

强耦合 $SU(3)$ 极限基带波函数的计算

李光华 贺慧勇
(长沙水电师院物理系, 410077)

摘 要

用群论方法给出了 IBM4 中强耦合 $SU(3)$ 极限的内禀态波函数, 然后用投影方法由内禀态波函数得到了基带波函数。

一、引 言

将 IBM 推广用于轻核叫 IBM4^[1]。它有七条可能的群链^[2], 其中的强耦合 $SU(3)$ 链为

$$\begin{aligned} U(36) \supset U_6(sd) \times U_6(ST) \supset SU_3(sd) \times SU_3(S) \times SU_3(T) \\ \supset SU_3(sdS) \times SU_3(T) \supset O_3(J) \times O_3(T). \end{aligned} \quad (1)$$

对于一个含有 n 个波色子的体系, 若它具有群链(1)所描述的动力学对称性, 则其波函数为

$$\left| \begin{array}{l} U(36)U_6(sd)SU_3(sd) \quad SU_3(S)SU_3(sdS) \quad O_3(J)SU_3(T) \quad O_3(T) \\ [n]\{n_1, \dots, n_6\} \xi (\lambda_1 \mu_1) (\lambda_2 \mu_2) (\lambda \mu) K J(\lambda_3 \mu_3) T \end{array} \right\rangle. \quad (2)$$

对于同位旋 $T = 0$ 的低能态, 仅需考虑属于 $SU_3(sd)$ 的 $IR(2n, 0)$ 与 $SU_3(S)$ 的 $IR(n, 0)$ 的态, 其中基带是由属于 $SU_3(sdS)$ 的 $IR(3n, 0)$ 的态形成。本文将计算下述基带波函数

$$\begin{aligned} |[n]\{n, 0, \dots, 0\}(2n, 0)(n, 0)(3n, 0)K = 0 J; (00)0\rangle \\ = \phi([n](3n, 0)K = 0JM). \end{aligned} \quad (3)$$

二、内禀态波函数

文献[2]已给出 $SU_3(sdS)$ 的生成元为

$$\begin{aligned} J_q = L_q + S_q = \sqrt{10}B(2, 2)_q^1 + \sqrt{2}B(1010)_{q0}^{10}, \\ Q_q = \sqrt{\frac{7}{4}}B(2, 2)_q^2 + [B(2, 0) + B(0, 2)]_q^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}B(1010)_{q0}^{20}. \end{aligned} \quad (4)$$

它们满足对易关系

$$\begin{aligned}
[J_q, J_{q'}] &= -\sqrt{2} \sum_{q+q'} \langle 1q, 1q' | 1q + q' \rangle J_{q+q'}, \\
[Q_q, J_{q'}] &= -\sqrt{6} \sum_{q+q'} \langle 2q, 1q' | 2q + q' \rangle Q_{q+q'}, \\
[Q_q, Q_{q'}] &= 3\sqrt{10} \sum_{q+q'} \langle 2q, 2q' | 1q + q' \rangle J_{q+q'}.
\end{aligned} \tag{5}$$

我们可以将生成元(4)改写为不可约张量的形式:

$$\begin{aligned}
A &= -2\sqrt{2} Q_0, \\
\nu_0 &= \frac{1}{2} J_0, \quad \nu_{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{2}{3}} Q_{\pm 2}, \\
V_{\pm \frac{1}{2}} &= \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} Q_{\pm 1} \pm \frac{1}{2} J_{\pm 1} \right), \quad T_{\pm \frac{1}{2}} = \mp \{V_{\mp \frac{1}{2}}\}^\dagger.
\end{aligned} \tag{6}$$

