

有限温度和有限密度下的汤川势

钱志新 钟万蕙 苏汝铿

(复旦大学物理系, 上海 200433)

摘 要

利用实时格林函数方法, 本文推广汤川势至有限温度和有限密度情况. 我们发现, σ 介子的有效质量随温度和/或密度升高而减小. 本文还对由实时格林函数给出的结果和由虚时格林函数给出的结果进行了比较.

一、引 言

近年来, 由于高能重离子碰撞实验的发展, 高温高密度等极端条件下物质的物理性质的研究引起了广泛重视^[1,2]. 不少工作从 QCD 求和规则^[3], 大 N_c 展式出发^[4], 在夸克水平上唯象地讨论了这个问题. 本文将从第一性原理出发, 将量子场论方法用于讨论有限温度和有限密度情况, 在核子水平上进行讨论.

为从微观上给出各种热力学量, 首要问题是研究核子-核子间在有限温度和有限密度下的有效势. 在以前的一系列文章^[5-10]中, 利用松原虚时格林函数, 我们系统地研究了单 π , 单 η 和单 σ, η 介子等的有效质量, 顶角修正和有效势随温度的变化. 但这些工作仅限于讨论温度的影响, 并未涉及密度. 在本文中我们将把这些讨论推广到有限温度和有限密度情况, 研究在有限温度和有限密度下的汤川势.

本文组织如下: 在下一节中用实时格林函数方法, 将首先推出在有限温度和有限密度下自由费密子的格林函数^[11], 然后通过“泡泡图”求和给出标量介子有效质量和汤川势随温度和密度变化的基本公式. 在第三节中将给出数值计算的结果和讨论.

二、基本公式

定义自由费密子的格林函数为

$$iG_{\alpha\beta} = \text{Tr} \{ \rho_G T [\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')] \}$$

本文 1991 年 12 月 12 日收到.

• 国家自然科学基金和国家教委资金资助.

$$= \text{Tr}\{\rho_G[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\theta(t-t') - \bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)\theta(t'-t)]\}, \quad (1)$$

其中 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, $\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}(\mathbf{x})e^{-iHt}$ 是海森堡场算符, $\rho_G = \exp[\beta(\Omega - \tilde{H})]$ 是巨正则系综密度矩阵,

$$\tilde{H} = H - \mu N, \quad (2)$$

$$H = \int d^3x \psi^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi, \quad (3)$$

$$N = \int \psi^\dagger \psi d^3x. \quad (4)$$

H 和 N 分别为自由狄喇克场的哈密顿算符及粒子数算符, μ 是化学势. 对狄喇克场作正则量子化

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, s} [a_{\mathbf{k}, s} U(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}, s}^\dagger V(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}], \quad (5)$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, s} [a_{\mathbf{k}, s}^\dagger \bar{U}(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}, s} \bar{V}(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}].$$

$$\{a_{\mathbf{k}, s}, a_{\mathbf{k}', s'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}, \{b_{\mathbf{k}, s}, b_{\mathbf{k}', s'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (6)$$

$a_{\mathbf{k}, s}$ 和 $b_{\mathbf{k}, s}^\dagger$ 分别是费密子的湮没算符和反费密子的产生算符, 满足反对易关系(6). 将(5)式代入(2)式得

$$\tilde{H} = \sum_{\mathbf{k}, s} E(k) (a_{\mathbf{k}, s}^\dagger a_{\mathbf{k}, s} + b_{\mathbf{k}, s}^\dagger b_{\mathbf{k}, s}) - \sum_{\mathbf{k}, s} \mu (A_{\mathbf{k}, s}^\dagger a_{\mathbf{k}, s} - b_{\mathbf{k}, s}^\dagger b_{\mathbf{k}, s}), \quad (7)$$

其中 $E(k) = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$. 将(5)式代入(1)式, 得

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(x, x') &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, s} \{ [(1 - n_{\mathbf{k}, s}) U_\alpha(\mathbf{k}, s) \bar{U}_\beta(\mathbf{k}, s) \\ &\quad \times e^{i\mathbf{k} \cdot (x-x')} + \bar{n}_{\mathbf{k}, s} V_\alpha(\mathbf{k}, s) \bar{V}_\beta(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k} \cdot (x-x')}] \\ &\quad \times \theta(t-t') - [n_{\mathbf{k}, s} \bar{U}_\beta(\mathbf{k}, s) U_\alpha(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{k} \cdot (x-x')} \\ &\quad + (1 - \bar{n}_{\mathbf{k}, s}) \bar{V}_\beta(\mathbf{k}, s) V_\alpha(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k} \cdot (x-x')}] \theta(t'-t) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = E(k)t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$, $n_{\mathbf{k}, s} = \langle a_{\mathbf{k}, s}^\dagger a_{\mathbf{k}, s} \rangle$, $\bar{n}_{\mathbf{k}, s} = \langle b_{\mathbf{k}, s}^\dagger b_{\mathbf{k}, s} \rangle$ 是费密子和反费密子的分布函数, $\langle \dots \rangle$ 记巨正则系综平均值. 按照实时格林函数理论^[12-14], $n_{\mathbf{k}, s}$ 和 $\bar{n}_{\mathbf{k}, s}$ 可由格林函数运动方程

