

# FL 非拓扑孤子模型的孤子星 及其高温行为

熊和金 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所, 武汉 430070)

## 摘 要

本文讨论了基于 FL 非拓扑孤子模型的孤子星形成的可能性及其高温行为。发现可以存在一种冷的、稳定的、球对称的孤子位形——FL 孤子星,且必需  $W > 3B$ 。这种 FL 孤子星在高温条件下将发生孤子袋消失的相变,但仍可能存在于某种天体位形。

## 一、引 言

粒子物理的进展表明,非线性和相干性在  $10^{-13}$ — $10^{-17}$  cm 的尺度上有重要的意义。例如夸克禁闭、Higgs 机制等都与此相关。所有这类现象都可以有效地用唯象标量场描写。T. D. Lee 指出<sup>[1]</sup>,这种相干现象能够累积起来,以致展延到宏观尺度甚至宇观尺度,从而有可能从粒子物理的角度来解释一系列的天体现象和宇宙现象。近年来,这种观点颇受重视。Boson 星理论<sup>[2]</sup>、宇宙弦理论<sup>[3]</sup>和非拓扑孤子星理论<sup>[4]</sup>都是在这种背景下被提出来的。

本文将讨论一种孤子星模型。

众所周知,对于由普通物质构成的天体,当它的核燃烧完后,如果它的质量大于5个太阳质量,则星体不稳定,它将历经一个不可逆的过程。这里有两种可能的结局:其一,星体抛出部分质量后演化为中子星或白矮星;其二,坍缩为黑洞。

1987年,T. D. Lee 等人基于粒子物理中的非拓扑孤子模型,指出理论上存在一种冷的、稳定的、大质量的相干态位形——孤子星。这种星体的质量上限甚至可达  $10^{15}M_{\odot}$ 。显然,这是一种十分新颖的天体起源观。

文献[1]建立了孤子星理论的一般性框架,而未具体涉及基本的相互作用类型,本文将这里的基本相互作用理解为 QCD,论证了基于 FL 非拓扑孤子模型的孤子星形成的可能性,也就是说,探讨由强力和引力共同作用而形成天体的可能。发现在一定的条件下,的确可以形成孤子星(简称 FL 孤子星)。

1989年,苏汝铿等人<sup>[4]</sup>指出,如果孤子星存在于早期宇宙,那么它们将是宇宙非均匀

化的“原初种子”的一类好的候选者。显然,这时一个有兴趣的问题是讨论孤子星在早期宇宙这样一个热环境中的热力学。他们率先考察了标量孤子星的热行为<sup>[4]</sup>,发现在高温下标量孤子星会消失。受此工作的启发,本文的另一个内容是考察 FL 孤子星的高温行为。我们发现,在高温下,FL 孤子星发生孤子袋消失的相变,但仍可能存在某种星体位形。

本文第二节给出了我们所用模型的基本框架;第三节讨论了 FL 孤子星的形成;第四节考察了 FL 孤子星的高温行为;第五节是结论和讨论。

## 二、模型的基本框架

由 Friedberg-Lee 拉氏量描写的模型<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{\psi\sigma} + \mathcal{L}_\sigma, \\ \mathcal{L}_\psi &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi, \\ \mathcal{L}_{\psi\sigma} &= -f \sigma \bar{\psi} \psi, \\ U(\sigma) &= \frac{a}{2} \sigma^2 + \frac{b}{6} \sigma^3 + \frac{c}{24} \sigma^4 + B. \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中  $\psi$  为费米场,  $\sigma$  为孤子场,  $U(\sigma)$  是孤子自能项。(2.1)式具有非拓扑孤子解,其基本特征是  $\sigma$  场提供了孤子袋, fermion 分布于袋内。该模型给出了强子结构的一种直观描述。

