

# 核转动谱的量子群 $SU_q(2)$ 理论分析\*

孟杰 吴崇试 曾谨言  
(北京大学物理系, 100871)

## 摘 要

本文系统地分析了量子群  $SU_q(2)$  理论对原子核转动谱的适用性。通过对 Mallmann 图、 $I(I+1)$  展开系数的关系、以及能谱的计算表明:  $SU_q(2)$  的转动谱表示式与钶系和稀土偶偶变形核的观测到的转动谱规律有明显的偏离。 $SU_q(2)$  转动谱表示式只在一定角动量范围中适用。形变参量  $q$  与核软度直接相关, 明显依赖于角动量。

## 一、引 言

最近几年, 量子群理论<sup>[1-3]</sup>引起了物理学界的广泛注意<sup>[4,5]</sup>。文献[6,7]建议用与量子群  $SU_q(2)$  的二阶 Casimir 算子成比例的哈密顿量来描述原子核的转动谱。因此, 观测到的原子核转动谱在多大程度上可以用量子群理论来说明, 是值得探讨的。

$SU_q(2)$  是  $SU(2)$  李代数的  $q$  变形 ( $q$ -deformation), 它由厄密算子  $J_0, J_{\pm}$  生成, 这些算子满足对易式

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = [2J_0]. \quad (1)$$

这里  $[x]$  是  $q$  数, 定义为

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad (2)$$

或等价地用  $\gamma = \ln q$  来表示,

$$[x] = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{e^{\gamma} - e^{-\gamma}} = \frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma}, \quad (3)$$

在  $q \rightarrow 1$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) 的极限下,  $[x] \rightarrow x$ ,  $SU_q(2)$  将回到平常的  $SU(2)$ 。  $SU_q(2)$  的不可约表示可由最高权态  $|IM = I\rangle$  确定 ( $J_+|II\rangle = 0, \langle II|II\rangle = 1$ ), 其基矢  $|IM\rangle$  ( $I \geq M \geq -I$ ) 可表为

$$|IM\rangle = \sqrt{\frac{[I+M]!}{[2I]![I-M]!}} J_-^M |II\rangle, \quad (4)$$

$SU_q(2)$  的二阶 Casimir 算子为

$$C_2^q = J_- J_+ + [J_0][J_0 + 1], \quad (5)$$

本文 1991 年 3 月 6 日收到

\* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金支持项目。

其本征值为  $[I][I + 1]$ .

$q$  转子的哈密顿量表为

$$H = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}^{(0)}} C_2^q + E_0, \quad (6)$$

这里  $\mathcal{I}^{(0)}$  是  $q = 1$  ( $\gamma = 0$ ) 时的转动惯量,  $E_0$  为带首能量, 对于偶偶核的基带, 习惯上取为 0. 在  $q$  转子模型中,  $\mathcal{I}^{(0)}$  与  $E_0$  视为常数, 因此, 转动能可表为<sup>[6]</sup>

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}^{(0)}} \frac{\sin(I|\gamma|)\sin((I+1)|\gamma|)}{\sin^2|\gamma|} + E_0, \quad (7)$$

这里已假定  $\gamma (= \ln q) = i|\gamma|$  (即取纯虚数).

本文的目的即系统地探讨此  $q$  变形转动谱表示式(7)对于原子核转动谱的适用性. 在第二节中, 用 Mallmann 图<sup>[8]</sup>来分析  $q$  变形转动谱表示式. 第三节将研究式(7)按  $I(I+1)$  幂级数展开的系数之间关系, 并与稀土和铜系变形核转动谱的实验分析(最小二乘法拟合)结果比较. 第四节将直接分析转动谱. 结果表明,  $SU_q(2)$  的表示式只在一定角动量范围中适用于描述核转动谱. 我们还分析了  $q$  形变参数  $|\gamma|$  随角动量的变化. 在最后一节中讨论了式(7)与可变转动惯量模型 (VMI)<sup>[9]</sup> 的关系.

## 二、Mallmann 图

Mallmann 曾经指出,  $R_I \equiv (E_I - E_0)/(E_2 - E_0)$  或  $r_I \equiv R_I - R_{I-2}$  对  $R_4$  的曲线的行为十分光滑. 文献[10]特别强调了 Mallmann 图的优越性, 并用它来分析了两参数 VMI 模型的各种形式的适用性. 对于任何二参数转动谱公式, 其 Mallmann 图是唯一的, 并不依赖于参数的取值. Mallmann 图可以直接与所有原子核的转动谱的观测结果比较, 因此它可以对每一个二参数转动谱公式的优劣给出一个清晰而可靠的判断.