$$i \frac{d}{dt} G_{\alpha\beta}(t-t') = \delta(t-t') + (E(k) - \mu) G_{\alpha\beta}(t-t') \quad (9)$$

及谱表象中的关联函数公式

$$F_{\beta\alpha} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_{\alpha\beta}(E + i0^+) - G_{\alpha\beta}(E - i0^+)}{e^{\beta E} + 1} dE \quad (10)$$

求得, 结果是

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{(E(k)-\mu)/k_B T} + 1}, \quad \bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{(E(k)+\mu)/k_B T} + 1} \quad (11)$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_s U(\mathbf{p}, s) \bar{U}(\mathbf{p}, s) &= (-\not{p} + m)/2E(p), \\ \sum_s V(\mathbf{p}, s) \bar{V}(\mathbf{p}, s) &= (-\not{p} - m)/2E(p). \end{aligned} \quad (12)$$

对(8)式作傅里叶变换后,可以得出有限温度和有限密度下自由费密子传播子为

$$G(k) = (k+m) \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E(k)} \delta(k_0 - E(k)) n_k + \frac{i\pi}{E(k)} \delta(k_0 + E(k)) \bar{n}_k \right\} \quad (13)$$

在零温度极限下,由于 $\bar{n}_k = 0, n_k = \theta(k_F - k)$, (13)式简化为

$$G(k) = (k+m) \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E(k)} \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - k) \right\}. \quad (14)$$

(14)式正是熟知的在量子场论(QHD)中广泛应用的零温有限密度的相对论费密场传播子^[15]. 我们把它推广到有限温度有限密度. 下面我们将利用它来计算有限温度有限密度下具有汤川型耦合的 σ 介子交换势.

σ 介子和核子相互作用的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}_Y = g_s \bar{\psi}(x) \psi(x) \varphi(x). \quad (15)$$

用文献[5-7]的方法, 计及“泡泡图”贡献后, σ 介子的严格传播子和核子-核子的汤川势是

$$i\Delta'_\sigma(q) = \frac{i}{q^2 - m_\sigma^2 - i\Pi(q)}, \quad (16)$$

$$V(p, p') = g_s^2 \bar{u}(p') u(p) \frac{1}{q^2 - m_\sigma^2 - i\Pi(q)} \bar{u}(-p') u(-p), \quad (17)$$

其中 $\Pi(q)$ 是 σ 介子的二阶自能图贡献, 满足

$$\Pi(q) = -g_s^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G(k)G(k-q)]. \quad (18)$$

在文献[5-10]中, 我们用虚时格林函数, 用松原的方法, 将对 k_0 的积分改为求和, 将虚时 it 改为温度进行讨论. 在本文中, 我们将用实时格林函数方法. 将(13)式代入(18)式, 可算得 $\Pi(q)$

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= \Pi_0(q) + \Pi_{\beta, \rho}(q), \\ \Pi_0(q) &= -4g_s^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} [K \cdot (q - K) + m^2] \left\{ \frac{1}{K^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(K - q)^2 - m^2 + i\epsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\beta, \rho}(q) &= \frac{ig_s^2}{(2\pi)^2} \left[4 - \frac{q^2}{m^2} \right] \int \frac{|\mathbf{K}|^2 d|\mathbf{K}|}{E(K)} (n_K + \bar{n}_K) \\ &+ \frac{g_s^2 q^2}{8\pi^2} \int \frac{d^3K}{E(K)E(K-q)} \{ [n_K n_{|\mathbf{K}-\mathbf{q}|} + \bar{n}_K \bar{n}_{|\mathbf{K}-\mathbf{q}|}] \delta(E(K) + q_0 - E(K-q)) \\ &+ n_{|\mathbf{K}-\mathbf{q}|} \bar{n}_K [\delta(E(k) - q_0 + E(K-q)) + \delta(E(K) + q_0 + E(K-q))] \\ &- E(K-q) (n_K + \bar{n}_K) [\delta(q^2 + 2E(K)q_0 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) \\ &+ \delta(q^2 - 2E(K)q_0 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q})] \}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $E(K-q) = \sqrt{|\mathbf{K}-\mathbf{q}|^2 + m^2}$. $\Pi_0(q)$ 是零温度零密度的自能贡献, 它是一个发散积分. 通过重整化方案, 可以将它归并到 σ 介子的质量项中^[7,11]. 为简化起见, 后面的 m_σ 可以看作是重整化了的 σ 介子质量. 再将 $\Pi(q)$ 代入(16)式, 经过一些计算可得

$$i\Delta'_\sigma(q) = F^2 \frac{i}{q^2 - M_\sigma^2}, \quad (21)$$

其中

$$F = (1 + I_1)^{-1/2}. \quad (22)$$

$$M_\sigma = \left(\frac{m_\sigma^2 - I_2}{1 + I_1} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

