第16卷 第5期　　高能物理与核物理　　Vol. 16, No. 5
1992年5月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1992

非幺正 $SU_K(2)$ Wess–Zumino–Witten 模型的关联函数与交叉矩阵

侯伯宇　石康杰　岳瑞宏
（西北大学现代物理所，西安 710069）

摘　　要

本文利用 Feigin-Fuch 方法研究非幺正 $SU_K(2)$ WZW 模型的关联函数，明显地给出结构常数与交叉矩阵，进而得出 modular 矩阵，同时讨论与幺正理论的联系。

一、引　　言

目前，已有许多工作研究非幺正的 $SU_K(2)$ WZW 模型[1-6]，其目的有二方面：从数学上看，具有分数级的 $SU(2)$ Kac-Moody 代数的不可约表示的允许最高权可用自旋 J 表征：

$$2J+1=n-n'(P/P'), \tag{1.1}$$

其中

$$1\leqslant n\leqslant P-1,\ 0\leqslant n'\leqslant P'-1,\ K+2=P/P'.$$

在该允许表示中，存在无限多个奇异矢量．具有与 Virasoro 代数完全退化表示相似的性质[5]．对一个给定的分数级 K，所有允许不可约表示的特征标构成了 modular 群的一个表示，当 $P'=1$ 时，理论退化到幺正 $SU_K(2)$ WZW 模型．从物理上看，幺正性并非物理学的根本要求，例如李-杨[7]奇异的统计模型就是具有非幺正性的物理模型． 此外，根据 GKO 陪集构造，非幺正的 $SU_K(2)$ 还可以联系到非幺正的 Virasoro 理论，即

$$SU_1(2)\otimes SU_K(2)/SU_{K+1}(2). \tag{1.2}$$

很容易求出非幺正 Virasoro 模型的中心项 c 为

$$c=1-\frac{6(P-P')^2}{PP'}. \tag{1.3}$$

事实上，这正是二维规范量子引力理论中的物质场的共形中心[8]．因此，非幺正理论的研究不仅在数学上而且在物理上都显得很重要．

目前的工作全都停留在特征标的水平上．Koh 和 Liu 等人分别计算了该模型的特征标，并完成其分类[1,2]，他们的出发点是特征标构成的配分函数应具有 modular 不变

本文1991年6月11日收到．

性．Mathieu 和 Walton 把 $A_1^{(1)}$ 代数推广到一般的具有分数级的 Kac-Moody 代数并研究其 modular 变换性质[6]．另一方面，Bernard 和 Felder[5] 利用 Boson 化方法研究了非么正 $SU_K(2)$ WZW 模型 Foch 模空间的上同调结构，并讨论了关联函数的表示形式．Mukhi 和 Panda 则是利用特征标的积分表示讨论它与非么正 Virasoro 和么正 $SU(2)$-D-系列的联系[4]．人们知道，在共形场论中，聚合矩阵和关联函数要比聚合代数和 modular 矩阵 S 含有更丰富的信息，从前者可以很方便地推出聚合代数和 modular 矩阵，并且还可以给出结构常数．因此，以关联函数为出发点比以特征标为基础更深刻，因而也十分必要．

在研究么正有理共形场论中，一个行之有效的方法是 Feigin-Fuch 积分，利用该积分表示，我们可方便地构造特征标[9,10]、关联函数[11-13]、交叉矩阵以及量子群对称性[14,15]．因此，本文的动机是利用积分表示，计算非么正的 WZW $SU_K(2)$ 模型的交叉矩阵、算子积系数，从而探讨非么正理论的性质．

本文第二节回顾非么正的 $SU_K(2)$ WZW 的玻色化表示，构造屏蔽算子和关联函数．第三节讨论该模型的交叉矩阵，证明它们就是量子群的 $6j$ 系数．第四节，我们着重研究该理论的关联函数与算子积系数．第五节，我们讨论交叉矩阵与 modular 矩阵 S 之间的关系．

