

## 独立元格试探作用量对3维 $SU(2)$ 格点规范理论相结构的变分研究\*

刘金明 官蒂

(中山大学物理系, 广州 510275)

### 摘 要

应用独立元格试探作用量对3维  $SU(2)$  格点规范理论的相结构作了变分计算, 所得内能曲线是光滑的, 显示理论的禁闭性质. 此计算改进了应用独立链试探作用量作变分累积展开方法所得的结果.

格点规范理论<sup>[1]</sup>已成为研究强相互作用的主要非微扰方法.  $SU(2)$  群规范场的相结构是最早也是最广泛研究的问题之一. Creutz 首先应用 Monte Carlo 方法成功地研究了  $SU(2)$  规范场的相结构<sup>[2]</sup>. 在解析计算方面, 平均场方法<sup>[3,4]</sup>, 变分法<sup>[4,5]</sup>和变分累积展开方法<sup>[6-9]</sup>都被应用于研究格点规范场的相结构. 文献[9,8]应用变分累积展开法计算  $SU(2)$  规范场的元格内能分别到三级和四级修正项, 在强耦合区和弱耦合区都得到相当好的结果, 但在过渡区的衔接仍有待改进. 主要原因是采用了独立链试探作用量. 本文采用另一种试探作用量——独立元格试探作用量, 用单纯变分法计算3维  $SU(2)$  群格点规范场的元格内能, 改进了上述的计算, 所得内能曲线光滑, 没有相变, 与现有理论预言一致. 相应的近似自由能也比独立链试探作用量所得低得多, 表明它更接近系统的实际自由能, 因而所得内能曲线更接近实际的内能值. 另一方面此近似自由能可应用于3+1维哈密顿量形式格点规范理论中计算变分态模的很好近似, 从而有可能应用于计算胶球质量<sup>[10]</sup>.

$SU(2)$  群格点规范场的 Wilson 作用量为

$$S = \frac{\beta}{4} \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^\dagger), \beta = 4/g^2. \quad (1)$$

配分函数为

$$Z = e^{-W} = \int DU_i e^S, DU_i \equiv \prod_i dU_i. \quad (2)$$

式中,  $W$  为自由能,  $U_i$  为链  $l$  上的群元素叫链变量,  $U_p$  为元格  $p$  上的4个链变量的乘积叫元格变量. 引入能严格计算的试探作用量  $S_0(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z}$  为变分参数, 令:

本文1991年10月4日收到.

\* 此项研究得到国家自然科学基金和中山大学高等学术研究中心基金会资助.

$$Z_0 = \int DU_l e^{S_0}, \quad (3)$$

利用凸性不等式得

$$W \leq W_{\text{eff}}, \quad W_{\text{eff}} = -\ln Z_0 - \langle S - S_0 \rangle_0, \quad (4)$$

$W_{\text{eff}}$  叫近似自由能, 式中的参数  $z$  由自由能极小条件确定:

$$\frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{\text{eff}}}{\partial z^2} > 0. \quad (5)$$

序参量为平均元格内能  $E_p$ .

$$E_p = \frac{1}{N_p} \left\langle \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{2\text{tr}1} \text{tr}(U_p + U_p^+) \right] \right\rangle \simeq 1 + \frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial \beta}, \quad (6)$$

式中  $N_p$  为元格总数,  $W_{\text{eff}} = W_{\text{eff}}/N_p$  为近似自由能密度. 从  $E_p \sim \beta$  曲线, 就可讨论系统的相结构.

常用的最简单的试探作用量  $S_0$  为以下的独立链试探作用量

$$S_0 = \frac{z}{4} \sum_l \text{tr}(U_l + U_l^+). \quad (7)$$

我们作链变量  $U_l$  到元格变量  $U_p$  的变数变换, 积分元  $DU_l$  变换到积分元  $DU_p$  时要乘上一个 Jacobi 行列式. 可以证明, 此行列式等于格点 Bianchi 恒等式的乘积. 在 4 维时空为 4 种立方体的 Bianchi 恒等式的乘积, 目前尚未能具体解出. 对于 3 维时空, 则只有一种立方体, 此恒等式可以具体解出, 从而可将配分函数完全用对于元格变量的积分写出. 以下具体讨论 3 维  $SU(2)$  格点规范场. 以 0, 1, 2 分别记时间、 $x$  和  $y$  方向, 在  $\mu\nu(\mu, \nu = 0, 1, 2)$  平面上的元格变量分别记为  $U_{01}(ixy)$ ,  $U_{02}(ixy)$  和  $U_{12}(ixy)$ . 将 Bianchi 恒等式积分后得<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} Z &= \int DU_{01} DU_{02} DU_{12}(t_0) e^S, \quad (8) \\ S &= \frac{\beta}{4} \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^+) = \frac{\beta}{4} \sum_{ixy} \text{tr}(U_{01} + U_{02} + U_{12} + U_{01}^+ + U_{02}^+ + U_{12}^+) \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{ixy} \text{tr}(U_{01}(ixy) + U_{02}(ixy)) + \frac{\beta}{2} \sum_{xy} \text{tr} U_{12}(t_0 xy) \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{y \\ t_0}} \text{tr} U_{12}(ixy), \quad (9) \end{aligned}$$