由(21)式可见, M_σ 是 σ 介子的有效质量. (22)式和(23)式中, I_1 和 I_2 是

$$I_1 = \frac{-g_i^2}{(2\pi)^2 m^2} \int \frac{|\mathbf{K}|^2 d|\mathbf{K}|}{E(k)} (n_k + \bar{n}_k). \quad (24)$$

$$I_2 = -4m^2 I_1. \quad (25)$$

在(24)和(25)式中, n_k 和 \bar{n}_k 是正、反核子的分布函数, 由(11)式表示. m 是核子质量. 注意到在 n_k 和 \bar{n}_k 的表达式中, 含有化学热 μ . 它可由粒子数或核子数密度 ρ 所满足的条件

$$\rho = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_k - \bar{n}_k] \quad (26)$$

自治地定出. (24)式中, $\gamma = (2s + 1)(2\tau + 1) = 4$ 是核子的自旋-同位旋简并度. (22-26)式构成一个自治的方程组, 利用它们可以求出 σ 介子的有效质量 M_σ 随温度 T , 密度 ρ 的变化.

用和文献[7,9]相同的计算, 不难证实, 有限温度和有限密度下的汤川势是

$$V(r) = -g_i^2 F^2 \frac{M_\sigma}{4\pi} \left\{ \left(1 - \frac{M_\sigma^2}{4m^2}\right) Y(\tilde{x}) - \frac{M_\sigma}{2m^2 \tilde{x}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{d}{d\tilde{x}} Y(\tilde{x}) \right\}. \quad (27)$$

(27) 式中, $\tilde{x} = M_\sigma r$, $Y(\tilde{x}) = e^{-\tilde{x}}/\tilde{x}$.

三、数值计算结果和讨论

方程(22)~(27)构成一个自治的封闭的方程组, 利用它们可以求出 σ 介子有效质量随温度和密度的变化以及汤川势对 T 和 ρ 的依赖关系. 数值计算结果为图1—图4所示.

图1表示 σ 介子的有效质量 M_σ 在给定密度下随温度的变化, 图2表示在给定温度下 M_σ 随密度的变化. 由图可见, 随着 T (或 ρ) 的增加, M_σ 将减小. 这个结果和 Brown, Rho^[1,2] 等人用 PCAC, Goldberger-Treiman 关系, 以及 QCD 求和规则所给出的结果定性相符. 但我们的出发点和思路与他们完全不同. 我们是在核子层次上, 不涉及夸克, 完全从有限温度、有限密度量子场论出发自治地进行计算. 就思路而言, 我们的方法更接近于 QHD. 在 QHD 中, 在零温下密度的影响是通过自由费密子传播子的密度修正, 即(14)式右端的第二项引入的. 在我们的计算中, 温度和密度的影响均通过自由费密子传播子, 即(13)式右端的第二、第三项引入. 另外, 和 QHD 中所用的平均场近似不同, 我们作链式近似, 对“泡泡图”求和. 在这个意义上, 也可以认为, 我们的工作是对 QHD 的推广.

图3和图4表示汤川势在给定密度和温度下的变化. 在图1至图4的数值计算中, 参数的取值为 $g_i = 14.27$, $m_\sigma = 715 \text{ MeV}$, $m = 938.3 \text{ MeV}$, 与 Bonn 势中所用的参数的数值一

