

多体关联 Green 函数动力学*

III. 截断近似

左 维 王 顺 金

(兰州大学现代物理系 730001)

摘 要

从多体关联 Green 函数的基本动力学方程组出发,通过对多体关联 Green 函数作低阶截断近似,得到了通常 Green 函数理论中所有主要的非微扰结果.而且二体关联 Green 函数动力学把梯形图对应的短程关联与环形图对应的长程关联统一在同一个动力学方程组中,这是通常的 Green 函数理论所没有得到的新结果.

一、引 言

Green 函数方法在物理学中有着非常广泛的应用^[1-4],但通常的 Green 函数理论以微扰论为基础,缺乏一种完整系统的非微扰计算方案,为此,我们发展了非微扰的多体关联 Green 函数动力学,其基本方程组为^[5]

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \iota(1) \right] G(1; 1') = \delta^{(4)}(1, 1') - i \int d^2V(1, 2) [G(1; 1')G(2; 2^+) - G(1; 2^+)G(2; 1') + G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2^+)], \quad (1.1a)$$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_j} - \iota(j) \right] G_c^{(n)} = -i \left[\text{Tr}_{(n+1)'=(n+1)^+} V(j, n+1) A S \sum_{(n+1)} \sum_{k \geq l \geq m=0} G_c^{(k)} G_c^{(l)} G_c^{(m)} \delta_{k+l+m, n+1} \right]_L. \quad (n \geq 2, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1b)$$

这是一个非微扰和非线性的耦合方程组. 本文将展示,通过对多体关联 Green 函数作低阶截断近似,方程组 (1.1a, b) 以系统而自然的形式导致平均场理论 (TDHF 和 HF) 和二体关联动力学中的各种近似,其中包括梯形近似下的 Bethe-Salpeter 方程、时间有关的 G 矩阵近似 (TDGM) 以及二体关联动力学中所自动包含的环形图序列. 这些在通常的 Green 函数微扰论中经复杂的图形无穷求和规则得到的非微扰方程,在关联 Green 函数理论中都以极其自然的方式得到;而且二体关联 Green 函数的运动方程以统一的形式包含梯形图和环形图的无穷序列. 因而,多体关联 Green 函数动力学提供了一种完整

本文 1991 年 9 月 21 日收到.

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助.

系统的非微扰计算方法, 无需借助于生成泛函与图形技术.

二、平均场近似

最低阶近似是略去所有多体关联, 即假定

$$G_i^{(n)} = 0, \quad (n \geq 2) \quad (2.1)$$

由 (1.1a), 得到 Green 函数形式的 TDHF 方程

$$\begin{aligned} \left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \epsilon(1) \right] G(1; 1') &= \delta^{(4)}(1, 1') \\ &- i \int d2V(1, 2) [G(1; 1')G(2; 2^+) - G(1; 2^+)G(2; 1')]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

在平均场近似下, 可把 $G(1; 1')$ 写成对角形式

$$\begin{aligned} [iG(1; 1')] &= \theta(t_1 - t'_1) \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(x_1 t_1) \phi_{\alpha}^*(x'_1 t'_1) (1 - n_{\alpha}) \\ &- \theta(t'_1 - t_1) \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(x_1 t_1) \phi_{\alpha}^*(x'_1 t'_1) n_{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 n_{α} 与 t 无关, 由初始条件决定, 表示初始时刻单粒子态 α 的填充数. 单粒子态 $\phi_{\alpha}(x, t)$ 随时间演化, 是待定的. 将 (2.3) 代入 (2.2) 式, 并利用 $\phi_{\alpha}(x, t)$ 的正交完备性条件, 可得单粒子态 $\phi_{\alpha}(x, t)$ 所满足的 TDHF 方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi_{\alpha}(x, t) = h(x, t) \phi_{\alpha}(x, t), \quad (2.4a)$$

$$h(x, t) = \epsilon(x) + U_{\text{HF}}(x, t), \quad (2.4b)$$

其中 U_{HF} 正是 TDHF 中的平均场

$$\begin{aligned} U_{\text{HF}}(x, t) \phi_{\alpha}(x, t) &= \int d^3x_1 v(x - x_1) \sum_{\beta} n_{\beta} [\phi_{\beta}(x_1, t) \phi_{\beta}^*(x_1, t) \phi_{\alpha}(x, t) \\ &- \phi_{\beta}(x, t) \phi_{\beta}^*(x, t) \phi_{\alpha}(x_1, t)], \end{aligned} \quad (2.4c)$$

若平均场与时间无关, 则 (2.4a, b) 有定态解

$$\phi_{\alpha}(x, t) = e^{-i\epsilon_{\alpha} t} \phi_{\alpha}(x), \quad (2.5a)$$

$$h(x) \phi_{\alpha}(x) = \epsilon_{\alpha} \phi_{\alpha}(x). \quad (2.5b)$$

即通常的 HF 方程.