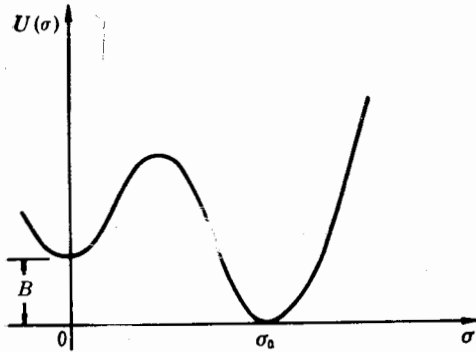


图1 孤子自能  $U(\sigma)$ 。这里  $B$  为袋常数

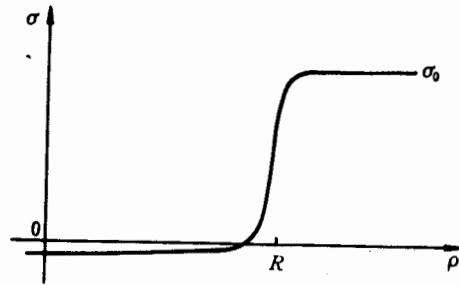


图2 孤子场  $\sigma$  与半径  $\rho$  的关系

$$\begin{cases} \text{袋内 } 0 \leq \rho < R - 0(\mu^{-1}), \sigma = \sigma_r \simeq 0, U(0) = B, \text{ 微扰真空;} \\ \text{袋表面 } R - 0(\mu^{-1}) < \rho < R + 0(\mu^{-1}), \sigma(\rho), U(\sigma); \\ \text{袋外 } \rho > R + 0(\mu^{-1}), \sigma = \sigma_0, U(\sigma_0) = 0, \text{ 物理真空.} \end{cases} \quad (2.2)$$

现在要问,若微扰真空内 fermion 数密度足够高, fermion 总数足够大,自引力不可忽略,情况如何?显然,这时拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{\sigma\psi} + \mathcal{L}_G, \\ \mathcal{L}_\psi &= \frac{1}{2} (D_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\sigma &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - U(\sigma), \\
 \mathcal{L}_{\sigma\psi} &= -f\sigma\bar{\psi}\psi, \\
 \mathcal{L}_G &= -R/16\pi G, \\
 U(\sigma) &= \frac{a}{2} \sigma^2 + \frac{b}{6} \sigma^3 + \frac{c}{24} \sigma^4 + B.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

这里仅限于讨论系统静态,球对称情形.采用文献[1]所提供的坐标系统和度规,得到在球坐标系下的运动方程

$$\begin{aligned}
 e^{-2\bar{v}} \left[ \frac{d^2\sigma}{d\rho^2} + \left( \frac{2}{\rho} + \frac{d\mu}{d\rho} - \frac{d\bar{v}}{d\rho} \right) \frac{d\sigma}{d\rho} \right] + f\bar{\psi}\psi - \frac{dU}{d\sigma} &= 0, \\
 e^{-2\bar{v}} - 1 - 2e^{-2\bar{v}} \rho \frac{d\bar{v}}{d\rho} &= -8\pi G \rho^2 (W + V + U), \\
 e^{-2\bar{v}} - 1 + 2e^{-2\bar{v}} \rho \frac{d\mu}{d\rho} &= 8\pi G \rho^2 (T + V - U), \\
 e^{-2\bar{v}} \left[ \rho^2 \frac{d^2\mu}{d\rho^2} + \left( 1 + \rho \frac{d\mu}{d\rho} \right) \rho \frac{d}{d\rho} (\mu - \bar{v}) \right] &= 8\pi G \rho^2 (T - V - U).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中对于 fermion 场的处理采用 Thomas-Fermi 近似,  $W$  是在这一近似下微扰真空内的 fermion 能量密度;  $T$  为物质能量——动量张量的空间分量的负值; 而

$$V = \frac{1}{2} e^{-2\bar{v}} \left[ \frac{d\sigma}{d\rho} \right]^2. \tag{2.5}$$

模型(2.3)具有守恒 fermion 流

$$J_{;\mu}^\mu = 0, \tag{2.6a}$$

$$J^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi; \tag{2.6b}$$

和守恒的总 fermion 数

$$N = \int \sqrt{-g} d^4x J^0. \tag{2.7}$$

问题是,模型(2.3)还具有孤子解吗?若有,质量和半径各为多少?

对这一问题的回答原则上可通过求解耦合方程组(2.4)得到.但注意到,本模型无引力时有孤子解,且总 Fermion 数守恒,符合 T. D. Lee 条件 (i),(ii)<sup>[1]</sup>,因而模型(2.3)应该具有孤子解.

在本文中,我采用 T. D. Lee 近似,同时假定微扰真空内 Fermion 能量密度均匀分布,具体论证了模型(2.3)确有孤子解——FL 孤子星,并且发现必需  $W > 3B$ ; 然后,在适当的近似下讨论了 FL 孤子星的高温行为.