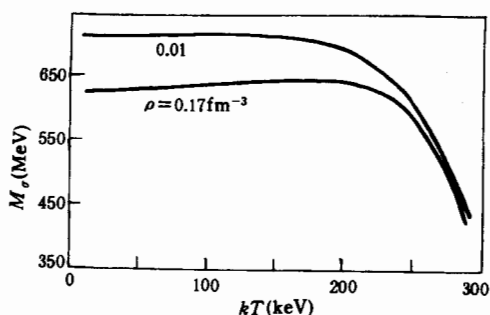


图 1 给定密度 σ 介子有效质量 M_σ 随温度 kT 变化

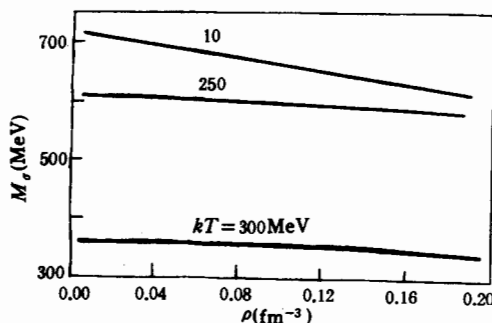


图 2 给定温度 σ 介子有效质量 M_σ 随密度 ρ 变化

致. 当密度 $\rho \rightarrow 0$ 时, 我们的结果与文献[7]的结果一致. 但是, 应该指出, 本文用实时格林函数计算, 而文献[7]用虚时格林函数讨论. 二者给出相同的结果表明: 它们都是行之有效的方法. 但实时格林函数能提供一个方便的研究有效密度影响的框架, 而且也避免了计算无穷级数的麻烦.

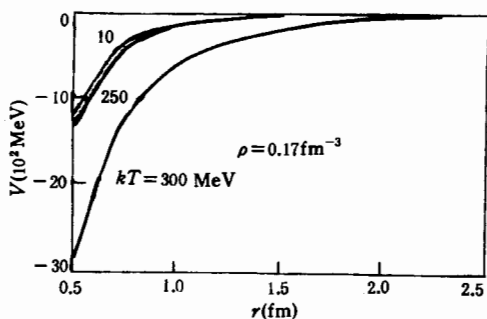


图 3 给定密度势 $V(r)$ 随温度 kT 变化

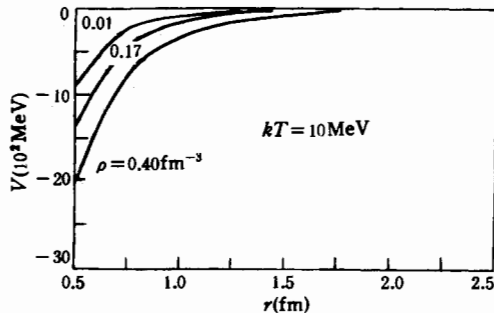


图 4 给定温度势 $V(r)$ 随密度 ρ 变化

最后, 我们指出: 本文所用的处理有限温度和有限密度的方法具有一般性, 它不但可用于讨论核子和介子以及量子强子动力学问题, 也可用于讨论夸克和胶子以及量子色动力学.

参 考 文 献

- [1] G. E. Brown, *Nucl. Phys.*, **A522**(1991), 397.
- [2] G. E. Brown and M. Rho, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991)2720.
- [3] "Chiral Solitons" ed K. F. Liu, *World Sci.*, (1987).
- [4] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B160**(1979), 57.
R. K. Su, "Quark-Gluon structure of Hadrons and Nuclei", ed. L. S. Kisslinger and X. Qiu, *Int. Acad. Pub.* (1991), p. 258.
- [5] R. K. Su and G. T. Zheng, *Jour. of Phys.*, **G16**(1990), 203.
- [6] 陈涛, 苏汝铿, *高能物理与核物理*, **12**(1988), 131.
- [7] 郑国桐, 苏汝铿, *高能物理与核物理*, **14**(1990), 220.

- [8] R. K. Su, S. J. Yang, S. S. Cai and G. T. Zheng, *Chinese Phys. Lett.*, **7**(1990), 485.
[9] 郑国桐, 苏汝铿, 高能物理与核物理, **15**(1991), 689.
[10] 郑国桐, 苏汝铿, “有限温度下的单 η 介子交换势”, 高能物理与核物理, 待发表.
[11] R. K. Su, Z. X. Qian and G. T. Zheng, *Jour. of Phys.*, **G17**(1991), 1785.
[12] R. K. Su, S. D. Yang and T. T. S. Kuo, *Phys. Rev.*, **C35**(1987), 1539.
[13] R. K. Su and F. M. Lin, *Phys. Rev.*, **C39**(1989), 2438.
[14] R. K. Su and F. M. Lin, *Jour. of Phys.*, **G15**(1989), 1591.
[15] B. O. Serot and J. D. Walecka, “*Adv. Nucl. Phys.*” ed. J. W. Negele and E. Vogt (Plenum) vol. 16(1985).

Yukawa Potential at Finite Temperature and Finite Density

QIAN ZHIXIN ZHONG WANHENG SU RUKENG

(*Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433*)

ABSTRACT

By means of the real time Green's function method, the yukawa potential is extended to finite temperature and finite density. It is found that the effective mass of sigma meson will decrease as the temperature and/or density increase. The results given by the real time Green's function method and the imaginary time Green's function method are compared.