

在(2+1)维手征 Gross-Neveu 模型中 有限温度的 Ward-Takahashi 恒等式 和手征相变*

沈坤 袁忠平

(华中师范大学粒子物理研究所, 武汉 430070)

摘 要

本文导出了(2+1)维手征 Gross-Neveu 模型在有限温度下的手征 Ward-Takahashi 恒等式。根据手征 Ward-Takahashi 恒等式讨论有限温度下费米子质量的动力学产生和束缚态的质量谱。利用费米子的动力学质量为序参量讨论了相结构和手征相变,给出了相变的临界温度。

一、引 言

自从 Gross 和 Parisi 指出在(2+1)维情况下四费米子模型具有可重整性以来^[1,2],人们已经发现在(2+1)维情况下存在着许多这种理论,它们在微扰展开下是不可重整的,可是在非微扰情况下却具有可重整性^[3]。由于这些模型具有许多有趣的非微扰现象^[4],例如费米子质量的动力学产生、束缚态的形成、手征对称性的破缺和手征相变等。人们期望通过对这些模型的研究将有助于理解这些非微扰现象,探寻处理非微扰现象的有效方法。

近来,我们利用含复合场的 Ward-Takahashi 恒等式来研究手征对称性破缺和束缚态的性质。在文献[5]中,我们以(2+1)维手征 Gross-Neveu 模型为例,利用含复合场的手征 Ward-Takahashi 恒等式讨论了手征对称性破缺后费米子质量的动力学产生和束缚态的谱性质。结果表明,在自洽场近似下所得的谱性质和 $1/N$ 展开完全一致^[6]。本文将这种方法推广到有限温度情况下,并以(2+1)维手征 Gross-Neveu 模型为例来讨论有限温度下手征对称性的性质和手征相变。

在第二节中,我们导出了有限温度的手征 Ward-Takahashi 恒等式。在第三节中,利用这些恒等式得到了有限温度下费米子和束缚态的质量谱。第四节讨论了有限温度下手征对称的性质和手征相变。最后,在第五节中做了简短的小结。

本文1991年10月16日收到。

* 国家自然科学基金资助。

二、有限温度的手征 Ward-Takahashi 恒等式

在有限温度情况下,配分函数 $Z_\beta[J]$ 的路径积分表示为^[7]

$$\begin{aligned} Z_\beta[J] &= \text{Tre}^{-\beta H} \\ &= \int D\bar{\psi}D\psi \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int d^2x \mathcal{L}_J\right) \\ &= e^{-W_\beta[J]}, \end{aligned} \quad (1)$$

这里已将时间变量延拓到 $0 \leq i x_0 \leq \beta$ 的区域。

在有外源情况下,手征 Gross-Neveu 模型的拉氏量为^[8]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_J &= -\bar{\psi}\gamma_5\partial\psi - \frac{g^2}{2N} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2] + \eta(x)\psi(x) \\ &\quad + \bar{\psi}(x)\eta(x) + K(x)\bar{\psi}(x)\psi(x) + K_5(x)\bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x), \end{aligned} \quad (2)$$

其中费米场是定义在 $R^2 \times [0, \beta]$ 上的反周期函数。

在有限温度下,场的 Gibbs 平均定义为

$$\frac{\delta W_\beta[J]}{\delta \eta(x)} = \phi_\beta(x), \quad (3.a)$$

$$-\frac{\delta W_\beta[J]}{\delta \eta(x)} = \bar{\psi}_\beta(x), \quad (3.b)$$

$$\frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} W_\beta[J] = G_\beta(x), \quad (3.c)$$

$$\frac{\delta}{\delta \eta(x)} i\gamma_5 \frac{\delta}{\delta \eta(x)} W_\beta[J] = G_{5\beta}(x). \quad (3.d)$$