### 三、FL 孤子星

本节论证模型(2.3)具有天体位形解,并且它就是 FL 孤子星.

#### 3.1 引力场考察

采用 T. D. Lee 近似<sup>[3]</sup>: 用 Thomas-Fermi 近似处理 fermion, 并令微扰真空内

fermion 有效质量为零, 即  $m + f\sigma_s = 0$ , 同时认为 (2.2) 式成立. 重复文献 [1] 对 fermion 孤子星的类似处理, 可得微扰真空内 ( $\rho < R - O(\mu^{-1})$ ) 引力场方程

$$\begin{aligned} 2\rho \frac{d\bar{u}}{d\rho} &= [e^{-4\bar{u}}\rho^2(1+\iota) - 1]e^{2\bar{v}} + 1, \\ 2\rho \frac{d\bar{v}}{d\rho} &= \left[ e^{-4\bar{u}}\rho^2\left(\frac{1}{3} - \iota\right) + 1 \right]e^{2\bar{v}} - 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

这里  $\iota \equiv B/W$ , 且假定  $W$  在微扰真空内均匀分布.

用  $(x, y)$  变量<sup>[1]</sup>描写引力场

$$\begin{cases} \dot{x} = (2+P)xy + \frac{1}{2}(3+P)y^2 - x^2 - \frac{1}{2}(3+P), \\ \dot{y} = -Pxy - \frac{1}{2}(1+P)y^2 + \frac{1}{2}(1+P), \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $P \equiv (3+3\iota)/(1-3\iota)$ .

(3.2)式给出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2Pxy - (1+P)y^2 + (1+P)}{2(2+P)xy + (3+P)y^2 - 2x^2 - (3+P)}. \quad (3.3)$$

它具有初值

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -(1-\iota)/2(1+\iota). \quad (3.4)$$

微分方程(3.4)具有两个临界点:

(i)  $x=0, y=1$ , 表示  $\rho=0$  点引力场为零;

(ii)  $x = \frac{1}{(P^2+6P+1)^{1/2}}, y = \frac{P+1}{(P^2+6P+1)^{1/2}}$ , 表示星体内表面附近的引力场.

场.

临界点(ii)的存在对孤子星的形成是必需的, 且由于引力场为实数场, 因而要求  $(x, y)$  变量为正实数, 即要求

$$\begin{cases} P^2 + 6P + 1 > 0, \\ P + 1 > 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

另外, 显然 fermion 能量密度非负,

$$\iota \equiv B/W \geq 0. \quad (3.6)$$

这样就有

$$P \geq 3 \text{ 或 } 0 \leq \iota < \frac{1}{3}, \quad (3.7)$$

即

$$W > 3B. \quad (3.8)$$

物理上, (3.8) 表示为形成稳定的天体, 微扰真空内 fermion 能量密度必需充分地大. 事实上, 物质松散系统的自引力是十分微弱的. 为形成稳定的天体位形, 物质的高密度是必需的, 这时自引力才能主导系统的动力学行为. 这样, 我们对 FL 孤子星的形成找

到了一个附加条件:  $W > 3B$ .

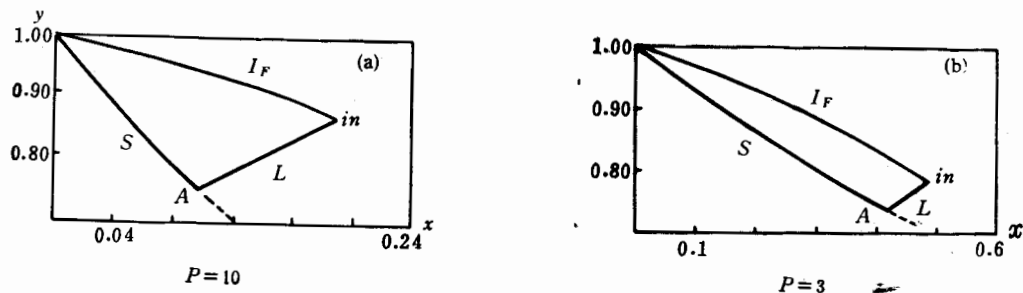


图3 FL 孤子星的  $(x, y)$  轨迹

下面给出描写全空间引力场位形的  $(x, y)$  轨道<sup>[1]</sup>. 它由三部分组成:

$I_F$ : (3.3), (3.4) 的积分曲线(微扰真空),

$L$ :  $x - x_{in} = y - y_{in}$ , 其中  $(x_{in}, y_{in})$  即临界点(ii)(表面);

$S$ :  $2xy + y^2 - 1 = 0$  (物理真空).