二、玻色化表示

非么正 $SU_K(2)$ WZW 模型实际上是具有分数级的 $A_1^{(1)}$ Kac-Moody 代数的一个实现，其代数为：

$$\begin{aligned}
&[J_n^0, J_m^\pm] = \pm J_{n+m}^\pm,\\
&[J_n^+, J_m^-] = 2J_{n+m}^0 + nK\delta_{n+m,0},\\
&[J_n^0, J_m^0] = \frac{1}{2} nK\delta_{n+m,0},\\
&[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{3K}{2+K}\frac{1}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0},\\
&[L_n, J_m^a] = -mJ_{m+n}^a,\quad a = 0, \pm.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

为了实现(2.1)的代数，我们引入一个具有非平庸边界条件的自由玻色场 φ 和一对零形式与 1 形式的系统 (ω, ω^+)，满足如下关系：

$$\begin{aligned}
&i\partial\varphi(z) = \sum_n a_n z^{-n-1},\quad \omega(z) = \sum \omega_n z^{-n},\quad \omega^+(z) = \sum \omega_n^+ z^{-n-1},\\
&\langle\varphi(z)\varphi(w)\rangle = -\ln(z-w),\quad \langle\omega(z)\omega^+(w)\rangle = \frac{1}{z-w},
\end{aligned}\tag{2.2}$$

则体系的流算子与能动量张量为：

$$\begin{aligned}
&T(z) = -\frac{1}{2}:(\partial_z\varphi(z))^2: - \frac{i}{\sqrt{K+2}}\partial_z^2\varphi - :\omega^+\partial_z\omega:,\\
&J^+(z) = \omega^+(z)\quad J^0(z) = :\omega\omega^+(z): + \gamma i\partial_z\varphi(z),\\
&J^-(z) = -:\omega^2\omega^+(z): - 2\gamma i\partial_z\varphi\omega(z) - K\partial_z\omega(z),
\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$2\gamma^2 = K + 2.$$

很容易证明(2.3)式的算子积的确生成了(2.1)代数. 在积分表示中,一个重要的概念就是屏蔽算子,它必须满足与(2.3)式中的所有流算子的算子积展开式为仅含正则项或所含非正则项为全微分. 满足该条件的算子是:

$$V(z) = :\omega^{+}(z)\exp\{-i/\gamma\varphi(z)\}:, \tag{2.4}$$

(2.4)式定义的屏蔽算子作用于一个不可约表示空间是将这个空间映射到另一个空间. 即

$$V(z): F_J \to F_{J-1}. \tag{2.5}$$

因此我们的工作是利用这些玻色场来构造理论的初场. 根据共形理论的谱

$$h_J = \frac{1}{K+2}(J^2 + J) \tag{2.6}$$

我们可以方便地写出初场

$$_{\mu}V_J(z) = :\omega^{J-\mu}\exp\{iJ/\gamma\varphi(z)\}:, \tag{2.7}$$

其中: $J\text{-}\mu$ = 正整数和零. 不同的μ代表不同的磁量子数, 很显然(2.6)式所表征的初场是 $_JV_J$.

在四点函数中,我们要求它们是 $SU(2)$ 的不变量,因而要对所有的磁量子数进行求和, 同时它们又应该具有单值性. 因此在讨论其 monodromy 变换时, 它们应具有相同的性质[14]. 事实上这一点也可以从任意磁量子数的顶角算子的四点函数的具体形式看出. 因此在第三节讨论其交叉矩阵时,我们仅取一组特定初场的四点函数. 即

$$\begin{aligned}&\Big\langle {}_{\mu}\widetilde{V}_{(mm')}(\infty) \bigvee_{(ll')(ll')}(1) \bigvee_{(rr')(rr')}(z) \bigvee_{(ss')(ss')}(0)\int\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}u_i V(u_i)\Big\rangle \\ &\doteq \int\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}u_i u_i^{-J_{ss'}/\gamma^2}(u_i-1)^{-J_{ll'}/\gamma^2}(u_i-z)^{-J_{rr'}/\gamma^2}\prod_{i,j}(u_i-u_j)^{\frac{1}{\gamma^2}},\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中

$$_{\mu}\widetilde{V}_{(mm')} = :\omega^{J_{mm'}-\mu}\exp\left\{-i\frac{J_{mm'}}{\gamma}\varphi\right\}:,$$