三、二体关联动力学

比平均场近似更进一步的近似是假定三体以上的关联 Green 函数都等于零

$$G_i^{(n)} = 0, \quad (n \geq 3) \quad (3.1)$$

这导致二体关联 Green 函数动力学, 其基本方程组是

$$\begin{aligned} \left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \epsilon(1) \right] G(1; 1') &= \delta^{(4)}(1, 1') - i \int d2V(1, 2) [G(1; 1')G(2; 2^+) \\ &- G(1; 2^+)G(2; 1') + G_i^{(2)}(1, 2; 1', 2^+)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \varepsilon(1) \right] G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2') = -i \int d3V(1, 3) [-G^{(2)}(1, 3; 1', 2')G(2; 3)] \quad (3.3a)$$

$$+ (1 - P_{13})G(3; 3^+)G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2') \quad (3.3b)$$

$$- i \int d3V(1, 3) [(1 - p_{13})(1 - p_{1'2'})]G(1; 1')G_c^{(2)}(2, 3; 2', 3^+). \quad (3.3c)$$

其中 p_{ij} 是 i 和 j 间的置换算子, 对于其它变量 $(x_i t_i)$ 和 $(x'_i t'_i)$ 有类似的方程.

方程组 (3.2) 和 (3.3a—c) 以统一的形式将梯形图和环形图的无穷序列包含其中. 下面分别讨论梯形图和环形图近似. 为了简单, 考虑相互作用体系的基态性质, 即令

$$\hat{\rho} = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|,$$

这里 $|\Psi_0\rangle$ 是相互作用多体系统的 Heisenberg 基态^[4]. 首先证明, 在梯形图近似下, 从方程组 (3.2) 和 (3.3a—c) 可得到 Green 函数的 Bethe-Salpeter 方程. 先对一体 Green 函数作平均场近似, 引进平均场

$$U(1) = -i \int d2V(1, 2)[1 - P_{12}]G(2; 2^+), \quad (3.4)$$

在平均场近似下, $G(1; 1')$ 的运动方程变为

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \varepsilon(1) - U(1) \right] G(1; 1') = \delta^{(4)}(1, 1'), \quad (3.5a)$$

或

$$G(1; 1') = \left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \varepsilon(1) - U(1) \right]^{-1} \delta^{(4)}(1, 1'), \quad (3.5b)$$

运动方程 (3.3a—c) 截断到 (3.3b) 对应于梯形图近似. 利用 (3.4), 则 (3.3a, b) 可写成

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \varepsilon(1) - U(1) \right] G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2') = i \int d3V(1, 3)G^{(2)}(1, 3; 1', 2')G(2; 3), \quad (3.6)$$

用 $\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - \varepsilon(2) - U(2) \right]$ 作用于上式并利用 (3.5a), 可得

$$\begin{aligned} & \left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - \varepsilon(2) - U(2) \right] \left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \varepsilon(1) - U(1) \right] G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2') \\ & = iV(1, 2)G^{(2)}(1, 2; 1', 2'), \end{aligned} \quad (3.7)$$

利用 (3.5b), 可从上述解得

$$G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2') = i \int d3d4G(1; 3)G(2; 4)V(3, 4)G^{(2)}(3, 4; 1', 2'), \quad (3.8a)$$

或

$$G_c^{(2)} = GG_iVG^{(2)}. \quad (3.8b)$$

定义等效相互作用 Γ

$$VG^{(2)} = \Gamma G_0^{(2)} = \Gamma ASGG, \quad (3.9a)$$

注意到

$$G^{(2)} = ASGG + G_c^{(2)}, \quad (3.9b)$$

经简单的代数运算,给出

$$\Gamma = V + iVGG\Gamma. \quad (3.10)$$

这正是 Green 函数的 Bethe-Salpeter 方程^[1],但这里的单粒子 Green 函数已不是自由粒子的,而是多体平均场中的单粒子 Green 函数.如果在 (3.5a, b) 中用 Γ 代替作用势 V ,重新定义平均场和单粒子 Green 函数

$$U_{\Gamma}(1) = -i \int d2\Gamma(1,2)(1 - P_{12})G(2;2^+), \quad (3.11a)$$

$$G(1;1') = \left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \epsilon(1) - U_{\Gamma}(1) \right]^{-1} \delta^{(4)}(1,1'). \quad (3.11b)$$