$(x, y)$  轨迹显示了: (1) 要形成天体, 必需  $P \geq 3$ , 即  $W > 3B$ ; (2)  $P$  越大, 点  $A$ , 点  $in$  越靠近点  $(0, 1)$ , 物理上这表示, 微扰真空内 fermion 能量密度越小, 引力场就越弱.

上面通过对引力场的考察, 发现在  $W > 3B$  的条件下, 模型具有天体位形. 下面进一步通过考察  $\sigma$  场位形, 论证它是孤子星.

### 3.2 表面附近的 $\sigma$ 场

类似文献[3]的处理, 在表面附近 ( $\rho = R + 0(\mu^{-1})$ ), 假定 fermion 出现的几率近似为零, 即  $\bar{\psi}\psi = 0$ , 同时  $d\sigma/d\rho \ll 1$ , 得表面附近的  $\sigma$  场方程

$$e^{-2\bar{v}}, \frac{d^2\sigma}{d\rho^2} - \frac{dU}{d\sigma} = 0, \quad (3.9)$$

其中  $e^{\bar{v}} = e^{\bar{v}}|_{\rho=R}$ , 反映了引力效应.

作标度变换

$$\rho \rightarrow \bar{\rho} \equiv \rho e^{\bar{v}}, \quad (3.10)$$

重写(3.9)为

$$\frac{d^2\sigma}{d\bar{\rho}^2} - \frac{dU}{d\sigma} = 0. \quad (3.11)$$

形式上, (3.11) 和无引力时孤子位形方程是一样的, 其解的特征是已知的 (见图 2). 这样, (3.9) 也存在孤子解, 说明模型(2.3) 得到的天体位形为孤子星 (简称 FL 孤子星).

这样, 本节通过对引力场位形的考察和对表面附近 (微扰真空和物理真空的界面区)  $\sigma$  场位形的考察, 论证了 FL 非拓扑孤子模型具有孤子星解. 这种星体本质上是由强作用力和引力共同作用而形成的, 是模型(2.1) 的非线性性和相干性在宇宙尺度上的表现.

至于 FL 孤子星的质量和半径, 已有系统方法计算<sup>[1]</sup>, 这里不准备讨论它们.

## 四、FL 孤子星的热力学行为

沿着宇宙时标往前, 宇宙温度越来越高. 在这样一个热环境中 FL 孤子星的行为如何, 是值得思考的.

如何讨论 FL 孤子星的热力学? 对于这里遇到的宏观静态自引力系统, 引力场无热激发, 可视为背景场, 只有物质场有热激发. 对 Einstein 场方程取 Gibbs 平均, 得

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\beta}. \quad (4.1)$$

对孤子场方程(3.9)也取 Gibbs 平均, 它们作为讨论 FL 孤子星热力学的基础.

### 4.1 有限温度下的引力场

对引力源  $T_{\mu\nu}$  的贡献来自 fermion 场和孤子场. 对 Einstein 场方程取 Gibbs 平均等价于这样一种替换: 通过将势  $U(\sigma)$  换为相应的热有效势  $U(\sigma, T)$  来计入温度对  $\sigma$  场的贡献; 通过引入分布函数

$$n_k = 1/[1 + e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)}] \quad (4.2)$$

替换在 Thomas-Fermi 近似下得到  $W, T$  时所使用的零温 Fermi 分布函数<sup>[1]</sup>, 来计入温度对 fermion 场的激发, 这时仍有

$$\varepsilon_k = [k^2 + (m + f\sigma)^2]^{1/2}. \quad (4.3)$$

应用(4.2), fermion 能量密度  $W$ , fermion 数密度  $\nu$  和非零  $T^{\mu\nu}$  分别为

$$W = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3k n_k \varepsilon_k, \quad (4.4)$$

$$\nu = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3k n_k, \quad (4.5)$$

$$T^r_r = T^a_a = T^b_b = T^p_p = -T, \quad (4.6)$$

$$T^i_i = W, \quad (4.7)$$

$$T = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3k n_k \frac{k^2}{3\varepsilon_k} = \frac{1}{12\pi^2} k_{FT}^4, \quad (4.8)$$

其中

$$k_{FT}^4 \equiv k_F^4 + 2\pi^2 (kT)^2 k_F^2 + \frac{7\pi}{30} (kT)^4. \quad (4.9)$$

这里  $k_F, k$  分别为零温 fermi 动量和 Boltzman 常数.