按照式(7), 我们有

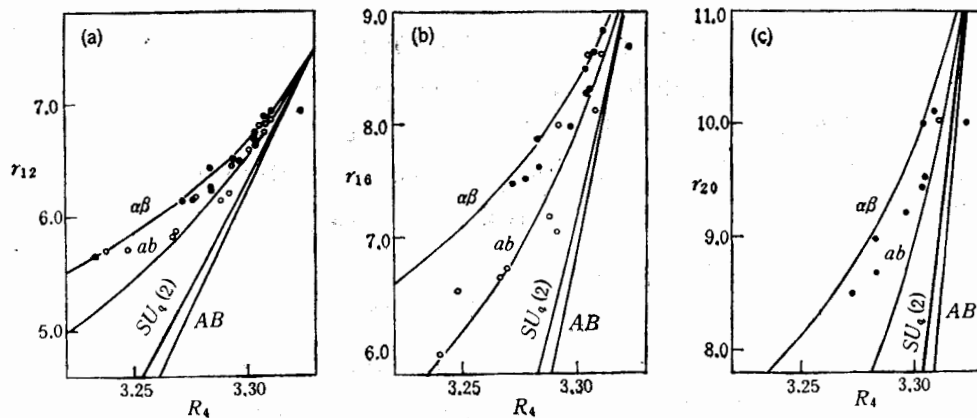


图 1  $SU_q(2)$ 、 $AB$ 、 $\alpha\beta$  和  $ab$  表示式的 Mallmann 图  
对所有实验值(取自文献 14 及其所引文献), 分别用点(铜系核)和圈(稀土核)表示.  
(a)  $I = 12\hbar$ ; (b)  $I = 16\hbar$ ; (c)  $I = 20\hbar$

$$R_I = \frac{\sin I|\gamma| \sin(I+1)|\gamma|}{\sin 2|\gamma| \sin 3|\gamma|}, \quad (8)$$

由此可画出  $q$  转子的 Mallmann 图。图 1a—c 分别给出  $I = 12, 16$  和  $20$  三种情况下的 Mallmann 图。为便于比较,常见的其它几个二参数转动谱公式的 Mallmann 图,也画在图中,它们是:二参数  $I(I+1)$  展开式<sup>[11]</sup>

$$E = AI(I+1) + BI^2(I+1)^2, \quad (9)$$

二参数  $\omega^2$  展开式 (Harris)<sup>[12]</sup>

$$E = a\omega^2 + \beta\omega^4, \quad (10)$$

以及吴-曾二参数闭合表示式<sup>[13]</sup>

$$E = a[\sqrt{1 + bI(I+1)} - 1], \quad (11)$$

此式是在一定条件下求解 Bohr 哈密顿量得出的。为简便起见,这三个表示式分别记为  $AB, \alpha\beta$  和  $ab$ 。

目前观测到的铜系和稀土偶偶核的基带(带交叉角动量  $I_c \geq 16$ )的 Mallmann 图分别用圆点●和圆圈○画在图 1 中。所有实验数据取自文献[14]及该文献中所列的诸文献。可以看出,  $SU_q(2)$  表示式(7)的 Mallmann 图优于  $AB$  表示式(10),这是因为  $I(I+1)$  高幂项出现在式(7)中[见下面式(14)]。在物理上这也许可以理解为振动和其它自由度的效应至少已部分地反映在  $q$  形变表示式中。然而,从如此丰富的核转动谱观测数据的分析可以看出,所有的实验点(除一个点外)都落在  $SU_q(2)$  的 Mallmann 图的左侧,即对于给定的  $R_4$ (即给定  $|\gamma|$ ),按式(8)计算出的  $r_I$  值系统地小于观测值。因此,原子核转动谱的 Mallmann 图确切地表明:统计说来,  $SU_q(2)$  转子理论与丰富的实验数据有系统的偏离,因而需要进一步改进。