式中,

$$DU_{01} = \prod_{ixy} dU_{01}(ixy), \quad DU_{02} = \prod_{ixy} dU_{02}(ixy), \quad DU_{12}(t_0) = \prod_{xy} dU_{12}(t_0 xy),$$

作用量的最后式子应用了  $SU(2)$  群的性质:  $\text{tr}(U + U^+) = 2\text{tr}U$ .

从链变量  $U_0, U_1, U_2$  变换到元格变量  $U_{01}, U_{02}, U_{12}$  时, 采用了“路径规范”. 通常取最大值的点  $(t_0 x_0 y_0)$  为固定“路径规范”的参考点, 取

$$U_0(ixy) = U_2(t_0 xy) = U_1(t_0 xy_0) = 1, \quad (10)$$

这样, 新的独立变量为元格变量  $U_{01}(ixy), U_{02}(ixy)$  和  $U_{12}(t_0 xy)$ . 而  $t \neq t_0$  的类空元格  $U_{12}(ixy)$  不是独立变量, 要用上述独立元格变量表示为<sup>[11]</sup>

$$U_{12}(txy) = V_{01}^+(txy)V_{12}(t_0xy)V_{02}^+(tx+1y)V_{12}^+(t_0xy+1) \cdot V_{01}(txy+1)V_{02}(txy), \quad (11)$$

式中

$$V_{01}^+(txy) = \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{01}^+(t'xy), \quad V_{02}^+(txy) = \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{02}^+(t'xy), \quad V_{12}(t_0xy) = \prod_{y'=y}^{y_0-1} U_{12}(t_0xy)$$

所以, 变换后的作用量  $S$  虽然形式上仍是典型的 Wilson 作用量, 但在配分函数  $Z = (8)$  的积分中,  $S = (9)$  的前两项是没有耦合的, 各元格间的耦合都集中到最后一项对  $t \approx t_0$  的类空元格的求和中. 我们未能计算如此复杂的积分 (8) 式. 如果只取独立的元格变量之和作为试探作用量  $S_1$ , 即

$$S_1 = \frac{z}{2} \sum_{txy} \text{tr}(U_{01} + U_{02}) + \frac{z}{2} \sum_{xy} \text{tr}U_{12}(t_0xy), \quad (12)$$

式中  $z$  为变分参数, 由自由能极小条件 (5) 确定, 称之为独立元格试探作用量, 则相应的试探配分函数  $Z_1$  可以准确计算. 试探作用量  $S_1$  实际上是对系统的作用量  $S$  作截断近似, 只取  $S = (9)$  中没有耦合的前两项, 完全忽略了元格间耦合的最后一项. 这种取法与独立链试探作用量  $S_0$  只取各独立链之和完全忽略各链的耦合类似. 实际计算表明, 作为试探作用量, 以独立元格变量为基点的  $S_1$  比以独立链为基点的  $S_0$  给出更好的结果.  $Z_1$  的值为

$$Z_1 = \int DU_{01}DU_{02}DU_{12}(t_0)e^{S_1} = z_0^{N_F}, \quad (13)$$

$$z_0 = \int dU e^{\frac{z}{2}\text{tr}U} = \frac{2I_1(z)}{z}, \quad (14)$$

式中  $N_F \approx 2N_0N_1N_2$  为独立元格变量数,  $N_0, N_1$  和  $N_2$  分别为沿  $t, x$  和  $y$  方向上格点的总数.  $I_1(z)$  为一阶虚宗量贝色尔函数. 近似自由能  $W_{\text{eff}}^{(1)}$  为 (计算过程见附录)

$$W_{\text{eff}}^{(1)} = -N_F \ln z_0 - N_F(\beta - z)y_2 - N_1N_2\beta \frac{y_2^2}{(1-y_2^2)}, \quad (15)$$

式中,  $y_2 = I_2(z)/I_1(z)$ . 在各方向上的格点数都  $\rightarrow \infty$  时, 上式最后一项可以忽略. 代进自由能极小条件 (5), 得变分参数  $z = \beta$ . 于是得近似自由能密度  $W_{\text{eff}}^{(1)}$  和序参量  $E_p^{(1)}$  分别为

$$W_{\text{eff}}^{(1)} = -\ln z_0(\beta), \quad (16)$$

$$E_p^{(1)} = 1 - y_2(\beta). \quad (17)$$

由于缺少 3 维  $SU(2)$  群的 Monte Carlo 计算结果, 我们只和应用独立链试探作用量  $S_0$  的计算结果<sup>[8,9]</sup>作比较. 分别如图 1 和图 2 所示.