则 B-S 方程得到进一步改进. (3.10)和 (3.11a,b) 构成闭合的自洽的非线性方程组,它们描述在二体关联动力学框架内,二体相互作用在梯形近似下产生一个等效相互作用,这个等效相互作用又产生一个单粒子的自洽平均场,相互作用的粒子对又在这个平均场中运动,形成自洽平均场中的独立关联粒子对.这一图象正是 Bethe-Goldstone 的 G 矩阵理论的 Green 函数推广.

现在来指明, (3.3c) 所包含的额外项目对应于环形图的无穷序列.为单纯显示环形图近似,我们在 (3.3a) 中去掉对应于梯形图的项目并取 $G^{(2)} = GG$,在 (3.3c) 中取环形图的直接项,这样有

$$\begin{aligned} & \left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \epsilon(1) - U(1) \right] G_e^{(2)}(1,2;1',2') \\ & = -i \int d3V(1,3)G(1;1')[-G(2;3)G(3;2') + G_e^{(2)}(2,3;2',3^+)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

由上式可解得

$$\begin{aligned} G_e^{(2)}(1,2;1',2') & = i \int d3d4G(1;4)G(4;1')V(4,3)[G(3;2')G(2;3) \\ & \quad - G_e^{(2)}(2,3;2',3^+)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

考虑编时相关函数^[2]与 $G_e^{(2)}$ 的关系

$$\begin{aligned} iD(1,2) & = iD(2,1) = \langle T[\hat{a}(1) - \langle \hat{a}(1) \rangle][\hat{a}(2) - \langle \hat{a}(2) \rangle] \rangle \\ & = -G_e^{(2)}(1,2;1^+,2^+) + G(1;2)G(2;1), \end{aligned} \quad (3.14)$$

并引进 $D^0(1,2)$

$$D^0(1,2) = -iG(1;2)G(2;1), \quad (3.15)$$

则用 (3.13) 式,可得

$$D(1,2) = D^0(1,2) + \int d3d4D^0(1,3)V(3,4)D(4,2), \quad (3.16a)$$

或

$$D = D^0 + D^0VD, \quad (3.16b)$$

令 $D = \Pi$, $D^0 = \Pi^0$, 则上式变为

$$\Pi = \Pi^0 + \Pi^0V\Pi = \frac{1}{1 - \Pi^0V} \Pi^0, \quad (3.17)$$

这是编时相关函数满足的方程.

现在考虑 Π 对 $G_c^{(2)}$ 的影响. 用 $\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - \epsilon(2) - U(2) \right]$ 作用于方程 (3.12), 得

$$\begin{aligned} & \left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - \epsilon(2) - U(2) \right] \left[i \frac{\partial}{\partial t_1} - \epsilon(1) - U(1) \right] G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2') \\ &= iV(1, 2)G(1; 1')G(2; 2') \\ &+ \int d3d4V(1, 3)V(2, 4)G(1; 1')G(2; 2')[-G_c^{(2)}(3, 4; 3^+, 4^+) \\ &+ G(3; 4)G(4; 3)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

可解得

$$G_c^{(2)} = iGGVGG + iGGV\Pi VGG = iGGU_cGG, \quad (3.19)$$

其中等效相互作用定义为

$$U_c = V + V\Pi V = V \frac{1}{1 - \Pi^0 V}, \quad (3.20)$$

这正相应于环形图的无穷序列. 用 Feynman 图形表示, 上述结果更为直观 (见图 1).

在上述论证中, 只考虑了 (3.3c) 中直接项的贡献, 而它的交换项反映了 Pauli 反对称化效应, 相应图形具有更为复杂一些的结构.

至此, 我们证明了, 二体关联动力学方程 (3.3a—c) 作为一个整体,

同时包含了梯形图和环形图的无穷序列, 而通常的 Green 函数理论只是分别考虑了梯形图和环形图近似所导致的方程, 它们分别适用于描述短程关联和长程关联.

最后, 我们在 Green 函数框架内, 讨论时间有关的 G 矩阵近似 (TDGM)^[6], 并表明它在定态近似下的解.