### 三、 $I(I+1)$ 展开系数之间的关系

基于对称性考虑,Bohr 和 Mottelson 指出<sup>[14]</sup>,偶偶变形核的转动能可作  $I(I+1)$  幂级数展开如下:

$$E = AI(I+1) + BI^2(I+1)^2 + CI^3(I+1)^3 + DI^4(I+1)^4 + \dots \quad (12)$$

然而在式(7),(10)或(11)中只出现两个参数,因此若把它们作  $I(I+1)$  幂级数展开,则展开系数之间必有一定的关系。Mottelson 指出<sup>[15]</sup>,研究  $I(I+1)$  幂级数展开系数的关系可以检验一个转动谱公式的好坏。例如,把 Harris 公式展开到  $I^4(I+1)^4$  幂项,则有

$$\frac{AC}{4B^2} = 1, \quad \frac{A^2D}{24B^3} = 1. \quad (13)$$

对于  $SU_q(2)$  表示式(7),将右侧分子展开并把  $I(I+1)$  同幂次项集中起来,可得

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}^{(0)}} \frac{1}{[j_0(|\gamma|)]^2} \left\{ j_0(|\gamma|)I(I+1) - |\gamma|j_1(|\gamma|)I^2(I+1)^2 + \frac{2}{3}|\gamma|^2j_2(|\gamma|)I^3(I+1)^3 - \frac{1}{3}|\gamma|^3j_3(|\gamma|)I^4(I+1)^4 + \dots \right\}, \quad (14)$$

表 1  $I(I+1)$  幂级数展开系数之间关系

	$SU_q(2)$ 表示式	$ab$ 表示式(11) <sup>a)</sup>	Harris 表示式(10) <sup>b)</sup>
$\frac{AC}{4B^2}$	$\frac{1}{10} - \frac{2}{525} \gamma ^2 + \dots$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{A^2D}{24B^3}$	$\frac{1}{280} - \frac{1}{3150} \gamma ^2 + \dots$	$\frac{5}{24}$	1
$\frac{AC}{4B^2} - \frac{A^2D}{24B^3}$	$\frac{27}{280} - \frac{11}{3150} \gamma ^2 + \dots$	$\frac{7}{24}$	0

a) 参考文献[14], b) 参考文献[11].

其中  $i_n(|\gamma|)$  是  $n$  阶球 Bessel 函数。展开式前 4 项的系数之间的关系列于表 1 中。为比较, 把 Harris  $\alpha\beta$  表示式(10)和吴-曾  $ab$  表示式(11)的展开系数的关系也列于表 1 中。

现在用  $ABCD$  4 参数式(12)去拟合(最小二乘法)所有铜系和稀土偶偶变形核的基带( $I_c \geq 16$ )的转动谱, 可得出  $A, B, C, D$  的值, 从而得出从实验提取的  $\frac{AC}{4B^2}$ ,  $\frac{A^2D}{24B^3}$  和

它们之差的值, 这些结果分别画于图 2a, 2b 2c 中。可以看出,  $SU_q(2)$  理论给出的值  $\frac{AC}{4B^2}$ ,  $\frac{A^2D}{24B^3}$  系统地小于实验值。为说明实

验事实,  $C, D$  应该比  $SU_q(2)$  理论给出的结果相对大一些。可以有趣地注意到, 实验结果可以相当好地用  $ab$  表示式(11)来说明, 这也许可以对改进  $SU_q(2)$  理论提供有益的线索

#### 四、能 谱

现在用  $SU_q(2)$  表示式去拟合观测到的变形核的转动谱。图 3 给出两个典型实例, 即  $^{235}\text{U}$  和  $^{174}\text{Yb}$  基带(其它变形核的分析结果与此类似)。作为比较, 用式(9)的  $AB$  拟合与用式(11)的  $ab$  拟合结果也给予图 3 中。可以看出,  $SU_q(2)$  拟合优于  $AB$  拟合, 这也许由于  $SU_q(2)$  理论中包含了  $I(I+1)$  高幂项。然而可以看出,  $SU_q(2)$  拟合远逊于  $ab$  拟合。