再作如下假设: 在有限温度下, 微扰真空内 fermion 有效质量近似为零,  $(m + f\sigma)_\beta = 0$ , 且微扰真空的温度均匀, 这样, 在微扰真空内

$$\frac{dU(\sigma, T)}{d\sigma} = V = U(\sigma, T) = 0. \quad (4.10)$$

于是

$$3T = W = k_{FT}^4/4\pi^2, \quad (4.11)$$

$$e^\mu \cdot k_{FT} = \omega_{FT} \text{ (与坐标无关)}. \quad (4.12)$$

得到在上述近似下计入热效应的引力场方程:

$$\begin{cases} 2\rho \frac{d\bar{v}}{d\rho} = [G\omega_{\text{FT}}^4 e^{-4\mu} D^2 \rho^2 (1 + \epsilon) - 1] e^{2\bar{v}} + 1, \\ 2\rho \frac{d\bar{\mu}}{d\rho} = \left[ G\omega_{\text{FT}}^4 e^{-4\mu} D^2 \rho^2 \left( \frac{1}{3} - \epsilon \right) + 1 \right] e^{2\bar{v}} - 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

这里  $D$  是不计自引力时, 有限温度下  $\sigma$  场与零温下  $\sigma$  场的一个拟合比例系数,

$$\sigma(T) = \begin{cases} \sigma_0/|D|, & \rho > R + O(\mu^{-1}); \\ D\sigma_v, & \rho < R - O(\mu^{-1}). \end{cases} \quad (4.14)$$

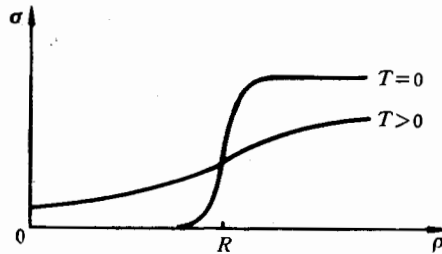


图4 孤子场  $\sigma$  与温度  $T$  的关系

需要指出的是, 在得到(4.13)式时, 已采用了文献[4]类似的论证.

再引入

$$\begin{aligned} e^{-\mu} &\equiv \left( \frac{3}{8\pi^2} \right)^{1/4} \frac{\omega_{\text{FT}}}{(\lambda \mu \sigma_0)^{1/2}} e^{-\mu}, \\ \bar{\rho} &\equiv \lambda^2 \mu \rho |D|, \quad \lambda \equiv 4\sigma_0 (\pi G/3)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

则引力场方程可写为

$$\begin{cases} 2\bar{\rho} \frac{d\bar{v}}{d\bar{\rho}} = [e^{-4\mu} \bar{\rho}^2 (1 + \epsilon) - 1] e^{2\bar{v}} + 1, \\ 2\bar{\rho} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\rho}} = \left[ e^{-4\mu} \bar{\rho}^2 \left( \frac{1}{3} - \epsilon \right) + 1 \right] e^{2\bar{v}} - 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

形式上, (4.16) 就与零温时微扰真空内引力场方程完全一样, 温度效应通过  $\epsilon \equiv B(T)/W(T)$  来计入. 所以, 当用  $(x, y)$  变量描写有限温度引力场时, 基本方程仍有(3.3), (3.4) 的形式. 因而可用(3.3)、(3.4)及  $(x, y)$  轨迹来讨论热效应对引力场的贡献.

由于袋常数  $B(T)$  和 fermion 能量密度  $W(T)$  分别是温度  $T$  的减函数和增函数, 因而  $\epsilon \equiv B(T)/W(T)$ , 并且  $P$  是温度  $T$  的减函数 (对  $0 \leq \epsilon < \frac{1}{3}$ ). 由图3、图4可见, 温度  $T$  越高,  $P$  越小, 引力场越强. 即使在高温条件下, 以致于  $\epsilon = 0$  时, 仍有一个稳定的天体位形存在.