考虑 $G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2')$ 按四时演化的过程

$$i \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial t'_i} \right) G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2') = \left[\sum_{i=1}^2 (\epsilon(i) - \epsilon(i')) \right] G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2') \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} &+ i \int d3 [V(1, 3)G^{(2)}(1, 3; 1', 2')G(2; 3) + V(2, 3)G^{(2)}(2, 3; 2', 1')G(1; 3) \\ &- V(1', 3)G^{(2)}(1, 2; 1', 3)G(3; 2') - V(2', 3)G^{(2)}(1, 2; 3, 2')G(3; 1')] \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\begin{aligned} &- i \int d3 [V(1, 3)(1 - P_{13})G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2')G(3; 3^+) \\ &+ V(2, 3)(1 - P_{23})G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2')G(3; 3^+) \\ &- V(1', 3)(1 - P_{1'3})G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2')G(3^-; 3) \\ &- V(2', 3)(1 - P_{2'3})G_c^{(2)}(1, 2; 1', 2')G(3^-; 3)] \end{aligned} \quad (3.21c)$$

$$- i \int d3 [V(1, 3)(1 - P_{13})(1 - P_{1'2'})G_c^{(2)}(2, 3; 2', 3^+)G(1; 1')$$

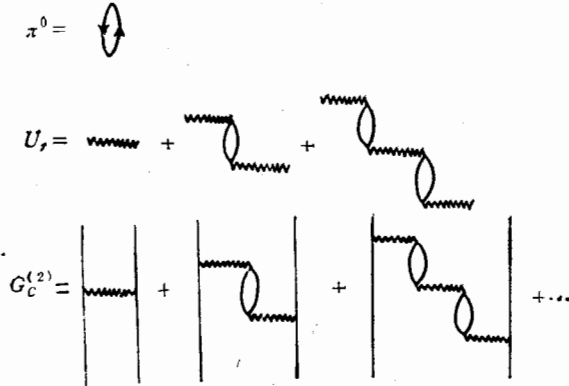


图 1

$$\begin{aligned}
& + V(2,3)(1 - P_{23})(1 - P_{2'1'})G_e^{(2)}(1,3;1',3^+)G(2;2') \\
& - V(1',3)(1 - P_{1'3})(1 - P_{12})G_e^{(2)}(2,3^-;2',3)G(1;1') \\
& - V(2',3)(1 - P_{2'3})(1 - P_{21})G_e^{(2)}(1,3^-;1',3)G(2;2')]. \quad (3.21d)
\end{aligned}$$

上述方程截止到 (3.21c) 导致 TDGM, 而 (3.21d) 则是环形图的贡献. 引进多体 Pauli 算子

$$Q_{12} = i \operatorname{Tr}_{(3'=3^+)} (P_{13} + P_{23})G(3;3'), \quad (3.22a)$$

$$Q_{1'2'} = i \operatorname{Tr}_{(3=3'^-)} (P_{1'3'} + P_{2'3'})G(3;3'), \quad (3.22b)$$

和平均场

$$U(i) = -i \operatorname{Tr}_{(3'=3^+)} [V(i,3)(1 - P_{i3})G(3;3')], \quad (3.22c)$$

$$U(i') = -i \operatorname{Tr}_{(3=3'^-)} [V(i',3')(1 - P_{i'3'})G(3;3')], \quad (3.22d)$$

则方程 (3.21a-c) 可简写为

$$\begin{aligned}
i \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial t'_i} \right) G_e^{(2)}(1,2;1',2') & = \left[\sum_{i=1}^2 (\iota(i) + U(i) - \iota(i') - U(i')) \right] \\
& \times G_e^{(2)}(1,2;1',2') + Q_{12}V(1,2)G^{(2)}(1,2;1',2') \\
& - Q_{1'2'}V(1',2')G^{(2)}(1,2;1',2'). \quad (3.23)
\end{aligned}$$

在定态近似下

$$\begin{aligned}
i \left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right] G_e^{(2)}(1,2;1',2') & = -i \left[\frac{\partial}{\partial t'_1} + \frac{\partial}{\partial t'_2} \right] G_e^{(2)}(1,2;1',2') \\
& = \omega_{12}G_e^{(2)}(1,2;1',2'), \quad (3.24)
\end{aligned}$$