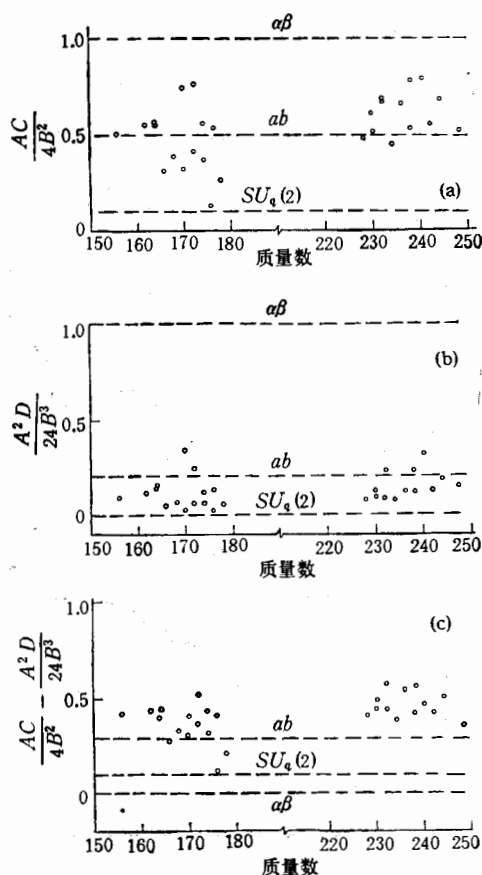


图 2  $I(I+1)$  展开系数间的关系。系数由对实验数据的拟合而定出。(铜系核实验数据用了  $I \leq 20$  的能级, 稀土核则用了  $I \leq 16$  的能级)。

(a)  $\frac{AC}{4B^2}$ ; (b)  $\frac{A^2D}{24B^3}$ ; (c)  $\frac{AC}{4B^2} - \frac{A^2D}{24B^3}$

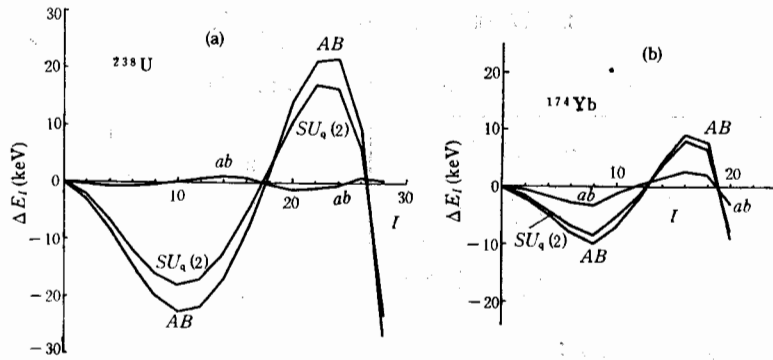


图3 两个典型原子核的 $\Delta E_I = E_I^{\text{计算}} - E_I^{\text{实验}}$ 对 $I$ 的图 (a)  $^{238}\text{U}$ ; (b)  $^{174}\text{Yb}$

众所周知,在同一转动带的,不仅能量 $E_I$ ,而且相邻能级之间的 $\gamma$ 跃迁能量 $E_\gamma(I) = E_I - E_{I-2}$ ,都是角动量 $I$ 的单调增函数。由式(7)可得

$$E_\gamma(I) = \frac{\hbar^2}{\mathcal{J}^{(0)}} \cot|\gamma| \sin(2I-1)|\gamma|. \quad (15)$$

因此,为说明观测到的转动谱,必须

$$0 \leq (2I-1)|\gamma| \leq \pi/2, \quad (16)$$

亦即: 只当 $I \leq I_{\max}$ 时 $SU_q(2)$ 表示式(7)才适用,

$$I_{\max} = \left( \frac{\pi}{4|\gamma|} + \frac{1}{2} \right) \text{的整数部分}. \quad (17)$$

对于稳定变形核, $|\gamma|$ 大约为0.03—0.06,因而 $I_{\max} \sim 28-16$ .当 $\pi/2 \leq (2I-1)|\gamma| \leq \pi$ 时, $E_\gamma(I)$ 将随 $I$ 增大而递减。实验上并未出现这种现象。更有甚者,当 $\pi \leq (2I-1)|\gamma| \leq 2\pi$ 时, $E_\gamma(I)$ 将取负值。

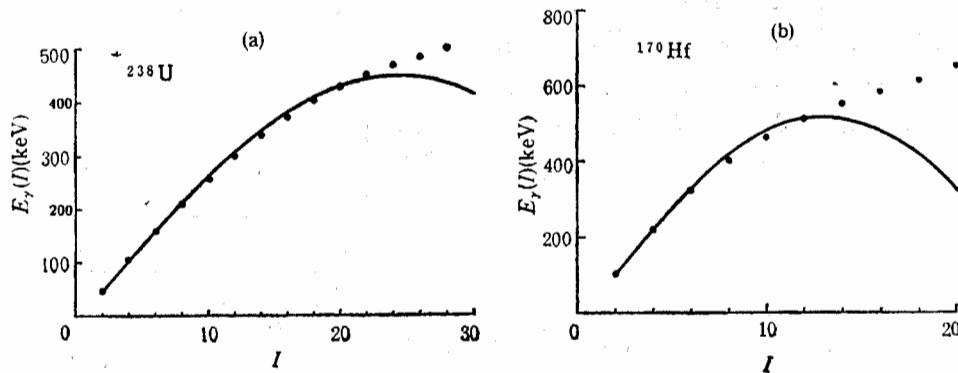


图4 跃迁能量 $E_\gamma(I)$ 对 $I$ 的图  
曲线表示 $SU_q(2)$ 的计算结果,点表示实验结果  
(a)  $^{238}\text{U}$ ; (b)  $^{170}\text{Hf}$