各参数满足:

$$\begin{aligned}&J_{ss'} + J_{rr'} + J_{ll'} - J_{mm'} = n - 1, \\ &\mu = 2J_{mm'} - J_{rr'} - J_{ll'} - J_{ss'}, \\ &J_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2}((\lambda - 1) - \lambda'(K + 2)).\end{aligned} \tag{2.9}$$

由此我们有:

$$n - 1 = \frac{1}{2}\{(s-1) + (l-1) + (\gamma - 1) - (m-1)\}. \tag{2.10}$$

一般的 $SU(2)$ 不变的四点函数我们将在第四节中给出, 以下我们将从(2.8)式出发讨论该模型的交叉矩阵.

三、交叉矩阵与6j符号

在有理共形场论中,共形块都是满足一个高阶微分方程,在 $SU_K(2)$ WZW 模型中,

该高阶方程就是 KZ 方程。因此，对同一方程而言，不同解析区的解是不同的。在(2.8)式中，不同的正则性质的解对应于不同的围道积分。而(2.8)式满足的方程的奇点是 $z=0,1,\infty$，对应的三组正则解分别记为 I_p、$\hat{I}_p$、$\hat{\hat{I}}_p$，具体为：

$$I_p(a,b,c,p,z)=\int_1^\infty\prod_{i=1}^{n-p}\mathrm{d}u_iu_i^\alpha(u_i-1)^\beta(u_i-z)^\delta\int_0^z\prod_{i=n-p+1}^{n-1}\mathrm{d}u_iu_i^\alpha(1-u_i)^\beta(z-u_i)^\delta\times\prod_{i<j}^{n-1}(u_i-u_j)^{2\rho},\tag{3.1}$$

$$\hat{I}_p(a,b,c,p,z)=\int_z^1\prod_{i=1}^{p-1}\mathrm{d}u_iu_i^\alpha(1-u_i)^\beta(u_i-z)^\delta\int_{-\infty}^0\prod_{i=p}^{n-1}\mathrm{d}u_i(-u_i)^\alpha(1-u_i)^\beta(z-u_i)^\delta\times\prod_{i<j}^{n-1}(u_i-u_j)^{2\rho},\tag{3.2}$$

$$\hat{\hat{I}}_\rho(a,b,c,p,z)=\int_z^\infty\prod_{i=1}^{n-p}\mathrm{d}u_iu_i^\alpha(u_i-1)^\beta(u_i-z)^\delta\int_0^1\prod_{i=n-p+1}^{n-1}\mathrm{d}u_iu_i^\alpha(1-u_i)^\beta(z-u_i)^\delta\times\prod_{i<j}(u_i-u_j)^{2\rho},\tag{3.3}$$

其中：$\alpha=-J_{ss'}/\gamma^2$，$\beta=-J_{ll'}/\gamma^2$，$\delta=-J_{rr'}/\gamma^2$，$2\rho=\frac{1}{\gamma^2}$，对上述三系统，其解是线性相关的，定义交叉矩阵 $M^{(1)}$，$M^{(2)}$ 分别为：