由 (3.c)、(3.d) 式容易得到

$$\frac{\delta W_\beta[J]}{\delta K(x)} = \bar{\psi}_\beta(x)\phi_\beta(x) + G_\beta(x), \quad (4.a)$$

$$\frac{\delta W_\beta[J]}{\delta K_5(x)} = \bar{\psi}_\beta(x)i\gamma_5\phi_\beta(x) + G_{5\beta}(x). \quad (4.b)$$

类似于零温场论,由 Legendre 变换可以给出有限温度下的有效作用量

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta[\phi] &= W_\beta[J] - \int_0^\beta d\tau \int d^2x [\bar{\psi}_\beta(x)\eta(x) + \eta(x)\phi_\beta(x) + (\bar{\psi}_\beta(x)\phi_\beta(x) \\ &\quad + G_\beta(x))K(x) + (\bar{\psi}_\beta(x)i\gamma_5\phi_\beta(x) + G_{5\beta}(x))K_5(x)], \end{aligned} \quad (5)$$

其中 ϕ 是 $(\bar{\psi}, \psi; G, G_5)$ 的缩写。

由拉氏量所具有的手征不变性可以导出有效作用量的手征 Ward-Takahashi 恒等式^[9]

$$\int d^2x \left[\frac{\delta \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \phi_\beta(x)} \phi_\beta(x) + \bar{\psi}_\beta(x) \frac{\delta \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \bar{\psi}_\beta(x)} \right] = 0, \quad (6.a)$$

$$\int d^2x \left[\bar{\psi}_\beta(x) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \bar{\psi}_\beta(x)} - \frac{\delta \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \psi_\beta(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \psi_\beta(x) + \frac{\delta \Gamma_\beta[\phi]}{\delta G_{s_\beta}(x)} G_{s_\beta}(x) - \frac{\delta \Gamma_\beta[\phi]}{\delta G_{s_\beta}(x)} G_{s_\beta}(x) \right] = 0. \quad (6.b)$$

由这些恒等式可以得到有限温度下正规顶角之间的一些 Ward-Takahashi 恒等式。

三、有限温度下的质量谱

在有限温度下,质量谱的确定和零温时的方法相同。通过两点正规顶角之间的 Ward-Takahashi 恒等式可以给出费米子和束缚态的质量谱。

首先,我们讨论费米子的动力学质量的产生。将(6.b)式对 $\psi_\beta(y)$ 和 $\bar{\psi}_\beta(z)$ 求导后,有

$$\int d^2x \left[\bar{\psi}_\beta(x) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta^3 \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \bar{\psi}_\beta(z) \delta \psi_\beta(y) \delta \bar{\psi}_\beta(x)} - \delta^2(x-z) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta^2 \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \psi_\beta(y) \delta \bar{\psi}_\beta(x)} - \frac{\delta^3 \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \bar{\psi}_\beta(z) \delta \psi_\beta(y) \delta \psi_\beta(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \psi_\beta(x) + \frac{\delta^2 \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \bar{\psi}_\beta(z) \delta \psi_\beta(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \delta^2(x-y) + \frac{\delta^3 \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \bar{\psi}_\beta(z) \delta \psi_\beta(y) \delta G_{s_\beta}(x)} G_{s_\beta}(x) - \frac{\delta^3 \Gamma_\beta[\phi]}{\delta \bar{\psi}_\beta(z) \delta \psi_\beta(y) \delta G_{s_\beta}(x)} G_{s_\beta}(x) \right] = 0. \quad (7)$$

利用拉氏量所具有的手征对称性,顶角之间有如下关系:

$$\Gamma_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta, G_{s_\beta}}^{(3)}(y, z; x) = -i \gamma_5 \Gamma_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta, G_{s_\beta}}^{(3)}(y, z; x). \quad (8)$$

应用(8)式,经 Fourier 变换后方程(7)式化为

$$\frac{i}{2} \gamma_5 \Gamma_{\bar{\psi}_\beta, \bar{\psi}_\beta}^{(2)}(p) + \Gamma_{\bar{\psi}_\beta, \bar{\psi}_\beta}^{(2)}(p) \frac{i}{2} \gamma_5 = -i \gamma_5 \Gamma_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta, G_{s_\beta}}^{(3)}(p, -p; 0) [\langle \bar{\psi} \psi \rangle_\beta + i \gamma_5 \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle_\beta], \quad (9)$$