事实上,当 $I$ 接近 $I_{\max}$ 时,用 $SU_q(2)$ 表示式(7)计算出的转动谱愈来愈偏离实验。如图4a所示,当 $I > 20$ 后,计算出的 $^{238}\text{U}$ 的 $\gamma$ 跃迁能量 $E_\gamma(I)$ 随 $I$ 增大而递减,这断然与实验矛盾。类似的情况也出现于其它变形核中。例如图4b所示 $^{170}\text{Hf}$ 。

此外,对于理想的  $q$  转子,  $|\gamma|$  应该是与角动量无关的常数. 利用式(8),可从观测到的  $R_I$  直接计算出  $|\gamma|$  值. 图5给出四个典型的钢系核的  $|\gamma|$  随角动量的变化. 其它变形核的情况与此类似. 由图5可以看出,  $q$  形变参数  $|\gamma|$  决非一个常数,而是随角动量改变的. 这种变化有时还很急剧.  $|\gamma|$  依赖于  $I$  这一事实,说明有些效应未能在式(6)所示的简单的哈密顿量中未得到反映. 为了说明实验,看来需要在哈密顿量中引进某种剩余相互作用,或考虑  $SU_q(2)$  之外的其它量子代数.

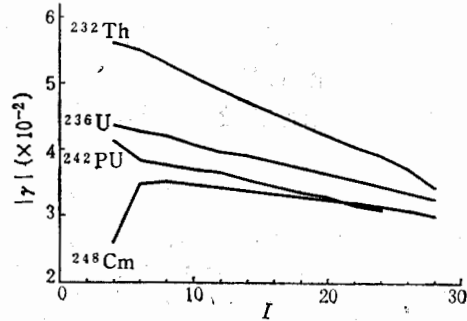


图5  $q$  形变参数  $|\gamma|$  随角动量的变化.

## 五、 $SU_q(2)$ 表示式中参数的物理意义

按  $SU_q(2)$  表示式(7),转动能与刚性转子为  $I(I+1)$  规律有所偏离. 正如 Bohr 和 Mottelson 指出,这种偏离可以视为转动惯量与角动量有关.

与通常推转壳模型中一样,原子核转动惯量定义为<sup>[16]</sup>

$$\mathcal{J}_I = \frac{\hbar\sqrt{I(I+1)}}{\omega}, \quad (18)$$

式中

$$\omega = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{d\sqrt{I(I+1)}}, \quad (19)$$

由式(7)可得

$$\mathcal{J}_I = \mathcal{J}^{(0)} \frac{(2I+1)\sin^2|\gamma|}{|\gamma| \sin(2I+1)|\gamma|}, \quad (20)$$

这意味着转动惯量是  $I$  的增函数  $\mathcal{J}_I = \mathcal{J}_0 \frac{(2I+1)\sin|\gamma|}{|\gamma| \sin(2I+1)|\gamma|}, \quad (21)$

这里  $\mathcal{J}_0$  是基态 ( $I=0$ ) 的转动惯量  $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}^{(0)} \frac{\sin|\gamma|}{|\gamma|}, \quad (22)$

$\mathcal{J}_0$  与  $\mathcal{J}^{(0)}$  差一个减弱因子  $\frac{\sin|\gamma|}{|\gamma|}$ , 是由于  $q$  形变所造成的. 当  $|\gamma| \rightarrow 0$  时,  $\mathcal{J}_0 \rightarrow$

$\mathcal{J}^{(0)}$ . 当  $I \rightarrow I_{\max}$  [即  $(2I+1)|\gamma| \sim \frac{\pi}{2}$ ] 可估算出  $(\mathcal{J}_I - \mathcal{J}_0)/\mathcal{J}_0$  约为 0.7, 似乎比

观测到的结果小一些<sup>[17]</sup>(当  $I$  约为 20—30,  $(\mathcal{J}_I - \mathcal{J}_0)/\mathcal{J}_0$  约为 1).