它们满足对易关系

$$\begin{aligned}
[A, \nu_0] &= [A, \nu_{\pm 1}] = 0, \\
[\nu_0, \nu_{\pm 1}] &= \pm \nu_{\pm 1}, \quad [\nu_{+1}, \nu_{-1}] = -\nu_0, \\
[A, T_q] &= 3T_q, \quad [\nu_0, T_q] = qT_q, \\
[\nu_{\pm 1}, T_q] &= \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mp q \right) \left(\frac{1}{2} \pm q + 1 \right)} T_{q\pm 1}, \\
[A, V_q] &= -3V_q, \quad [\nu_0, V_q] = qV_q, \\
[\nu_{\pm 1}, V_q] &= \mp \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mp q \right) \left(\frac{1}{2} \pm q + 1 \right)} V_{q\pm 1}, \\
[T_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}}] &= -\sqrt{\frac{1}{2}} \nu_{+1}, \quad [T_{-\frac{1}{2}}, V_{-\frac{1}{2}}] = -\sqrt{\frac{1}{2}} \nu_{-1}, \\
[T_{\frac{1}{2}}, V_{-\frac{1}{2}}] &= -\frac{1}{4}(A + 2\nu_0), \quad [T_{-\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{4}(A - 2\nu_0).
\end{aligned} \tag{7}$$

由此可见, A 是 $SO(3)$ 标量, 构成 $U(1)$ 的生成元; ν_0 与 $\nu_{\pm 1}$ 是 $SO(3)$ 一秩不可约张量, 构成 $SU(2)$ 的生成元; T_q 与 V_q 都是 $SO(3)$ 的 $1/2$ 秩不可约张量, 分别使 A 的本征值增加和减少 3。

因此用群链

$$\begin{aligned}
U(36) &\supset U_6(sd) \times U_6(ST) \supset SU_3(sd) \times SU_3(S) \times SU_3(T) \\
&\supset SU_3(sdS) \times SU_3(T) \supset U(1) \times SU(2) \times O_3(T),
\end{aligned} \tag{8}$$

标记的 $T = 0$ 低能态波函数为

$$\begin{aligned}
&| [n] \{ n, 0, \dots, 0 \} (2n, 0) (n, 0) (\lambda \mu) \in \Lambda \Sigma; (00) 0 \rangle \\
&= | [n] (\lambda \mu) \in \Lambda \Sigma \rangle.
\end{aligned} \tag{9}$$

它是 A, ν^2 与 ν_0 的共同本征函数, 本征值分别为 $\varepsilon, \Lambda(\Lambda + 1)$ 与 Σ 。当 $(\lambda \mu) = (3, 0)$ 时, 本征值 ε, Λ 与 Σ 的值见表 1。

表1 IR(3,0) 中 ε, Λ 与 Σ 的值

ε	Λ	Σ
6	0	0
3	1/2	$\pm 1/2$
0	1	0, ± 1
-3	3/2	$\pm 1/2, \pm 3/2$

$$\begin{aligned}
 \text{令} \quad A_0^\dagger &= \sqrt{\frac{2}{3}} b_{201000}^\dagger - \sqrt{\frac{1}{3}} b_{001000}^\dagger, \\
 B_{\pm\frac{1}{2}}^\dagger &= \sqrt{\frac{2}{3}} b_{201\pm 100}^\dagger - \frac{1}{3} b_{001\pm 100}^\dagger + \sqrt{\frac{2}{3}} b_{2\pm 11000}^\dagger, \\
 C_0^\dagger &= \frac{1}{3} b_{201000}^\dagger + \frac{\sqrt{2}}{3} b_{001000}^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} b_{211-100}^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} b_{2-11100}^\dagger, \\
 C_{\pm 1}^\dagger &= \sqrt{\frac{1}{3}} b_{2\pm 21000}^\dagger + \sqrt{\frac{2}{3}} b_{2\pm 11\pm 100}^\dagger, \\
 D_{\pm\frac{1}{2}}^\dagger &= \frac{\sqrt{3}}{3} b_{201\pm 100}^\dagger + \frac{2}{3} b_{001\pm 100}^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} b_{2\pm 21\pm 100}^\dagger, \\
 D_{\pm\frac{3}{2}}^\dagger &= b_{2\pm 21\pm 100}^\dagger.
 \end{aligned} \tag{10}$$