$$I_p=\sum_{p'}M_{pp'}^{(1)}\hat{I}_{p'},\tag{3.4a}$$

$$I_p=\sum_{p'}M_{pp'}^{(2)}\hat{\hat{I}}_{p'}.\tag{3.4b}$$

为了计算 $M^{(1)}$，我们引入一积分：

$$\begin{aligned}A(\mu,\nu,\lambda,\sigma)=&\int_{-\infty}^0\prod_{i=1}^{\mu}\mathrm{d}u_i(-u_i)^\alpha(1-u_i)^\beta(z-u_i)^\delta\int_0^z\prod_{i=1+\mu}^{\mu+\nu}\mathrm{d}u_iu_i^\alpha(1-u_i)^\beta(z-u_i)^\delta\\&\times\int_z^1\prod_{i=\mu+\nu+1}^{\mu+\nu+\lambda}\mathrm{d}u_iu_i^\alpha(1-u_i)^\beta(u_i-z)^\delta\\&\times\int_1^\infty\prod_{i=1+\mu+\nu+\lambda}^{\mu+\nu+\lambda+\sigma}\mathrm{d}u_iu_i^\alpha(u_i-1)^\beta(u_i-z)^\delta\times\prod_{i<j}^{\mu+\nu+\lambda+\sigma}(u_i-u_j)^{2\rho}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

根据围道积分的性质，我们可建立下列二等式：

$$\begin{aligned}A(\mu,\nu,\lambda,\sigma)=&A(\mu,\nu-1,\lambda+1,\sigma)\frac{(-1)\mathscr{S}(\beta+(\lambda+\sigma)\rho)}{\mathscr{S}(\beta+\delta+(\nu+2\lambda+\sigma-1)\rho)}\\&+A(\mu+1,\nu-1,\lambda,\sigma)\frac{(-1)\mathscr{S}(\alpha+\beta+\delta+(\mu+\sigma+2\nu+2\lambda-2)\rho)}{\mathscr{S}(\beta+\delta+(\nu+2\lambda+\sigma-1)\rho)},\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}A(\mu,\nu,\lambda,\sigma)=&A(\mu,\nu,\lambda+1,\sigma-1)\frac{\mathscr{S}(\delta+\rho(\nu+\lambda))}{\mathscr{S}(\beta+\delta+(\nu+2\lambda+\sigma-1)\rho)}\\&+A(\mu+1,\nu,\lambda,\sigma-1)\frac{(-1)\mathscr{S}(\alpha+\rho(\nu+\lambda))}{\mathscr{S}(\beta+\delta+(\nu+2\lambda+\sigma-1)\rho)},\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中 $\mathscr{S}(x)=\sin(\pi x)$。

利用公式(3.6)和(3.7)式，我们可将 $(0,z)$ 和 $(1,\infty)$ 上的积分全部变成 $(-\infty,0)$ 和 $(z,1)$ 上的积分，因此有：

$$
\begin{aligned}
I_p(\alpha,\beta,\delta,\rho,z) &= \sum_{p'} \alpha^n_{pp'}(\alpha,\beta,\delta,\rho)\hat{I}_{p'}(\alpha,\beta,\delta,\rho,z) \\
&= \sum_{p'} \Bigg\{ \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu+\nu=p'+1}}^{p} \sum_{\nu=1}^{n-p+1} \prod_{i=0}^{p-\mu-1} \frac{\mathscr{S}(1+\alpha+\beta+\delta+2\rho(p-2)+\rho(n-p-i))}{\mathscr{S}(\beta+\delta+\rho(n+\mu-3-i))} \\
&\quad \times \prod_{i=0}^{\mu-2} \frac{\mathscr{S}(1+\beta+\rho(n-p+i))}{\mathscr{S}(\beta+\delta+\rho(n+\mu-p-2+i))} \\
&\quad \times \prod_{i=0}^{n-p-\nu} \frac{\mathscr{S}(2+\alpha+\rho(p-\mu+i))}{\mathscr{S}(\beta+\delta+\rho(n-p+2\mu+\nu-4-i))} \\
&\quad \times \prod_{i=0}^{\nu-2} \frac{\mathscr{S}(1+\delta+\rho(\mu-1+i))}{\mathscr{S}(\beta+\delta+\rho(2\mu+\nu-4+i))} \\
&\quad \times \frac{\prod_{i=1}^{n-p'} \mathscr{S}(i\rho) \prod_{i=1}^{p'-1} \mathscr{S}(i\rho)}{\prod_{i=1}^{p-\mu} \mathscr{S}(i\rho) \prod_{i=1}^{\mu-1} \mathscr{S}(i\rho) \prod_{i=1}^{\nu-1} \mathscr{S}(i\rho) \prod_{i=1}^{n-p-\nu+1} \mathscr{S}(i\rho)} \Bigg\} \\
&\quad \times \hat{I}_{p'}(\alpha,\beta,\delta,\rho,z).
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