另外一个有意思的物理量是原子核的软度 (softness), 定义为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{J}_I} \left. \frac{d\mathcal{J}_I}{dI} \right|_{I=0}, \quad (23)$$

由式(20), 可得

$$\begin{aligned} \sigma &= 2(1 - |\gamma| \cot|\gamma|) \\ &= \frac{2}{3} |\gamma|^2 \left( 1 + \frac{1}{15} |\gamma|^2 + \frac{2}{315} |\gamma|^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\approx \frac{2}{3} |\gamma|^2, \quad (24)$$

所以  $q$  形变与核软度直接有关。通常  $|\gamma|$  约为 0.03—0.06, 所以  $\sigma$  约为  $6 \times 10^{-4}$ — $2.4 \times 10^{-3}$ 。此值似比 VMI 模型中采用的值小一些<sup>[9]</sup>。

作者感谢宋行长教授向我们介绍了量子群理论的近期进展以及有益的讨论。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] L. D. Faddeev, in: Les Houches Lectures, (1982).
- [ 2 ] W. G. Drinfeld, Quantum Groups, Proc. ICM (Berkeley, 1986), p. 798.
- [ 3 ] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63.
- [ 4 ] L. G. Biedenharn, *J. Phys.*, **A22**(1989), L873.  
A. J. Macfarlane, *J. Phys.*, **A22**(1989), 4581.  
C. P. Sun and H. C. Hu, *J. Phys.*, **A22**(1989), L983.  
Y. J. Ng, *J. Phys.*, **A23**(1990), 1023.
- [ 5 ] X. C. Song, *J. Phys.*, **A23**(1990), L821.  
B. Y. Hou, B. Y. Hou and Z. Q. Ma, *Commun. Theor. Phys.* (Beijing), **13**(1990), 181.
- [ 6 ] P. P. Raychev, R. P. Roussev, and Yu. F. Smirnov, *J. Phys. G*, to be Published.
- [ 7 ] Dennis Bonatsos, E. N. Argyres, S. B. Drenska, P. P. Raychev, R. P. Roussev, and Yu. F. Smirnov, *Phys. Lett.*, **B251**(1990), 477.
- [ 8 ] C. L. Mallmann, *Phys. Rev. Lett.*, **2**(1959), 507.
- [ 9 ] M. A. J. Mariscotti, G. Scharff-Goldhaber, and B. Buck, *Phys. Rev.*, **178**(1969), 1864.  
G. Scharff-Goldhaber, C. Dover, and A. L. Goodman, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **26**(1976), 239.
- [ 10 ] J. L. Wood and R. W. Fink, *Nucl. Phys.*, **A224** (1974), 589.
- [ 11 ] A. Bohr and B. R. Mottelson, Nuclear Structure, Vol. II, Nuclear Deformations. Benjamin, New York (1975).
- [ 12 ] S. M. Harris, *Phys. Rev. Lett.*, **13**(1964), 663; *Phys. Rev.*, **B138**(1965), 589.
- [ 13 ] C. S. Wu and J. Y. Zeng, *Commun. Theor. Phys.* (Beijing), **8**(1987), 51.  
H. X. Huang, C. S. Wu, and J. Y. Zeng, *Phys. Rev.*, **C39**(1989), 1617.
- [ 14 ] F. X. Xu, C. S. Wu, and J. Y. Zeng, *Phys. Rev.*, **C40**(1989), 2337.
- [ 15 ] B. R. Mottelson, Proc. Nuclear Structure Symposium of Thousand Lakes, Joutsa, 1970.  
Nordisk Institut for Theoretisk Atomfysik, Nordita, Report No. 417.
- [ 16 ] R. Bengtsson and S. Frauendorf, *Nucl. Phys.*, **A327**(1979), 139.
- [ 17 ] M. J. de Voigt, J. Dudek, and Z. Szymanski, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 949.

## $SU_q(2)$ Analysis of Nuclear Rotational Spectra

MENG JIE    WU CHONGSHI    ZENG JINYAN

(Department of Physics, Peking University, Beijing 100871)

### ABSTRACT

The validity of the quantum group  $SU_q(2)$  expression for the nuclear rotational spectrum is investigated thoroughly. Analyses (including the Mallmann plots, the relations for the  $I(I+1)$  expansion coefficients, energy spectra, etc.) definitely display a systematical deviation of the  $SU_q(2)$  prediction from the experimental data available for the even-even rare-earth and actinide nuclei. Only within a limited range of angular momentum the  $SU_q(2)$  expression is suitable for rotational spectra. A significant angular momentum dependence of  $q$ -deformation parameter is found. The  $q$ -deformation is directly related to the nuclear softness.