它们满足下述对易关系:

$$\begin{aligned}
 [A, A_0^\dagger] &= 6A_0^\dagger, \quad [A, B_q^\dagger] = 3B_q^\dagger, \\
 [A, C_q^\dagger] &= 0, \quad [A, D_q^\dagger] = -3D_q^\dagger, \\
 [v_0, A_0^\dagger] &= [v_{\pm 1}, A_0^\dagger] = [T_{\pm\frac{1}{2}}, A_0^\dagger] = 0, \\
 [v_0, X_q^\dagger] &= qX_q^\dagger, \\
 [v_{\pm 1}, X_q^\dagger] &= \mp \sqrt{\frac{1}{2}}(p \mp q)(p \pm q + 1)X_{q\pm 1}^\dagger.
 \end{aligned} \tag{11}$$

在上式最后两个对易关系中,当 X_q^\dagger 为 B_q^\dagger, C_q^\dagger 与 D_q^\dagger 时, p 分别为 $1/2, 1$ 与 $3/2$. 由(11)式可以看出 $A_0^\dagger, B_q^\dagger, C_q^\dagger$ 与 D_q^\dagger 构成 $SU(3)$ 的(3 0)秩不可约张量 $U^{(30)}(\varepsilon \Lambda \Sigma)$:

$$\begin{aligned}
 U^{(30)}(600) &= A_0^\dagger, \quad U^{(30)}\left(3 \frac{1}{2} q\right) = B_q^\dagger, \\
 U^{(30)}(01q) &= C_q^\dagger, \quad U^{(30)}\left(-3 \frac{3}{2} q\right) = D_q^\dagger, \\
 \varepsilon &= 6 - 6\Lambda.
 \end{aligned} \tag{12}$$

波函数(9)完全由最高权态 $|[n](\lambda \mu)_{\varepsilon_{\max}} \Lambda_0 \Lambda_0\rangle$ 或最低权态 $|[n](\lambda \mu)_{\varepsilon_{\min}} \Lambda'_0 \Lambda'_0\rangle$ 决定,它们分别满足

$$T_q |[n](\lambda \mu)_{\varepsilon_{\max}} \Lambda_0 \Lambda_0\rangle = 0, \quad V_q |[n](\lambda \mu)_{\varepsilon_{\min}} \Lambda'_0 \Lambda'_0\rangle = 0. \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\max} &= 2\lambda + \mu, \quad \Lambda_0 = \frac{\mu}{2}; \\
 \varepsilon_{\min} &= -(\lambda + 2\mu), \quad \Lambda'_0 = \frac{\lambda}{2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

容易证明
$$\sqrt{\frac{1}{n!}} A_0^{\dagger n} |0\rangle = |[n](3n, 0)6n 0 0\rangle \quad (15)$$

是一个最高权态, 由它可完全决定用群链(8)标记的波函数 $|[n](3n, 0) \in \Lambda\Sigma\rangle$.

按照 Elliott 内禀态的定义^[3], 我们得到强耦合 $SU(3)$ 极限的基带内禀态波函数为

$$\chi([n](3n, 0) K = 0) = \sqrt{\frac{1}{n!}} A_0^{\dagger n} |0\rangle. \quad (16)$$

三、基带波函数

由文献[3]知, 内禀态与物理态的关系为

$$\chi([n](\lambda\mu)K) = \sum_J C((\lambda\mu)KJ) \phi([n](\lambda\mu)KJM = K). \quad (17)$$

其中 $C((\lambda\mu)KJ)$ 是 Elliott 系数^[4,5],

$$a((\lambda\mu)KJ) = b(K)C((\lambda\mu)KJ),$$

$$b(K) = e^{-\frac{1}{2}\mu\pi} \left\{ \frac{\mu!}{2^\mu \left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}K\right)! \left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}K\right)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

对于任意的 λ 值, Vergados^[6] 给出了系数 $a((\lambda\mu)KJ)$ 的表达式.