其中应用了 $\psi_\beta(x)|_{J=0} = \bar{\psi}_\beta(x)|_{J=0} = 0$ 的性质。利用 γ_5 与 γ_μ 的反对易性质,在(9)式的左边中 $\Gamma_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta}^{(2)}(p)$ 的动能项互相抵消,仅保留下自能项部分。

当 $p^2 \rightarrow 0$ 时,由(9)式可以得到有限温度下动力学破缺后费米子的质量为

$$m_\pm(\beta) = \Gamma_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta, G_{s_\beta}}^{(3)}(p, -p; 0) |_{p^2=0} [\langle \bar{\psi} \psi \rangle_\beta + i \gamma_5 \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle_\beta], \quad (10)$$

上式跟零温时费米子的质量谱非常相似,仅将相应的物理量变为有限温度下的结果。

在动力学自发破缺的理论中,存在着由费米子对形成的束缚态。在手征 Gross-Neveu 模型中,这些束缚态可以定义为^[5]

$$\sigma(x) = a \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad (11.a)$$

$$\pi(x) = a \bar{\psi}(x) i \gamma_5 \psi(x), \quad (11.b)$$

其中 $a = \langle \sigma \rangle_0 / \langle \bar{\psi} \psi \rangle_0$, 下标“0”表示零温时的真空平均值。

与零温时类似,利用轴 Ward-Takahashi 恒等式可以确定束缚态 σ 、 π 在有限温度下的质量谱为^[5]

$$m_\pi^2(\beta) = \Gamma_{\sigma_\beta, \pi_\beta}^{(2)}(0) \frac{\langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle_\beta}{\langle \bar{\psi} \psi \rangle_\beta}, \quad (12.a)$$

$$m_s^2(\beta) = m_x^2(\beta) + \Gamma^{(3)}_{G_\beta, \pi_\beta; \pi_\beta}(p, -p; 0) |_{p^2=0} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_\beta - \Gamma^{(3)}_{G_\beta, \pi_\beta; \sigma_\beta}(p, -p; 0) |_{p^2=0} \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle_\beta. \quad (12.b)$$

当 $T = 0$ 时, 由强作用中宇称守恒可知

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x) i \gamma_5 \psi(x) | 0 \rangle = 0. \quad (13)$$

在有限温度下, 宇称仍然守恒, 因而 $\langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle_\beta$ 保持为零。相应地, 质量谱为

$$m_t(\beta) = \Gamma^{(3)}_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta; G_\beta}(p, -p; 0) |_{p^2=0} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_\beta, \quad (14.a)$$

$$m_x^2(\beta) = 0, \quad (14.b)$$

$$m_s^2(\beta) = \Gamma^{(3)}_{G_\beta, \pi_\beta; \pi_\beta}(p, -p; 0) |_{p^2=0} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_\beta. \quad (14.c)$$

(14.b)式表明, 当手征对称性没有恢复时, π 介子对应于有限温度下的 Goldstone 玻色子。

应用(11.a)式, (14.a)式可以改写为

$$m_t(\beta) = \Gamma^{(3)}_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta; G_\beta}(p, -p; 0) |_{p^2=0} \langle \sigma \rangle_\beta. \quad (15)$$

这就是有限温度下的 Goldberger-Treiman 关系^[9]。其中 $\Gamma^{(3)}_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta; G_\beta}(p, -p; 0)$ 表示有限温度下完全的正常顶角因子。它包含有 $1/N$ 的各阶之和, 见图 1。在图 1 中, x 表示与复合场的顶角。