那么, 这种天体还是 FL 孤子星吗? 为了回答这一问题, 必需考察表面附近  $\sigma$  场的热行为.

## 4.2 表面附近 $\sigma$ 场的热力学行为

对表面附近的  $\sigma$  场方程(3.9)取 Gibbs 平均得,

$$e^{-2\bar{v}_s(T)} \frac{d^2\sigma(T)}{d\rho^2} - \frac{dU(\sigma, T)}{d\sigma} = 0, \quad (4.17)$$

这里注意到了温度对引力场的贡献.

对径向坐标作一个与温度有关的标度变换

$$\rho \rightarrow \bar{\rho} \equiv \rho e^{\bar{v}_s(T)}, \quad (4.18)$$

可重写(4.17)为

$$\frac{d^2\sigma(T)}{d\bar{\rho}^2} - \frac{dU(\sigma, T)}{d\sigma} = 0. \quad (4.19)$$

至于  $U(\sigma, T)$ , 可直接将 Linde 方法<sup>[6]</sup>推广到这里的静态自引力系统而求出:

$$U(\sigma, T) = \frac{a}{2} \sigma^2 + \frac{b}{6} \sigma^3 + \frac{c}{24} \sigma^4 + \int d\sigma \left[ \frac{1}{2} \langle \sigma'^2 \rangle_{\beta} (b + c\sigma) + f \langle \bar{\phi} \phi \rangle_{\beta} \right]. \quad (4.20)$$

(4.19), (4.20) 形式上就是平直时空表面附近计入热效应后的  $\sigma$  场方程和热有效势, 它的相结构已有较充分的讨论<sup>[7]</sup>, 这里不同的是径向坐标与温度有关, 但这对相变分析无定性影响. 于是可预计到, FL 孤子星具有一个临界温度  $T_c$ , 在  $T_c$  以下, FL 孤子星存在; 在  $T_c$  以上,  $\sigma$  场的袋状位形发生相变而消失, 结合 4.1 的讨论可知, 这时仍可能存在某种天体.

## 五、结论与讨论

我们发现, FL 非拓扑孤子模型具有稳定的、冷的、球对称的孤子星解——FL 孤子星, 且必需  $W > 3B$ . 本质上, 这种天体是由强力和引力共同维系的, 是非线性性和相干性在大尺度上的表现, 在高温下, FL 孤子星发生相变, 脱去孤子袋而仍可能存在某种天体位形.

显然, 放松本文所采用的若干近似假设, 重新讨论 FL 模型, 是很有意义的; 另外, 完成有关的数值计算是必需的.

作者对刘连寿教授和裘忠平副教授的有益讨论表示感谢.

## 参 考 文 献

- [1] T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3637.  
R. Friedberg, T. D. Lee, Y. Pang, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3640.  
R. Friedberg, T. D. Lee, Y. Pang, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3658.  
T. D. Lee, Y. Pang, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3678.
- [2] R. Ruffini, S. Bonazzola, *Phys. Rev.*, **187**(1969), 1767.
- [3] Y. B. Zeldovich, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **192**(1980), 663.  
A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.*, **46**(1980), 1169.



- [ 4 ] R. K. Su, R. S. Pan, *Phys. Lett.*, **B230**(1989), 99.  
[ 5 ] R. Friedberg, T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 1694; **D16**(1977), 1096; **D18**(1978), 2623.  
[ 6 ] A. D. Linde, *Rep. Prog. Phys.*, **42**(1979), 389.  
[ 7 ] E. K. Wang, J. R. Li, L. S. Liu, *Phys. Rev.*, **D41**(1990), 2288.

## Soliton Star in FL-non-topological Soliton Model and Its Behavior at High Temperature

XIONG HEJIN LI JIARONG

(*Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070*)

### ABSTRACT

In this paper, based on the FL-non-topological soliton model, we discussed the possibility of the formation of the FL-soliton star and its behavior at high temperature. We find that the stable, cold and spherical FL-soliton star can be formed, under the necessary condition  $W > 3B$ . At high temperature, the FL-soliton bag disappears by the phase transition, but there may be some stellar configuration.