现在我们用投影方法^[7]由基带的内禀态波函数(16)求出基带波函数 $\phi([n](3n, 0)K = 0JM)$. 令

$$A_0^{\dagger n} = \sum_J W(n, J, M = 0), \quad (19)$$

其中 $W(n, J, M = 0)$ 是到角动量 J 上的投影, 求和指标 J 为

$$J = 3n, 3n - 2, \dots, \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时,} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases} \quad (20)$$

由(16), (17), (19)与(20)式得基带波函数为

$$\phi([n](3n, 0)0JM) = \frac{1}{C((3n, 0)0J)} \sqrt{\frac{1}{n!}} W(n, J, M) |0\rangle. \quad (21)$$

利用下述角动量上升与下降算符, 可以得到 W 函数的表达式.

$$J_+ = \sum_{s, \tau} (2b_{22s, \tau}^{\dagger} b_{21s, \tau} + 2b_{2-1s, \tau}^{\dagger} b_{2-2s, \tau})$$

$$+ \sqrt{6} b_{21s, \tau}^{\dagger} b_{20s, \tau} + \sqrt{6} b_{20s, \tau}^{\dagger} b_{2-1s, \tau}$$

$$+ \sqrt{2} \sum_{l, m} (b_{l, m}^{\dagger} b_{l, m+100} + b_{l, m}^{\dagger} b_{l, m-100}), \quad (22)$$

$$J_- = \sum_{s, \tau} (2b_{21s, \tau}^{\dagger} b_{22s, \tau} + 2b_{2-2s, \tau}^{\dagger} b_{2-1s, \tau})$$

$$+ \sqrt{6} b_{20s, \tau}^{\dagger} b_{21s, \tau} + \sqrt{6} b_{2-1s, \tau}^{\dagger} b_{20s, \tau}$$

$$+ \sqrt{2} \sum_{l, m} (b_{l, m}^{\dagger} b_{l, m+100} + b_{l, m}^{\dagger} b_{l, m-100}),$$

$$[J_+, W(n, J, M)] = \sqrt{(J-M)(J+M+1)} W(n, J, M+1), \quad (23)$$

$$[J_-, W(n, J, M)] = \sqrt{(J+M)(J-M+1)} W(n, J, M-1).$$

我们定义 J_{\pm} 的相继对易算符 $J_{\pm}^{(\Delta)}$, 它对任一算符 u 的作用为

$$[J_{\pm}^{(\Delta)}, u] = \overbrace{[J_{\pm}, [J_{\pm}, \dots, [J_{\pm}, u] \dots]]}^{\Delta \text{次}}, \quad (24)$$

将相继对易算符 $J_{\pm}^{(\Delta)}$ 作用于(19)式的两边,

$$[J_{\pm}^{(\Delta)}, A_0^{\dagger n}] = \sum_J \sqrt{\frac{(J+\Delta)!}{(J-\Delta)!}} W(n, J, M=\Delta). \quad (25)$$

当 $\Delta = 3n$ 时, 上式右边只剩下 $W(n, J=3n, M=3n)$, 其它项由于 J 的第三分量超过 J 的值而为 0.

$$[J_{\pm}^{(3n)}, A_0^{\dagger n}] = \sqrt{(6n)!} W(n, J=3n, M=3n),$$

$$\therefore W(n, J=3n, M=3n) = \sqrt{\frac{1}{(6n)!}} [J_{\pm}^{(3n)}, A_0^{\dagger n}], \quad (26)$$

$$W(n, J=3n, M=3n-2s) = \sqrt{\frac{(6n-2s)!}{(2s)!(6n)!}} [J_{\pm}^{(2s)}, W(n, J=3n, M=3n)]. \quad (27)$$

当 $\Delta = 3n-2$ 时, (25)式右边仅两项不为 0,

$$\begin{aligned} [J_{\pm}^{(3n-2)}, A_0^{\dagger n}] &= \sqrt{\frac{(6n-2)!}{2!}} W(n, J=3n, M=3n-2) \\ &+ \sqrt{\frac{(6n-4)!}{0!}} W(n, J=3n-2, M=3n-2). \end{aligned}$$