则 TDGM 方程 (3.23) 变为

$$\begin{aligned}
[\omega_{12} - (\iota(1) + \iota(2) + U(1) + U(2))]G_e^{(2)}(1,2;1',2') \\
= Q_{12}V(1,2)G^{(2)}(1,2;1',2'), \quad (3.25)
\end{aligned}$$

定义 Γ 矩阵

$$\Gamma G_0^{(2)} = \Gamma ASGG = VG^{(2)}, \quad (3.26)$$

由 (3.25) 和 (3.26), 经简单代数运算, 得

$$\Gamma = V + V \frac{1}{\omega_{12} - \sum_{i=1}^2 [\iota(i) + U(i)]} Q_{12}\Gamma. \quad (3.27)$$

这正是 TDGM 方程定态下的解, 而 (3.23) 式是 TDGM 方程的 Green 函数形式, 在等时极限下, 它正是 TDGM 方程.

四、讨 论

本文讨论了多体关联 Green 函数的基本动力学方程组的低阶截断近似. 在一阶截断近似下, 它以十分自然而简洁的方式导致平均场近似 (TDHF 和 HF); 在二阶截断近似下, 它把多体平均场效应和 Pauli 原理, 梯形图和环形图的无穷序列, 系统而简洁地

概括在同一个二体关联动力学方程组中, 形成二体关联动力学的完整理论: 在梯形图近似下, 它导致 Bethe-Salpeter 方程; 在环形图近似下, 它导致反映极化和长程关联的运动方程。现有 Green 函数理论的非微扰结果, 不过是二体关联 Green 函数动力学的某一极限近似。多体关联 Green 函数的明显优点, 是把传统 Green 函数理论分散的、缺乏联系的、不系统的非微扰结果、统一起来, 形成了一个概括多体关联和相互作用的全部效应的统一而系统的非微扰理论。例如, 在传统 Green 函数理论中工作的人们, 早就希望有一个把短程梯形图关联与长程环形图关联统一起来的理论, 而二体关联 Green 函数动力学正是人们所期望的这种理论。

与通常的 Green 函数理论相比, 多体关联 Green 函数动力学不给出计算各种 Green 函数的微扰论方案, 而是建立起连接(关联) Green 函数的非微扰的动力学方程组。本文的论证表明, 这个动力学方程组为描述多体系统提供了一种完整的、系统的非微扰的计算方法, 或者说提供了一个物理上自然的按多体关联等级截断的近似方案, 而且每一种截断都导致一个非微扰的近似理论。因而, 多体关联 Green 函数动力学理论的优点, 正在于它以解析的形式而不是图形方法, 提供了各阶关联 Green 函数的完整方程组, 并把通常 Green 函数理论的各种分散的非微扰公式归结为它在不同近似下的结果。

参 考 文 献

- [1] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle System*, Mc Graw-Hill Book Company, 1971.
- [2] T. Matsubara, *Progr. Theor. Phys. (Kyoto)*, **14**(1955), 351;
E. S. Fradkin, *JETP*, **9**(1959), 912;
M. Gaudin, *Nucl. Phys.*, **15**(1960), 89;
A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzaloshinskii, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963);
蔡建华等著,《量子统计的格林函数理论》,科学出版社,1982.
- [3] P. C. Martin and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **115**(1959), 1342;
L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, W. A. Benjamin, 1962.
- [4] P. Danielewicz, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **152**(1984), 238, 305;
K. C. Chou, Z. B. Su, B. L. Hao, and L. Yu, *Phys. Rep.*, **118**(1985), 1;
E. Calzetta and B. L. Hu, *Phys. Rev.*, **D37**(1988), 2878;
W. Botermans and R. Malfliet, *Phys. Rep.*, **198**(1990), 115.
- [5] 左维,王顺金,多体关联 Green 函数动力学 I. 多体关联 Green 函数的运动方程,高能物理与核物理,待发表.
- [6] W. Cassing, K. Niita and S. J. Wang, *Z. Phys.*, **A331**(1988), 439.

Dynamics of Many-Body Correlation Green's Functions

III. Truncation with Respect to Order

ZUO WEI WANG SHUNJIN

(Lanzhou University, 730001)

ABSTRACT

All of the main non-perturbative results in the standard Green's function theory are obtained naturally and explicitly from the set of dynamic equations of the many-body correlation Green's functions by means of truncation up to lower correlations. The two-body correlation Green's function dynamics includes both ladder diagrams for short-range correlations and ring diagrams for long-range correlations in a unified way.