我们在图 1 中分别画出  $E_p^{(1)} \sim \beta$  和  $E_p^{(0)}, E_{p,2}^{(0)} \sim \beta$  的函数关系.  $E_p^{(0)}, E_{p,2}^{(0)}$  分别为应用  $S_0$  作单纯变分法和变分累积展开到二级近似所得的内能. 从图中可见  $E_{p,2}^{(0)} \sim \beta$  曲线比  $E_p^{(0)} \sim \beta$  曲线有很大改进, 显著地缩小了在  $\beta_c = 3.35$  附近的跳跃值, 但仍有跳跃, 而计算式子已经十分复杂. 计算到更高级近似时, 可使内能曲线更接近连续, 文献[8]指出计算到 4 级近似时, 在过渡区的行为还会变坏, 所以在低维时空采用独立链试探作用量难以得到满意的结果. 而用独立元格试探作用量所得的内能曲线是光滑的, 显示了不存

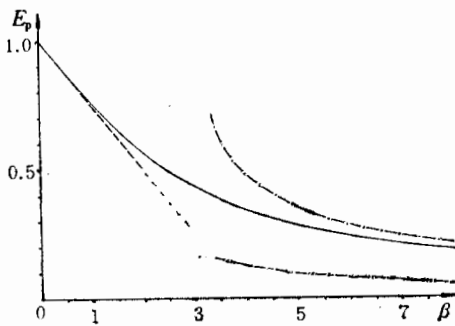


图 1 3 维  $SU(2)$  群平均元格内能  $E_p$ .  
实线为  $S_1$  给出的结果. 虚线为强耦合极限  
- · - 为  $S_0$  给出的结果, - · · - 为  $S_0$  给出  
的变分累积展开到 2 级近似的结果.

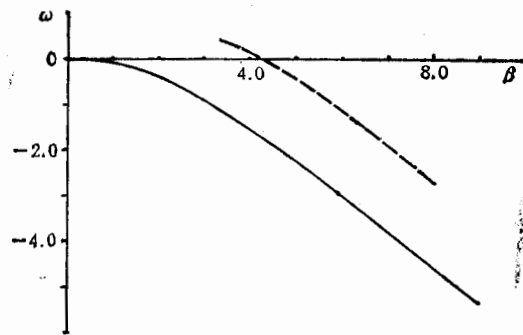


图 2 3 维  $SU(2)$  群的近似自由能密度  
实线为  $S_1$  给出的结果;  
虚线为  $S_0$  给出的结果

在相变的特性. 在强耦合区, 也给出正确的强耦合极限值. 当然由于本文只计算最低级近似, 所以  $\beta$  很大时, 元格间的关联效应增大时, 应进一步考虑更高阶项的贡献, 在此暂不讨论.

在图 2 中, 我们分别画出应用  $S_1$  和  $S_0$  得到的近似自由能密度  $W_{\text{eff}}^{(1)}$  和  $W_{\text{eff}}^{(0)} \sim \beta$  的关系.  $W_{\text{eff}}^{(1)}$  总比  $W_{\text{eff}}^{(0)}$  小得多表明  $W_{\text{eff}}^{(1)}$  更接近实际的自由能密度. 一方面说明了所得内能曲线更好的原因, 一方面也说明  $W_{\text{eff}}^{(1)}$  可以作为自由能  $W$  的很好的近似值, 有可能应用于胶球质量的计算<sup>[10]</sup>.