利用(26)与(27)式得

$$\begin{aligned} W(n, J=3n-2, M=3n-2) &= \sqrt{\frac{1}{(6n-4)!}} \{ [J_{\pm}^{(3n-2)}, A_0^{\dagger n}] \\ &- \sqrt{\frac{(6n-2)!}{2!(6n)!}} [J_{\pm}^{(2)}, [J_{\pm}^{(3n)}, A_0^{\dagger n}]] \}. \end{aligned} \quad (28)$$

于是可得关于 W 的迭推公式

$$\begin{aligned} W(n, J=3n-2t, M=3n-2t) &= \sqrt{\frac{1}{(6n-4t)!}} \{ [J_{\pm}^{(3n-2t)}, A_0^{\dagger n}] \\ &- \sum_{p=0}^{t-1} \frac{(6n-2t-2p)!}{(2t-2p)!} \sqrt{\frac{1}{(6n-4p)!}} [J_{\pm}^{(2t-2p)}, W(n, J=3n-2p, \\ &M=3n-2p)] \}. \end{aligned} \quad (29)$$

由此得到

$$\begin{aligned} W(n, J=3n-2t, M=3n-2t) \\ &= \sqrt{\frac{1}{(6n-4t)!}} \sum_{p=0}^t f_{3n-2t, 2p} [J_{\pm}^{(2p)}, [J_{\pm}^{(3n-2t+2p)}, A_0^{\dagger n}]]. \end{aligned} \quad (30)$$

其中系数 $f_{m,2p}$ 满足迭推公式

$$f_{m,0} = 1, f_{m,2p} = - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(2m+2l+2p)!}{(2m+4p)!(2p-2l)!} f_{m,2l}. \quad (31)$$

将(30)、(31)式代入(21)式,得基带波函数为

$$\psi([n](3n,0)K=0, J=3n-2t, M=3n-2t)$$

$$= \frac{1}{C((3n,0)0J=3n-2t)} \sqrt{\frac{1}{n!(6n-4t)!}} \sum_{p=0}^t f_{3n-2t,2p} [J^{(2p)}, [J_+^{(3n-2t+2p)}, A_0^{\dagger n}]]. \quad (32)$$

由于上升,下降算符 J_{\pm} 对算符 u 的作用类似于求导运算,相继对易算符 $J_{\pm}^{(\Delta)}$ 的作用类似于求高阶导数,因此利用复合函数的高阶导数公式^[8]

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(\varphi(x))) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n \\ \sum_{k=1}^l i_k = n}} \frac{n! f^{(i)}}{i_1! i_2! \cdots i_l!} \left(\frac{u^{(1)}}{1}\right)^{i_1} \left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{u^{(l)}}{l!}\right)^{i_l}, \quad (33)$$

式中,

$$f^{(i)} = \frac{d^i f}{du^i}, \quad u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}.$$

可以得出:若 $u, [J_{\pm}, u], [J_{\pm}^{(2)}, u], \dots, [J_{\pm}^{(l)}, u]$ 均不为 0, 而 $[J_{\pm}^{(l+1)}, u] = 0$, 则

$$[J_{\pm}^{(\Delta)}, u^n] = \Delta |n| \sum_{\substack{1 \leq i \leq \min(\Delta, n) \\ \sum_{k=1}^l i_k = \Delta}} \frac{u_0^{n-i} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \cdots u_l^{i_l}}{(n-i)! i_1! i_2! \cdots i_l!}, \quad (34)$$

其中, $u_k = \frac{1}{k!} [J_{\pm}^{(k)}, u], k = 0, 1, \dots, l. \quad (35)$

而 l 之值由表 2 决定.