所以有等式：

$$
\alpha^n_{pp'}(\alpha,\beta,\delta,\rho) = M^{(1)}_{pp'}(\alpha,\beta,\delta,\rho). \tag{3.9}
$$

借助于文献[14]的公式，我们很方便地证明它与量子 $6j$ 符号有如下的关系：

$$
\begin{aligned}
M^{(1)}_{pp'} &= (-1)^{n(l'+s'+r')+p(r'+s')+p'(l'+r')} \times (-1)^{a+b+c+n-1} \\
&\quad \times \frac{T_1(p')}{T_2(p)} \times \sqrt{[2b+1][2e+1]} \times \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
& a = \frac{1}{2}\{(l-1)+(s-1)-(n-1)\}, \\
& n-1 = \frac{1}{2}\{(l-1)+(s-1)+(r-1)-(m-1)\}, \\
& c = \frac{1}{2}\{(s-1)+(r-1)-(n-1)\}, \ d = \frac{1}{2}(n-1), \\
& f = \frac{1}{2}\{(r-1)+(l-1)-(n-1)\}, \ e = c+d-p+1, \\
& b = f-d+p'-1, \\
& T_2(p) = \sqrt{[2e+1]}\{\langle[c+e-d]![a+e+f+1]!\rangle / \\
& \qquad \langle[d+e-c]![c+d-e]![a+f-e]![e+f-a]![a \\
& \qquad +e-f]![c+d+e+1]!\}^{1/2}, \\
& T_1(p') = T_2(e\to b, c\to f, f\to c), \\
& [x] = \frac{\sin(\pi\rho x)}{\sin(\pi\rho)}, \ [x]! = [n][n-1]\cdots[1].
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

由 $M_{pp'}$ 的具体形式可以看出：么正与非么正的唯一差别在于相因子

$$(-1)^{n(l'+s'+r')+p(r'+s')+p'(r'+s')},$$

因此它们的性质相似．即它们的 monodromy 性质一致，这一点可以从该模型的量子群对称性看出来，么正与非么正对量子群而言，唯一的差别是H的本征值发生变化，但 $[H]$ 的变化仅是一个 ± 1 的因子，而表示的维数以及卡什米尔的本征值均不变．事实上，共形块正是提供了量子群的一个表示空间，因此在聚合矩阵中，± 1 因子的出现也是很自然的．

利用类似于求 $M^{(1)}_{pp'}$ 的方法，我们很容易求出辫子矩阵 $M^{(2)}_{pp'}$

$$\begin{aligned} M^{(2)}_{pp'} &= e^{i\pi\theta^n_{pp'}(\alpha,\beta,\delta,\rho)}\alpha^n_{pp'}(\beta,\alpha,\delta,\rho), \\ \theta^n_{pp'} &= \{\alpha(n-p')+\beta(n-p-p'+1)+\delta(p'-1)\} \\ &\quad -\rho\{(n-p)(n-p+1)+(p'-1)(p'+2n-3)\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由于非么正理论的交叉矩阵与么正理论很相似，因而有关截断问题也是一样的[14]．

四、关联函数与算子积系数

在第二节中，我们已经给出了一般关联函数用顶角算子积表达的原则．由玻色化表示的具体形式，我们有任意四点函数的共形块为：

$$\begin{aligned} I^\mu = &\int \prod_{i=1}^{\mu-1} du_i u_i^{-J_{ss'}/\gamma^2}(u_i-1)^{-J_{ee'}/\gamma^2}(u_i-z)^{-J_{rr'}/\gamma^2} \\ &\times \int \prod_{i=\mu}^{n-1} du_i u_i^{-J_{ss'}/\gamma^2-1}(u_i-1)^{1-J_{ee'}/\gamma^2}(u_i-z)^{-J_{rr'}/\gamma^2-1}\prod_{i<j}(u_i-u_j)^{\frac{1}{\gamma^2}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