### 附录: 近似自由能 $W_{\text{eff}}^{(1)} = (15)$ 的推导

应用独立元格试探作用量  $S_1$ , 近似自由能  $W_{\text{eff}}^{(1)}$  为

$$W_{\text{eff}}^{(1)} = -\ln Z_1 - \langle S - S_1 \rangle_1, \quad (\text{A.1})$$

而

$$\begin{aligned} Z_1 \langle S - S_1 \rangle_1 = \int DU_{01} DU_{02} DU_{12}(t_0) e^{S_1} \left\{ \frac{(\beta - z)}{2} \left[ \sum_{i_1 i_2} \text{tr}(U_{01} + U_{02}) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i_1 i_2} \text{tr} U_{12}(t_0) \right] + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{i_1 i_2 \\ i_1 i_2}} \text{tr} U_{12}(ixy) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

以上积分可分为两项:

$$\begin{aligned} \text{第一项} &= \int DU_{01} DU_{02} DU_{12}(t_0) e^{S_1} \frac{(\beta - z)}{2} \left[ \sum_{i_1 i_2} \text{tr}(U_{01} + U_{02}) + \sum_{i_1 i_2} \text{tr} U_{12}(t_0) \right] \\ &= (\beta - z) N_F z_0^{N_F} \left( \frac{1}{z_0} \frac{\partial z_0}{\partial z} \right) = (\beta - z) N_F z_0^{N_F} y_2, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

式中,  $y_2 = I_2(z)/I_1(z)$  第二项为

$$\begin{aligned} \text{第二项} &= \int DU_{01} DU_{02} DU_{12}(t_0) e^{S_1} \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{i_1 i_2 \\ i_1 i_2}} \text{tr} U_{12}(ixy) \\ &= \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{r=1}^{N_0} \int DU_{01} DU_{12} DU_{12}(t_0) \frac{\beta}{2} e^{S_1} \text{tr} U_{12}(t_0 - T, N_1 - n_1, N_2 - n_2), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

式中为方便, 设格点的格距  $a = 1$ , 并取  $t_0 = N_0$ ,  $t = t_0 - T$ ,  $x = N_1 - n_1$ ,  $y = N_2 - n_2$  注意被积函数中  $U_{12}(t_0 - T, N_1 - n_1, N_2 - n_2)$  不是独立变量, 要用 (11) 式的表达式代进去才能进行积分。典型的被积函数的一项为

$$\begin{aligned}
 & \frac{\beta}{2} e^{\beta_1 t T} U_{12}(t_0 - T, N_1 - n_1, N_2 - n_2) \\
 &= \frac{\beta}{2} e^{\beta_1 U_{01}^+ t_0 t_1} (t_0 - T, N_1 - n_1, N_2 - n_2) U_{01}^+ t_1 t_2 (t_0 - T + 1, N_1 - n_1, N_2 - n_2) \\
 & \quad \dots U_{01}^+ t_{T-1} t_T (t_0 - 1, N_1 - n_1, N_2 - n_2) U_{12} t T t_1 (t_0, N_1 - n_1, N_2 - n_2) \cdot \\
 & \quad U_{12}^! t_2 (t_0, N_1 - n_1, N_2 - n_2 + 1) U_{12}^{!n_2-1} t_1 (t_0, N_1 - n_1, N_2 - n_2 + 1) \\
 & \quad U_{12}^{!j_2} (t_0, N_1 - n_1, N_2 - n_2 + 2) U_{12}^{!n_2-2} t_1 (t_0, N_1 - n_1, N_2 - n_2 + 2) \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad U_{12}^{!n_2-2} t_1 (t_0, N_1 - n_1, N_2 - 2) U_{12}^+ t_1 t_2 (t_0, N_1 - n_1, N_2 - 2) \\
 & \quad U_{12}^{!n_2-1} t_1 (t_0, N_1 - n_1, N_2 - 1) U_{12}^+ t T t_1 (t_0, N_1 - n_1, N_2 - 1) \\
 & U_{02}^+ t_2 t_1 (t_0 - T, N_1 - n_1 + 1, N_2 - n_2) U_{02}^+ t_1 t_2 (t_0 - T + 1, N_1 - n_1 + 1, N_2 - n_2) \\
 & \quad \dots U_{02}^+ t_{T-1} t_T (t_0 - 1, N_1 - n_1 + 1, N_2 - n_2) \\
 & \quad \cdot U_{01}^+ t_2 (t_0 - 1, N_1 - n_1, N_2 - n_2 + 1) \dots U_{01}^+ t T (t_0 - T, N_1 - n_1, N_2 - n_2 \\
 & \quad + 1) U_{02}^+ t_2 (t_0 - 1, N_1 - n_1, N_2 - n_2) \dots U_{02}^+ t_0 (t_0 - T, N_1 - n_1, N_2 - n_2) \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

式中, 总共有  $(2N_2 + 4T - 1)$  个独立元格变量的连乘。为便于积分, 已将具有相同宗量的类空元格  $U_{12}$  和  $U_{01}^+$  列在同一行。  $4T$  个类时元格变量  $U_{01}$ ,  $U_{01}^+$ ,  $U_{02}$  和  $U_{02}^+$  的宗量和一个类空元格变量  $U_{12}(t_0, N_1 - n_1, N_2 - n_2)$  的宗量各不相同, 应用  $SU(2)$  群的积分公式

$$\int dU e^{\frac{z}{2} t U} U_{ij} = \int dU e^{\frac{z}{2} t U} U_{ij}^+ = V \delta_{ij}, \quad V = \frac{2I_2(z)}{z}, \quad (A.6)$$

