

## 有限温度格点 $U(1)$ 规范理论计算\*

郑希特

(成都科技大学物理系, 610065)

任学藻

(西昌师专物理系, 615022)

### 摘 要

用有限温度的变分-累积展开方法, 计算了  $N_\tau = 1$  的  $U(1)$  格点规范模型的序参量  $\langle L \rangle$ , 结果与蒙特卡洛模拟符合, 讨论了  $N_\tau = 1$  时出现的特殊简化, 明确了变分条件定累积展开中所引入的参数和聚点法定参数的关系。

由于重离子碰撞实验和宇宙早期演化研究的进展, 对温度场论的研究吸引了更多的注意力, 为探讨低温下强子物质的禁闭相与高温时夸克-胶子等离子体状态间解除禁闭相变, 单进行微扰的研究是不够的, 于是有限温度的格点规范理论得到了发展<sup>[1]</sup>, 对于不同的规范群的模型, 采用 Monte Carlo 方法, 强耦合展开方法, 平均场方法都有一些工作。我们曾把变分-累积展开方法用到有限温度情形, 对纯  $SU(2)$ 、 $SU(2)$ -Higgs 模型进行了研究<sup>[2,3]</sup>。在格点理论中引入温度的办法是在  $D$  维  $(N_s a_s)^{D-1} \cdot (N_\tau a_\tau)$  格点上把  $N_\tau$  取为有限值,  $N_s$  原则上为无限, 在类时  $N_\tau$  方向上加以周期边界条件, 于是把格点温度定义为  $T = 1/(N_\tau a_\tau)$ , 当  $N_\tau \rightarrow \infty$  时即恢复到零温度情形, 为简单计, 取对称格子  $a_s = a_\tau = a$ 。本文给出对  $N_\tau = 1$  的计算和讨论。  $N_\tau = 1$  对应着高温情形, 我们将证明: 这时所有  $D-1$  维空间元格  $P_s$  将与含类时链的元格  $P_\tau$  完全退耦, 这将给计算带来很大的简化。

在变分-累积展开方法中一个重要的问题是展开的收敛性, 虽然迄今并没有解决收敛性的普遍证明, 但对若干规范模型的计算表明, 若对累积展开中所引入的参数选得适当, 常常可以得到较快的收敛结果。通常是对自由能的一级近似对参数变分的极小条件来定参数<sup>[4]</sup>, 近年来 Kerler 等提出对参数扫描计算若干级近似寻找它们的共同交点(聚点)<sup>[5]</sup>, 因为高级近似的聚点处对应着展开收敛得最好的参数值, 只要聚点存在, 就能得到较好的结果, 本文通过对  $U(1)$  的计算, 来比较上述两种定参数的方法, 可以看出它们的紧密联系。

本文 1991 年 10 月 8 日收到

\* 国家自然科学基金资助。

二

$U(1)$  模型的群元素  $U_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)}$  ( $\theta_\mu(x) \in [-\pi, \pi]$ ) 定义在链上, 其作用量为

$$S_{U(1)} = \frac{1}{g_0^2} \sum_{P_s} (1 - \cos\theta_{P_s}) + \frac{1}{g_0^2} \sum_{P_r} (1 - \cos\theta_{P_r}), \quad (1)$$

这里

$$\theta_p = \theta_\mu(x) + \theta_\nu(x + \mu) - \theta_\mu(x + \nu) - \theta_\nu(x). \quad (2)$$

来自沿元格的四个链上  $U(1)$  群元素之积, 求和分别对所有空间元格  $P_s$  和类时元格  $P_r$  进行.  $\frac{1}{g_0^2} = \beta$  为无量纲耦合常数. 在计算物理量的平均值时可以略去(1)式中的常数, 用

$$S = \beta \sum_{P_s} \cos\theta_{P_s} + \beta \sum_{P_r} \cos\theta_{P_r}. \quad (3)$$

来代替  $-S_{U(1)}$ . 试探作用量取为

$$S_0 = J \sum_{I_s} \cos\theta_{I_s} + K \sum_{I_r} \cos\theta_{I_r}. \quad (4)$$

求和分别对所有空间链  $I_s$  和类时链  $I_r$  进行.  $J, K$  为相应的变分参数.