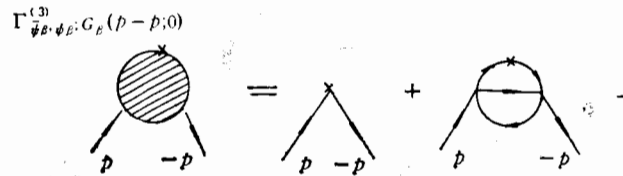


图 1 正规顶角因子 $\Gamma^{(3)}_{\bar{\psi}_\beta, \psi_\beta; G_\beta}(p, -p; 0)$ 。

在自洽场近似下, 费米子的质量为

$$m_t(\beta) = -\frac{g^2}{N} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_\beta, \quad (16)$$

这与大 N 展开和变分法所得结论完全相似^[6,10]。

四、手征相变

在手征 Gross-Neveu 模型中, 费米子质量的产生总是与手征对称性的破缺联系在一起。由(16)式可以看出, 费米子质量与费米子对凝聚成正比。因而, 可以把费米子质量当作描述动力学破缺的序参量。

在零温情况下, 我们以费米子质量为序参量讨论了动力学破缺的条件和相结构, 得到了与其它方法一致的结果^[5,6]。在本节中, 我们应用此方法来讨论有限温度下的相结构和手征相变。

为了便于讨论模型在有限温度下的行为, 我们引入两动量截断 $\vec{p} = (p_1, p_2)$ 。在零温

情况下,方程(16)式为

$$m_f \left(\frac{1}{g^2} + 4i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + m_f^2} \right) = 0, \quad (17)$$

其中 m_f 表示零温时费米子的质量。由(17)式容易看出,存在着一个临界耦合常数 g_{crit}^2 。当四费米子耦合不足以产生费米子对凝聚 ($g^2 \leq g_{crit}^2$) 时,上式的解为 $m_f = 0$, 这对应于手征相。当耦合足够强 ($g^2 > g_{crit}^2$) 时,(17)式有非平庸解,并对应于手征对称性破缺的相^[6,11]。

在有限温度的情况下,(16)式为

$$m_f(\beta) \left(\frac{1}{g^2} - 4 \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 - \omega_n^2 + m_f^2(\beta)} \right) = 0, \quad (18)$$

其中 $\omega_n = \frac{i(2n+1)\pi}{\beta}$, $n = 0, \pm 1, \dots$ 。

利用恒等式

$$\begin{aligned} \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n, \omega_n = \frac{i(2n+1)\pi}{\beta}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \frac{f(p_0)}{1 + e^{\beta p_0}} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty-\epsilon}^{i\infty-\epsilon} dp_0 \frac{f(p_0)}{1 + e^{-\beta p_0}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 f(p_0), \end{aligned} \quad (19)$$

(18)式可以化为

$$m_f(\beta) \left[\frac{1}{g^2} - 4 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{2E_p} - \frac{1}{E_p(1 + e^{\beta E_p})} \right) \right] = 0, \quad (20)$$

其中 $E_p = \sqrt{p^2 + m_f^2(\beta)}$ 。

由(20)式可知,当体系在零温下处于手征相时,在有限温度下系统仍处于手征相,方程(20)式的解为 $m_f(\beta) = 0$ 。当体系在零温下处于破缺相时,方程(20)式存在一个临界温度 T_c 。当 $T < T_c$ 时,费米子质量具有非平庸解,并满足方程

$$\frac{1}{g^2} - 4 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{2E_p} - \frac{1}{E_p(1 + e^{\beta E_p})} \right) = 0, \quad (21)$$

这时,体系处于破缺相。费米子质量满足有限温度下的 Goldberger-Treiman 关系, π 介子是无质量的 Goldstone 玻色子。当 $T \geq T_c$ 时,(21)式没有非平庸解,这时体系处于手征相。由(14)式,费米子和束缚态都变为无质量。

为了确定临界温度,利用(17)式可以将方程(21)式改写为

$$m_f(\beta) - m_f + \frac{2}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta m_f(\beta)}) = 0. \quad (22)$$