上述表达式中，积分围道的选取用下标标记，因此具有 $SU(2)$ 不变的四点函数可用 C-G 系数与(4.1)定义的共形块构成：即

$$\mathscr{T}^J_p = \sum_m \begin{bmatrix} J & J_{rr'} & J_{ss'} \\ m & m_{rr'} & m_{ss'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{kk'} & J_{ll'} & J \\ m_{kk'} & m_{ll'} & m \end{bmatrix}\mathscr{F}^\mu_p. \tag{4.2}$$

上式中 m_i 代表所对应的 J_i 的磁量子数，$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ 是 C-G 系数[5]．$\mathscr{F}$ 是归一化共形块，J 满足：

$$J = J_{rr'} + J_{ss'} - (\mu - 1), \tag{4.3}$$

$$J - m = \text{正整数和零}.$$

因此我们得到四点函数的一般表达形式为：

$$G(z,\bar{z}) = \sum_{J,p} X_p \mathscr{T}^J_p(z)\mathscr{T}^J_p(\bar{z}), \tag{4.4}$$

根据 monodromy 变换与 J 无关的特点，我们可得如下等式：

$$\sum_p X_p M^{(1)}_{pp'}\begin{bmatrix} J_{ll'} & J_{rr'} \\ J_{kk'} & J_{ss'} \end{bmatrix} M^{(1)}_{pp''}\begin{bmatrix} J_{ll'} & J_{rr'} \\ J_{kk'} & J_{ss'} \end{bmatrix} = Y_{p'}\delta_{p'p''}, \tag{4.5}$$

代入(3.8)式 $M^{(1)}_{pp'}$ 的表达式，可从(4.5)式解出：

$$
\begin{aligned}
X_p = &\prod_{i=1}^{p-1} \frac{\Gamma(i/2\gamma^2)}{\Gamma(1-i/2\gamma^2)} \prod_{i=1}^{n-p} \frac{\Gamma(i/2\gamma^2)}{\Gamma(1-i/2\gamma^2)} \\
&\times \prod_{i=0}^{n-p-1} \frac{\Gamma\left(1-\dfrac{j_r+j_s}{\gamma^2}+\dfrac{n+p-3-i}{\gamma^2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{j_r+j_s}{\gamma^2}-\dfrac{n+p-3-i}{\gamma^2}\right)} \\
&\times \left\{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_r+1}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_l+1}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(\frac{2j_s+1}{2\gamma^2}\right)\right.\right. \\
&\times \left.\Gamma\left(\frac{2(j_r+j_s+j_l-(n-1)+1)}{2\gamma^2}\right)\right]\Big/\left[\Gamma\left(1-\frac{1}{2\gamma^2}\right)\right. \\
&\times \Gamma\left(1-\frac{2j_r+1}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{2j_l+1}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{2j_s+1}{2\gamma^2}\right) \\
&\times \left.\left.\Gamma\left(1-\frac{2(j_r+j_s+j_l-(n-1)+1)}{2\gamma^2}\right)\right]\right\}^{1/2} \\
&\times \prod_{i=0}^{n-p} \frac{\Gamma\left(1-\dfrac{j_s}{\gamma^2}+\dfrac{i}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(\dfrac{j_r+j_l+j_s}{\gamma^2}-\dfrac{2(n-2)-i}{2\gamma^2}\right)}{\Gamma\left(j_l/\gamma^2-\dfrac{i}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{j_r+j_l+j_s}{\gamma^2}+\dfrac{2(n-2)-i}{2\gamma^2}\right)} \\
&\times \prod_{i=0}^{p-2}\left[\Gamma\left(1-\frac{j_r}{\gamma^2}+\frac{i}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{j_l}{\gamma^2}+\frac{i}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(\frac{j_r+j_s}{\gamma^2}\right.\right. \\
&\left.\left.-\frac{(p-2)+i}{2\gamma^2}\right]\Big/\left[\Gamma\left(\frac{j_r}{\gamma^2}-\frac{i}{2\gamma^2}\right)\Gamma\left(\frac{j_l}{\gamma^2}-\frac{i}{2\gamma^2}\right)\right.\right. \\
&\times \left.\Gamma\left(1-\frac{j_r+j_s}{\gamma^2}+\frac{(p-2)+i}{2\gamma^2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