以  $S_0$  为作用量的辅助系统的配分函数为<sup>[6]</sup>

$$Z_0 = \int [dU] e^{S_0} = [I_0(J)]^{M(D-1)} \cdot [I_0(K)]^M. \quad (5)$$

这里  $M$  为格点数,  $I_0$  为零阶变型贝塞尔函数. 相应于  $Z_0$  的单位格点自由能为

$$F_0 = -(D-1) \ln I_0(J) - \ln I_0(K). \quad (6)$$

于是  $U(1)$  模型的单位格点自由能  $F$  可以通过  $S_0$  作累积展开而表示为

$$F = \frac{1}{2} \beta D(D-1) + F_0 - \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S - S_0)^n \rangle. \quad (7)$$

作为有限温度系统的序参量 Polyakov 线在  $N_r = 1$  时为

$$\langle L \rangle = \langle U_r(x) \rangle \equiv \langle | \rangle. \quad (8)$$

本文用与[2]中相同的图形符号: 以竖线表示类时链上定义的群元素, 以横或斜线表示空间链上定义的群元素, 以点和虚线表示上下边界的联结以体现周期边界的要求.  $\langle L \rangle$  可以通过累积展开来计算<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle L(S - S_0)^n \rangle. \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle L_n \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

这里

$$\begin{aligned}
 \langle L_0 \rangle &= \langle L \rangle_0, \\
 \langle L_1 \rangle &= \langle LS \rangle_c - \left( J \frac{\partial}{\partial J} + K \frac{\partial}{\partial K} \right) \langle L \rangle_0, \\
 \langle L_2 \rangle &= \langle LS^2 \rangle_c - 2 \left( J \frac{\partial}{\partial J} + K \frac{\partial}{\partial K} \right) \langle LS \rangle_c \\
 &\quad + \left( J \frac{\partial}{\partial J} + K \frac{\partial}{\partial K} \right)^2 \langle L \rangle_0, \\
 &\dots\dots
 \end{aligned} \tag{10}$$

为作到  $l$  级展开, 需要先算出  $\langle LS^i \rangle_c$ , ( $i = 1, \dots, l$ ), 其它各项通过对  $J$  和  $K$  求导得出, 较为容易.

对阿贝尔理论, 在  $N_r = 1$  时, 周期性条件带来一种特殊的简化. 容易证明

$$\langle \square \rangle_c = \langle \square \rangle_0 - \langle \square \rangle_0 \langle \square \rangle_0 = 0. \tag{11}$$

这是由于

$$\begin{aligned}
 \langle \square \rangle_0 &= \frac{1}{z_0} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_i \frac{d\theta_i}{2\pi} (e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} e^{-i\theta_1} e^{i\theta_3}) (e^{i\theta_1} e^{i\theta_4} e^{-i\theta_4} e^{-i\theta_3}) e^{S_0} \\
 &= \frac{1}{z_0} \int \prod_i \frac{d\theta_i}{2\pi} e^{i(\theta_2 - \theta_3)} e^{i(\theta_1 + \theta_4 - \theta_1 - \theta_4)} e^{S_0} \\
 &= \langle \square \rangle_0 \langle \square \rangle_0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

同理, 在累积展开中所有  $P_r$  元格或由  $P_r$  元格构成的联结部分都将与  $P_r$  元格或由  $P_r$  元格构成的联结部分退耦. 这样, 在(9)式这样的展开式中, 就不会有空间元格的贡献.

$$\begin{aligned}
 \langle L_0 \rangle &= \langle l \rangle_0 = I_1(K)/I_0(K) \equiv \xi_1(K), \\
 \langle L_1 \rangle &= 2(D-1)\beta \langle \square \rangle_c - K \frac{\partial}{\partial K} \langle L_0 \rangle \\
 &= 2(D-1)\beta \xi_1 \xi_1' - K \xi_1', \\
 \langle L_2 \rangle &= 2(D-1)\beta^2 \langle \square \square \rangle_c + (2D-3) \langle \square \square \rangle_c \\
 &\quad + 2(2D-3) \langle \square \square \rangle_c \\
 &\quad - 2K \frac{\partial}{\partial K} [2(D-1)\beta \langle \square \rangle_c] + K^2 \frac{\partial^2}{\partial K^2} \langle L_0 \rangle \\
 &= 2(D-1)\beta^2 \left[ \frac{1}{2} \xi_2 \xi_2' - 2\xi_1^3 \xi_1' + (2D-3)\xi_1^2 \xi_1' \right. \\
 &\quad \left. + 2(2D-3)\xi_1 \xi_1'^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\dots\dots - 4(D-1)\beta K(\xi_1\xi_1)' + K^2\xi_1'' \quad (13)$$

这里  $\xi_n = \xi_n(K) = I_n(K)/I_0(K)$ . (14)

显见,  $\langle L \rangle$  的展式与  $J$  无关. 这正是已知的在高温下  $U(1)$  理论的空间 Wilson 圈与 Polyakov 线之间没有相互作用的表现<sup>[1]</sup>.

