同时还不难发现自由能的表示和 Riemann 面上 theta 函数有密切关系. 为了研究模对偶性质，我们先来看 theta 函数的泛函方程. 设模子群 $\Gamma_{1,2}\subset\mathrm{sp}$（$2g$，$\mathbb{Z}$）的一个生成元是 $\gamma=\begin{pmatrix}O & -I\\ I & O\end{pmatrix}$，在 γ 的作用下，theta 函数的泛函方程为[12].

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}_g}\exp(-\pi n^T\mathrm{Im}\Omega^{-1}n) = (\det\,\mathrm{Im}\Omega)^{\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}_g}\exp(-\pi n^T\mathrm{Im}\Omega n). \tag{18}
$$

（18）式实际上对应于具有纯虚部周期矩阵的 theta 函数的模变换 $(\mathrm{Im}\Omega\rightarrow\frac{1}{\mathrm{Im}\Omega})$. 如果设 $\alpha'=1$，将上式应用于 F_g（β），那么经过计算后可以得到：

$$
F_g(\beta) = \left(\frac{4\pi^2K}{\beta^2}\right)^g F_g\left(\frac{4\pi^2}{\beta}\right). \tag{19}
$$

式中，$K=(\det\,\mathrm{Im}\Omega.\ \det\,\mathrm{Im}\Omega')^{\frac{1}{2g}}$是与 Riemann 面上周期矩阵有关的模参量. 这一对偶等式将弦的低温相和高温相联系起来 $(\beta\rightarrow\frac{1}{\beta})$，因此非常类似于统计物理学中的 Kramers-Wannier 变换[13]. 从（19）式出发我们可以推导出比热的模对偶关系. 根据比热的定义：

$$
C_g(\beta) = -\beta^2\frac{\partial F_g(\beta)}{\partial\beta}. \tag{20}
$$

将 F_g（β）（19）式代入（20）后，即得：

$$C_g(\beta) = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial\beta}(4\pi^2K/\beta^2)^g F_g(4\pi^2/\beta) - \beta^2(\frac{4\pi^2K}{\beta^2})^g \frac{\partial}{\partial\beta}F_g(\frac{4\pi^2}{\beta^2}). \tag{21}$$

直接计算后可得出第一项为： $2g\beta F_g(\beta)$.　　(22)

又因为：

$$C_g(4\pi^2/\beta) = 4\pi^2 \frac{\partial F_g(4\pi^2/\beta)}{\partial\beta}. \tag{23}$$

经过推导后可得到第二项： $-K(\frac{4\pi^2K}{\beta})^{(g-1)}C_g(4\pi^2/\beta)$.　　(24)

综上所述，因此有： $C_g(\beta) + K(\frac{4\pi^2K}{\beta})^{(g-1)}C_g(4\pi^2/\beta) = 2g\beta F_g(\beta)$.　　(25)

这就是亏格 g Riemann 面上比热满足的对偶关系. 注意 (25) 式中多出了一个与模参量有关的因子 K，这与我们前文中讨论过的情况是类似的[7]. 应用这一对偶关系我们便可以研究自对偶点，β 对偶对称破缺以及临界指数等实际物理问题. 因此对偶对称作为一种精确的对称性在弦微扰论中起了重要的作用.

参　考　文　献

[1] E. Alvarez and M. Osorio, *Nucl. Phys.*, **B304** (1988), 327.
[2] B. McClain and B. Roth, *Comm. Math. Phys.*, **111** (1987), 539.
[3] Y. Leblanc, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 831.
[4] E. Alvarez and M. Osorio, *Phys. Rev.*, **D40** (1989), 1150.
[5] Yan Jun, Li Jiannan and Hu Shike *Chin. Phys. Lett.*, **9** (1989), 425.
[6] Yan Jun, Li Jiannan and Hu Shike, *Chin. Phys. Lett.*, **8** (1990), 381.
[7] 颜骏、胡诗可，高能物理与核物理，**5** (1991), 414.
[8] J. Atick and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B310** (1988), 291.
[9] C. Vafa, *Phys. Lett.*, **B190** (1987), 47.
[10] P. Murphy and S. Sen, *Phys. Lett.*, **B233** (1989), 322.
[11] L. Gaume, G. Moore and C. Vafa, *Comm. Math. Phys.*, **106** (1986), 1.
[12] D. Mumford, Tata lectures on theta (I), (Birkhauser—1983).
[13] A. Giveon, E. Rabinovici and G. Veneziano, *Nucl. Phys.*, **B322** (1989), 167.

The Modular Duality of Specific Heat on Genus g Riemann Surface

YAN JUN　HU SHIKE

(*Department of Physics, Sichuan University, Chengdu*　610064)

ABSTRACT

The free energy on genus g Riemann surface is derived by introducing two—dimensional scalar field and using Vafa's operator approach. The modular duality relation of specific heat is also obtained.