其中 $\Gamma(x)$ 是通常的 Γ 函数，$j_x=J_{xx'}$ $j_p=J_{rr'}+J_{ss'}-(p-1)$. 从 X_p 的具体形式看，我们可以把 X_p 写成两部分，分别是 (j_r,j_s,j_p) 和 (j_p,j_l,j_k) 的函数. 即 X_p 因子化为：

$$
\begin{aligned}
X_p &= C^{j_p}_{j_r j_s}\cdot C^{j_k}_{j_p j_l}, \\
C^{j_3}_{j_1 j_2} &= \left\{\phi(1)\frac{1}{\phi(2j_1+1)\phi(2j_2+1)\phi(2j_3+1)}\right\}^{1/2} \\
&\qquad \times P(j_1+j_2+j_3+1)\times\prod_{i=1}^{3}\frac{P(j_1+j_2+j_3-2j_i)}{P(2j_i)},
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

其中，

$$
\phi(j_x)=\frac{\Gamma(J_{xx'}/2\gamma^2)}{\Gamma(1-J_{xx'}/2\gamma^2)}=\frac{\Gamma\left(\dfrac{x-1}{2(K+2)}-\dfrac{x'}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\dfrac{x'}{2}-\dfrac{x-1}{2(K+2)}\right)},
$$

$$
P(j_x)=\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(x-1)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{i}{K+2}-\dfrac{x'}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\dfrac{x'}{2}-\dfrac{i}{K+2}\right)}\quad\left(\frac{x-1}{2}=\text{整数}\right). \tag{4.8}
$$

从 (4.7) 式的形式看，非么正理论的结构常数与么正理论的结构常数相似。当各个自旋 $J_{xx'}$ 的 $x'=0$ 时，正好与么正理论完全一样。因此，(4.7)式给出了非么正理论的结构常数。

五、聚 合 代 数

在有理共形场论中，另一个重要的概念就是 modular 矩阵 S 与聚合代数 N，求解 S 矩阵和聚合代数 N 通常都是计算特征标。事实上，在许多情况下，从特征标出发计算 S 矩阵是很困难的，在本节，我们将从聚合矩阵出发来研究聚合代数及 S 矩阵。通常 S 矩阵可以对角化聚合代数矩阵 N，即：

$$S^{-1}N_iS=\lambda_i,\ (\lambda_i)_{kl}=\delta_{kl}\lambda_i^k, \tag{5.1}$$

在有理共形场论中，λ_i^k 与聚合矩阵 F 的矩阵元有下列关系式：

$$\lambda_{(ll')}^{(kk')}=\sum_p q^{-2(c_{(pp')}-c_{(kk')}-c_{(ll')})}F_{Ip}\begin{bmatrix} l & k \\ l & k \end{bmatrix}F_{pI}\begin{bmatrix} k & l \\ l & k \end{bmatrix}\Big/F_{II}\begin{bmatrix} l & l \\ l & l \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

上式中 I 代表恒等算子，$F_{pp'}$ 是由 $M_{pp'}^{(1)}$ 获得的，即 $F_{pp'}$ 满足归一条件。经复杂的计算有等式：

$$\lambda_{(ll')}^{(kk')}=(-1)^{(l-1)k'+l'k}e^{-i\pi(K+2)l'k'}\frac{[kl]}{[l]}, \tag{5.3}$$