这部分积分贡献因子

$$V^{4T+1} \delta_{m_1 i_1} \delta_{i_2 n_2} k_T. \quad (A.7)$$

应用另一个  $SU(2)$  群的积分公式

$$\begin{aligned}
 & \int dU e^{\frac{z}{2} t U} U_{ij} U_{\alpha\beta}^+ = A \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + B \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}, \\
 & A = \frac{2I_2(z)}{z}, \quad B = \frac{4I_2(z)}{z^2}, \quad A + 2B = z_0 = \frac{2I_1(z)}{z}, \quad (A.8)
 \end{aligned}$$

可得宗量分别相同的  $(n_2 - 1)$  对  $U_{12} U_{12}^+$  因子的积分贡献因子

$$\begin{aligned}
 & (A \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 n_2 - 1} m_1 + B \delta_{i_1 m_1} \delta_{i_2 l_{n_2 - 1}}) (A \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_3 n_2 - 2} l_{n_2 - 1} + B \delta_{i_2 l_{n_2 - 1}} \delta_{i_3 l_{n_2 - 2}}) \dots \\
 & \dots (A \delta_{i_{n_2 - 1} j_{n_2}} \delta_{j_{n_2} l_1} + B \delta_{i_{n_2 - 1} l_1} \delta_{i_{n_2} k_T}). \quad (A.9)
 \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 & \delta_{m_1 i_1} (A \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 n_2 - 1} m_1 + B \delta_{i_1 m_1} \delta_{i_2 l_{n_2 - 1}}) \\
 &= A \delta_{j_2 > i_{n_2 - 1}} + 2B \delta_{j_2, l_{n_2 - 1}} = z_0 \delta_{j_2, l_{n_2 - 1}}, \\
 & \delta_{j_2 l_{n_2 - 1}} (A \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_3 n_2 - 2} l_{n_2 - 1} + B \delta_{i_2 l_{n_2 - 1}} \delta_{i_3 l_{n_2 - 2}}) \\
 &= A \delta_{j_3, l_{n_2 - 2}} + 2B \delta_{j_3, l_{n_2 - 2}} = z_0 \delta_{j_3, l_{n_2 - 2}}.
 \end{aligned}$$

所以 (A.7) 和 (A.9) 连乘之后给出

$$\beta z_0^N y_2^{4T+1}, \quad (A.10)$$

上式应用了等式  $V/z_0 = y_2$ , 对所有的项求和, 使得

$$\text{第二项} = \beta N_1 N_2 z_0^N \frac{y_2^5}{(1 - y_2^4)}. \quad (A.11)$$

将 (A.3) 和 (A.11) 相加便得  $W_{ii}^{(1)} = (15)$ .

### 参 考 文 献

- [1] K. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
- [2] M. Creutz, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 553; **45**(1980), 313; *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2308.
- [3] R. Balian, J. Drouffe, C. Itzykson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3376; **D11**(1975), 2089, 2104.
- [4] E. Brezin, J. Drouffe, *Nucl. Phys.*, **B200**(1982), 93.
- [5] Zheng Xi-ti, Chung-I Tan, Chen Tian-lun, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2843.
- [6] T. C. Hsien, X. H. He, Y. S. Song, *Phys. Lett.*, **153B**(1985), 417.
- [7] X. T. Zheng, T. L. Chen, D. C. Xian, *Phys. Lett.*, **154B**(1985), 166.
- [8] X. T. Zheng, Z. G. Tan, J. Wang, *Nucl. Phys.*, **B287**(1987), 171.
- [9] 吴济民, 赵佩英, *高能物理与核物理*, **10**(1986), 297.
- [10] Guo Shuohong, Zheng Weihong, Liu Jinming, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 2591.
- [11] G. Batrouni, *Nucl. Phys.*, **B208**(1982), 467.

## Variational Study of 3-Dimensional $SU(2)$ Lattice Gauge Theory with Independent Plaquette Trial Action

LIU JINMING GONG DI  
(Zhongshan University, Guangzhou)

### ABSTRACT

The phase structure of 3-dimensional  $SU(2)$  lattice gauge theory is studied using variational method with an independent plaquette trial action. The mean-plaquette internal energy  $E_P \sim \beta$  curve is smooth, which shows only one confining phase, and is better than that given by independent link trial action.