容易看出,以破缺相 ($m_f(\beta) \neq 0$) 到手征相之间的转变是二阶相变,手征相变的临界温度为

$$T_c = \frac{m_f}{2 \ln 2}. \quad (23)$$

在有限费米子密度情况下,采用巨正则系综,从而引入化学势 μ 。这并不改变系统原

有的动力学性质。故用手征 Ward-Takahashi 恒等式来确定质量谱的方法仍然有效。类似地,由费米子质量公式可以得到

$$m_f(\beta) \left[m_f(\beta) - m_f + \frac{1}{\beta} \int_{\beta m_f(\beta)}^{\infty} dx \left(\frac{1}{1 + e^{x - \beta\mu}} + \frac{1}{1 + e^{x + \beta\mu}} \right) \right] = 0. \quad (24)$$

由上式可知,决定相曲线的方程为

$$\beta_c m_f = \ln [2 + 2 \cosh(\mu \beta_c)], \quad (25)$$

相应的相图见图 2。

应该指出,虽然这里所得到的相变温度和相图与文献[12]中的结论相同,但是这里与文献[12]中所讨论的对象不同。文献[12]所讨论的是“超导”相变,而本文所研究的是手征相变。

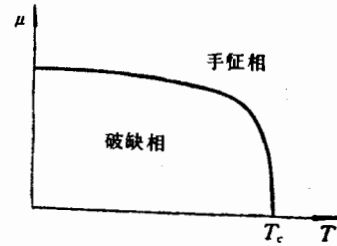


图 2 相图

五、小 结

本文利用在有限温度下含复合场的手征 Ward-Takahashi 恒等式讨论了费米子和束缚态的质量谱,并以费米子质量作为序参量讨论了有限温度下的相结构和手征相变。

通过这些讨论可以看出,含复合场的手征 Ward-Takahashi 恒等式可以作为一种探讨束缚态的质量谱和手征相变的方法。我们期望用它来研究 QCD 中的介子谱和手征相变。

参 考 文 献

- [1] D. J. Gross, in "Methods in Field Theory", 1975 Les Houches Lectures, edited by R. Balian and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1976).
- [2] G. Parisi, *Nucl. Phys.*, **B100**(1975), 368.
- [3] K. Shizuya, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2327; B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 1433.
- [4] G. Semenoff and L. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 1083; M. Carena, T. Clark and C. Wagner, *Nucl. Phys.*, **B356**(1991), 117.
- [5] 沈 坤, 袁忠平, 高能物理与核物理, Vol.16, No. 1(1992), 22.
- [6] B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, *Phys. Lett.*, **B219**(1989), 469; B. Rosenstein and B. J. Warr, *Phys. Lett.*, **B218**(1989), 465; G. Gat, A. Kovner, B. Rosenstein and B. J. Warr, *Phys. Lett.*, **B240**(1990), 158.
- [7] C. W. Bernard, *Phys. Rev.*, **D9**(1974), 3312; L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D9**(1974), 3320.
- [8] D. J. Gross and A. Neveu, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3235.
- [9] M. L. Goldberger and S. B. Treiman, *Phys. Rev.*, **110**(1958), 1178.
- [10] B. Rosenstein and A. Kover, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 523; J. I. Latorre and J. Soto, *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 3111; M. G. Mitchard, J. A. Gracey and A. J. Macfarlane, *Nucl. Phys.*, **B325**(1989), 470.
- [11] Shen Kun and Qiu Zhongping, *Phys. Rev.*, **D45**(1992), 3877.
- [12] B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 3088.

Chiral Ward-Takahashi Identities at Finite Temperature and Chiral Phase Transition in (2+1) Dimensional Chiral Gross-Neveu Model

SHEN KUN QIU ZHONGPING

(Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan, 430070)

ABSTRACT

Chiral Ward-Takahashi identities at finite temperature are derived in (2+1) dimensional chiral Gross-Neveu model. In terms of these identities, fermion mass generation and the mass spectra of bound states are investigated at finite temperature. Taking the fermion mass as an order parameter, we discuss the phase structure and chiral phase transition and obtain the critical temperature.