其中

$$[x]=\sin\pi x/(K+2)/\sin\pi/(K+2).$$

考虑到 S 矩阵的性质，我们很方便地有：

$$S_{(ll')}^{(kk')}=\sqrt{\frac{2}{P^2(K+2)}}\,e^{-i\pi l'k'(K+2)}\sin\frac{k\cdot l\pi}{K+2}(-1)^{lk'+kl'}. \tag{5.4}$$

这与从特征标推导出的 S 矩阵一致。注意到(5.4)式的特点和(4.7)的形式，我们很直接地可以得到非么正理论的聚合法则：

$$\Phi_{(kk')}\times\Phi_{(ll')}=\sum_{\substack{r=r_{\min}\\ k+l+r=0\bmod 2}}^{r_{\max}}\Phi_{(rr')}(-1)^{\tilde{r}'}, \tag{5.5}$$

其中：

$$\begin{aligned} r_{\min}&=|k-l|,\\ r_{\max}&=\min(k+l-1,2p-k-l-1),\\ \tilde{r}'&=\begin{cases}0 & k'+l'<p'\\ 1 & k'+l'\geqslant p'\end{cases}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

六、讨　　论

从我们的构造中，可以看出当 $k'+l'\geqslant p'$ 时不存在物理的顶角算子。即对应于聚

合法则中(−1)的出现，它实质上反映了最低权的出现. 尽管我们已经限制在 $l'+k'<p'$ 的范围中讨论关联函数和交叉矩阵，但是对交叉矩阵来说它可以超出这一限制，即也适用于 $k'+l'\geqslant p'$ 的范围，因此(4.7)式所给出的结构常数也可以推广到 $k'+l'\geqslant p'$ 的范围，唯一的差别就是多了一个(−1)的因子. 所以说非么正的 $SU_K(2)$ WZW 模型与么正理论有许多相似的特点. 此外，如何从非么正 WZW 模型约化到非么正最小模型，这还是一个开问题，尽管在特征标的水平上已有一些工作，但如何在关联函数和聚合矩阵的基础上研究解决这一问题. 仍是相当重要的，也是我们进一步工作的出发点.

参 考 文 献

[1] I. G. Koh and P. Sorba, *Phys. Lett.*, **B215**(88), 723.
[2] S. Lu, *Phys. Lett.*, **B218**(89), 46.
[3] J. D. Cohn, *Phys. Lett.*, **B226**(89), 267.
[4] S. Mukhi and S. Panda, *Nucl. Phys.*, **B338**(91), 263.
[5] D. Berbard and C. Felder ETH-TH-89-26.
[6] P. Mathieu and M. A. Walton LAVAL-PHY-21/90.
[7] J. 'L. Cardy, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(85), 1354.
[8] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. M. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett.*, **A3**(88), 819.
[9] S. Mukhi et al., *Nucl. Phys.*, **B326**(89), 351.
[10] B. Y. Hou and R. H. Yue, *J. Phys.*, **A24**(91), 11.
[11] Vi. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Nucl. Phys.*, **B240**(84), 312, **B251**(85), 691.
[12] P. Christ and R. Flume, *Nucl. Phys.*, **B282**(87), 466.
[13] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Yad. Fiz.*, **43**(86), 75.
[14] B. Y. Hou, K. J. Shi, P. Wang and R. H. Yue, *Nucl. Phys.*, **B345**(90), 659.
[15] B. Y. Hou, D. P. Lie and R. H. Yue, *Phys. Lett.*, **B229**(89), 45.

The Crossing Matrices and Correlation Function in Nonunitary $SU_K(2)$ Wess-Zumino-Witten Model

Hou Boyu Shi Kangjie Yue Ruihong

(*Northwest University, Institute of Modern Physics, Xi'an* 710069)

Abstract

By using the Feigin-Fuch integral, we calculate the correlation function, operator product coefficient and crossing matrices in the nonunitary $SU_K(2)$ WZW model. We explicitly give the modular matrix and discuss the relations between the nonunitary $SU_K(2)$ WZW model and the unitary one.