同理, 系统的单位格点自由能  $F$  在通过(7)式的累积展开表达时, 将不会出现  $J$  和  $K$  耦合的相互作用项, 它们各自独立地对  $F$  作出贡献. 如一级近似 ( $n=1$ ) 时

$$F_1 = \frac{1}{2}\beta D(D-1) + F_0 - \frac{1}{2}\beta(D-1)(D-2)\omega_1^2 - \beta(D-1)\xi_1^2 + (D-1)J\omega_1 + K\xi_1. \quad (15)$$

这里

$$\omega_n = \omega_n(J) = I_n(J)/I_0(J). \quad (16)$$

展式中所有  $U(1)$  群计算的积分与对  $U(1)$ -Higgs 模型中纯规范部分的算法一样<sup>[6]</sup>.

定参数  $J, K$  采用  $F_1$  的变分条件得到

$$J = 2\beta(D-2)\omega_1^3, \quad (17)$$

$$K = 2\beta(D-1)\xi_1. \quad (18)$$

显见,  $J, K$  是完全独立的.  $J=0, K=0$  对应着强耦合解. 普遍的解由  $J, K$  的非零解给出. 而  $F_1$  的极小由  $J=0, K \neq 0$  (由(18)式定出)给出. 由(18)式给出的  $K(\beta)$  关系见图 1. 以这  $K(\beta)$  关系代入(15)式定出的  $K(\beta)$  将给出系统单位格点自由能的上界.

以  $K(\beta)$  代入(10)式算得的二级近似的  $\langle L \rangle$  示于图 2, 与以  $\times$  表示的 Monte Carlo 的结果<sup>[7]</sup>, 一般来说符合较好, 尤其是对较大的  $\beta$  值,  $\beta_c = 0.33$  与 Monte Carlo 还有点距离, 但比平均场的结果有改进. (平均场的结果比本文的  $\langle L \rangle$  结果要略大, 因而与 Monte Carlo 结果偏离更大一些<sup>[7]</sup>, 这里未予画出).

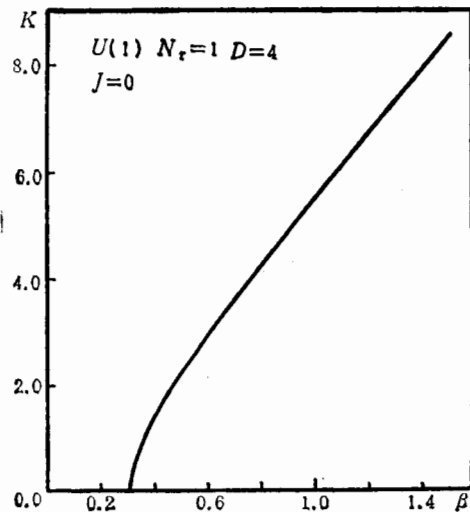


图 1 由一级近似自由能变分极小条件定出的  $K(\beta)$

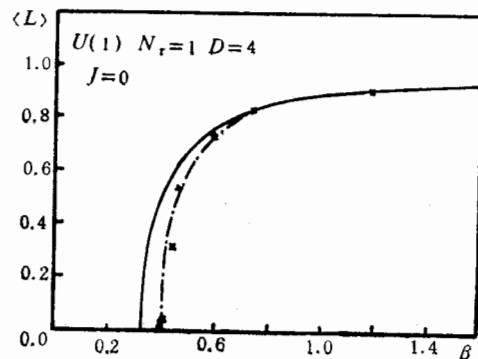


图 2 二级近似的 Polyakov 线与 Monte Carlo 模拟结果的比较

在图3上我们画出  $F_1(\beta)$ ,  $F_2(\beta)$ ,  $F_3(\beta)$ , 三级近似对二级近似的修正很小, 在这样标尺的图上显示不出差异. 图3显示了在  $\beta = 1.0$  时展开有较快的收敛行为. 从曲线比较平滑来看, 在图2上显示的在  $\beta_c = 0.33$  处发生的解除禁闭相变当为二级或更高级, 需要更高级的近似计算来准确判别相变级别.

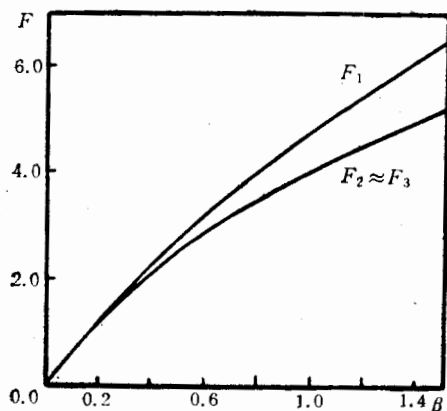


图3  $F_1(\beta), F_2(\beta), F_3(\beta)$  曲线

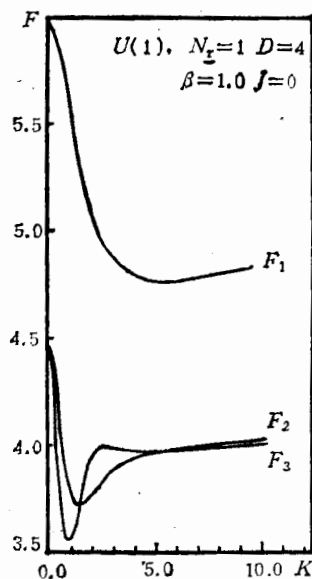


图4 固定  $\beta = 1.0$  时扫描  $K(J = 0)$  计算的  $F_1(K), F_2(K)$  与  $F_3(K)$ .