表 2 l 的数值

l	u	A_0^{\dagger}	$[J_+, A_0^{\dagger}]$	$[J_+^{(2)}, A_0^{\dagger}]$	$[J_+^{(3)}, A_0^{\dagger}]$
J_+		3			
J_-		3	4	5	6

$$A_0^{\dagger} = \sqrt{\frac{2}{3}} b_{201000}^{\dagger} - \sqrt{\frac{1}{3}} b_{001000}^{\dagger},$$

$$[J_+, A_0^{\dagger}] = 2 \left(b_{211000}^{\dagger} + \sqrt{\frac{1}{3}} b_{201100}^{\dagger} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} b_{001100}^{\dagger}, \quad (36)$$

$$[J_+^{(2)}, A_0^{\dagger}] = 4(b_{221000}^{\dagger} + \sqrt{2} b_{211100}^{\dagger}), \quad [J_+^{(3)}, A_0^{\dagger}] = 12\sqrt{2} b_{221100}^{\dagger}.$$

由广义 Leibniz 公式^[8]得

$$[J^{(\Delta)}, (V_1 V_2 \cdots V_m)] = \sum_{\substack{\sum i_k = \Delta \\ 0 \leq i_k \leq \Delta}} \frac{\Delta!}{i_1! i_2! \cdots i_m!} [J^{(i_1)}, V_1] [J^{(i_2)}, V_2] \cdots [J^{(i_m)}, V_m]. \quad (37)$$

对于任意的 n (核子体系的玻色子数), 我们可以由(32), (34), (36)与(37)式算出强耦合 $SU(3)$ 极限的基带波函数的解析表达式.

四、讨 论

在 IBM4 中存在七条可能的群链, 但使我们感兴趣的是其中的 $U(5)$ 、 $O(6)$ 、 $SU(3)$ 与强耦合 $SU(3)$ 极限^[9], 前三种与 IBM 中的相应极限有些类似. 在 $U(5)$ 极限中, d 玻色子数 n_d , d 玻色子辛弱数 τ , 轨道角动量 L , 自旋 S , 同位旋 T 与总角动量 J 都是好量子数. 在 $O(6)$ 极限中, d 玻色子数 n_d 已不是好量子数, 但 τ, L, S, T 与 J 仍是好量子数. 在 $SU(3)$ 极限中, n_d 与 τ 都不是好量子数, 仅 L, S, T 与 J 才是好量子数. 而在强耦合 $SU(3)$ 极限下, n_d, τ, L 与 S 都不是好量子数, 只有 T 与 J 才是好量子数. 这表明在这极限下不仅存在不同玻色子辛弱数的态的混合, 而且 sd 空间与 S 空间之间的耦合也比其它极限强烈, 这就是我们把(1)式叫做强耦合 $SU(3)$ 极限的原因.

本文虽只计算了强耦合 $SU(3)$ 极限的基带波函数, 但对于其它带, 也可类似地求出其波函数.

作者感谢清华大学孙洪洲教授的帮助.

参 考 文 献

- [1] P. Halse, J. P. Elliott and J. A. Evans, *Nucl. Phys.*, **A417**(1984), 301.
- [2] Han Qizhi, Sun Hongzhou and Li Guanghua, *Phys. Rev.*, **C35**(1987), 786.
- [3] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc.*, **A245**(1958), 562.
- [4] J. P. Elliott and M. Harvey, *Proc. Roy. Soc.*, **A272**(1963), 557.
- [5] 曾谨言, 孙洪洲, 原子核结构理论, 上海科技出版社, 1987, 242.
- [6] J. D. Vergados, *Nucl. Phys.*, **A111**(1968), 681.
- [7] Gui Lu Long and Hong Zhou Sun, *J. Math. Phys.*, **30**(1989), 1937.
- [8] 数学手册, 高等教育出版社, 1979, 197.
- [9] Li Guanghua, Sun Hongzhou and Han Qizhi, *Commun. in Theor. Phys.*, (Beijing, China) **7**(1987), 303.

Calculating on Wavefunctions of the Ground State Band for the Strong Coupling $SU(3)$ Limit in IBM4

LI GUANGHUA HE HUIYONG

(Physics Department, Changsha Normal University of Water Resources and Electric Power, 410077)

ABSTRACT

Using the group theoretical method, the wavefunctions of intrinsic states for the strong coupling $SU(3)$ limit in IBM4 are given. Then, the wavefunctions of ground states band are obtained from the above wavefunctions by a projection method.