### 三

累积展开的收敛问题都是通过对系统的计算来考察. 变分参数选择得是否恰当对收敛的快慢有较大影响. 如何最佳地选择  $S_0$  中引入的参数就是一个需要解决的问题. 在变分法提出时就是采用了自由能一级近似的变分求  $F_1$  极小的条件<sup>[4]</sup>, 这样定下的参数在多数模型中得到了较好的结果, 而且以这个参数代入高级展开表达式时, 都逐级有所改善, 显示出收敛的行为. 然而, 不清楚的是为什么由凸性不等式仅仅只给出自由能上界的一级近似竟然给出与 Monte Carlo 模拟如此接近的结果? 如果展开级数不是在这个参数值附近收敛, 这种接近就太偶然了. Kerler 等<sup>[5]</sup>用参数扫描的办法来寻找取什么参数时, 展开有最快的收敛行为. 例如, 当进行参数扫描同时算二、三、四级近似时, 如果它们有一个交点(称之为聚点), 那么在聚点所对应的参数值处, 二、三、四级的近似值是一样的, 说明展开对这个参数值的选取有良好的收敛行为. 为比较这两种方法, 在图4中给出  $\beta = 1.0, J = 0$  时对  $K$  扫描算出的  $F_1(K), F_2(K), F_3(K)$  的图形.  $F_1(K)$  的极小值对应着  $K_1 = 5.4$ , 而  $F_2, F_3$  的交点之一  $K_{2,3} = 5.323$  选作聚点时  $F_2 = F_3$ , 而以  $K_1$  代入算  $F_2, F_3$  时  $F_2(K_1) \approx F_3(K_1)$ . 由于  $K_1$  与  $K_{2,3}$  非常接近, 所以显示了很好的收敛行为(参见图3). 一般来说,  $F_1$  常常比  $F_2, F_3$  大, 所以扫描找聚点至少要算到4级才好判

定几个交点中那一个为聚点。考虑到变分法在多数情况下给出了较好的结果, 我们可以认定, 最靠近一级自由能极小处的交点应选为聚点, 这样, 扫描只需算到三级近似。

从两个办法的比较可以看出, 扫描是一种经验性的判定方法, 其计算量较大, 但可以找到收敛最快的参数值; 而一级变分条件理论上具有凸性不等式为依据, 与最快收敛的参数值很接近, 逐一代入高级近似可直接逼近收敛结果而免除大量扫描计算。把两者结合只扫描到三级近似将是一种迅速有效的定参数的方法。

### 参 考 文 献

- [1] B. Svetitsky, *Phys. Rep.*, **132**(1986), 1.
- [2] X. T. Zheng and C.-I Tan, *Chinese Phys. Lett.*, **5**(1988), 457. C.-I Tan and X. T. Zheng, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 623.
- [3] 郑希特, 刘备书, *高能物理与核物理*, **14**(1990), 892.
- [4] X. T. Zheng, C.-I Tan and T. L. Chen, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2843.
- [5] W. Kerler, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1906.  
W. Kerler and L. Schulke, *Phys. Lett.*, **B201**(1988), 123.
- [6] 王杰、谭祖国、郑希特, *高能物理与核物理*, **12**(1988), 329.
- [7] N. Bilic, H. Gansterer and S. Sanielevici, *Phys. Lett.*, **B198**(1987), 35.

## Calculation on $U(1)$ Lattice Gauge Theory at Finite Temperature

ZHENG XITE

(Department of Physics, Chengdu University of Science and Technology, 610065)

REN XUEZAO

(Department of Physics, Xichang Teacher's College, Sichuan, 615022)

### ABSTRACT

The order parameter  $\langle L \rangle$  for the  $U(1)$  lattice gauge model at finite temperature with  $N_\tau=1$  is calculated by using the variational-cumulant expansion method. The result is in agreement with the Monte Carlo simulations. The specific simplification in the case of  $N_\tau=1$  is discussed. The relationship between the variational method and the accumulation point method for determining the parameters introduced into the cumulant expansion is clarified.