第15卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 2
1991年2月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Feb., 1991

$SO_5 \supset SU_2 \oplus SU_2 \supset U_1 \oplus U_1$ 及 $SO_5 \supset U_1 \oplus U_1$ 的矢量相干态表示

潘 峰

(辽宁师范大学物理系，大连 116022)

摘 要

本文讨论了 $SO_5 \supset SU_2 \oplus SU_2 \supset U_1 \oplus U_1$ 及 $SO_5 \supset U_1 \oplus U_1$ 的 VCS 表示. 计算了 $SO_5 \supset SU_2 \oplus SU_2$ 的约化矩阵元，并利用K矩阵技术确定了 SO_5 权的多重度.

一、引 言

SO_5 群及其相应的群链约化在许多物理问题中都有十分重要的应用. 例如，原子核的形状四极振动问题[1]，描述质子-中子集体运动的准旋模型[2]，等等都要涉及 SO_5 群在相应群链约化下算符矩阵元的计算.

大量工作表明，矢量相干态（VCS）理论及K矩阵技术在处理群表示论的许多计算问题中是十分有力的工具. 本文将着重讨论 SO_5 代数链的 VCS 表示. SO_5 具有如下代数链:

$$SO_5 \supset SO_4 \supset U_2 \supset U_1, \tag{1.1a}$$
$$\supset SO_4 \supset SO_3 \supset SO_2, \tag{1.1b}$$
$$\supset SO_3 \supset SO_2, \tag{1.1c}$$
$$\supset U_2 \sim SO_2 \oplus SO_3 \supset U_1, \tag{1.1d}$$
$$\supset SU_2 \oplus SU_2 \supset U_1 \oplus U_1, \tag{1.1e}$$
$$\supset U_1 \oplus U_1. \tag{1.1f}$$

需要指出的是 SO_4 局部同构于 $SU_2 \oplus SU_2$; SO_5 局部同构于 SP_4，所以所有 SO_5 的结果也适用于 SP_4. 如文献[3]所指出的，VCS 理论不能直接应用于(1.1b)及(1.1c)，而(1.1a)和(1.1d)的 VCS 表示已分别在文献[4]，[5]中讨论过. 所以本文将讨论(1.1e)及(1.1f)的 VCS 表示.

二、$SO_5 \supset SU_2 \oplus SU_2 \supset U_1 \oplus U_1$ 的 VCS 表示

SO_5 的元素可记为 $SU_2 \oplus SU_2$ 代数 $\nu_i, \tau_i (i=0, \pm 1)$ 及双重旋量 $T_{\alpha\beta}\left(\alpha, \beta = \pm\frac{1}{2}\right)$.

本文1989年11月11日收到.

它们满足如下对易关系[1]

$$[\nu_0,\nu_\pm]=\pm\nu_\pm,\ [\nu_+,\nu_-]=-\nu_0,$$
$$[\tau_0,\tau_\pm]=\pm\tau_\pm,\ [\tau_+,\tau_-]=-\tau_0,$$
$$[\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu}]=0. \tag{2.1a}$$
$$[\nu_0,T_{\alpha\beta}]=\alpha T_{\alpha\beta},\ [\tau_0,T_{\alpha\beta}]=\beta T_{\alpha\beta},$$
$$[\nu_\pm,T_{\alpha\beta}]=\mp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp\alpha\right)\left(\frac{1}{2}\pm\alpha+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}T_{\alpha\pm1\beta},$$
$$[\tau_\pm,T_{\alpha\beta}]=\mp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp\beta\right)\left(\frac{1}{2}\pm\beta+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}T_{\alpha\beta\pm1}, \tag{2.1b}$$
$$[T_{\pm\frac{1}{2}\frac{1}{2}},T_{\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}]=\sqrt{\frac{1}{2}}\nu_\pm,\ [T_{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}},T_{-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}]=\sqrt{\frac{1}{2}}\tau_\pm,$$
$$[T_{\pm\frac{1}{2}\frac{1}{2}},T_{\mp\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}]=\frac{1}{2}(\nu_0\pm\tau_0). \tag{2.1c}$$

我们令

$$A_1=T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}},\ A_2=T_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}},$$
$$B_1=T_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}},\ B_2=-T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

显然，

$$A_i^\dagger=B_i,\ i=1,2. \tag{2.3}$$

产生类算符 $A_i(i=1,2)$ 及 ν_+ 满足

$$\begin{pmatrix}A_i\\ \nu_+\end{pmatrix}\left|\begin{matrix} & (v_1v_2) & \\ \frac{1}{2}(v_1+v_2) & \frac{1}{2}(v_1-v_2) & \\ \frac{1}{2}(v_1+v_2) & M & \end{matrix}\right\rangle=0. \tag{2.4}$$

其 VCS 波函数定义为[4]

$$\Psi\ \ y,\ z\ =\sum_M\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}(v_1+v_2) & \frac{1}{2}(v_1-v_2)\\ \frac{1}{2}(v_1+v_2) & M\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\frac{1}{2}(v_1+v_2) & \frac{1}{2}(v_1-v_2)\\ \frac{1}{2}(v_1+v_2) & M\end{matrix}\ |e^Z|\Psi\right\rangle, \tag{2.5}$$

其中 $Z=z_iA_i+y\nu_+$.

利用文[4]的方法，容易求出 $SO_5\supset SU_2\oplus SU_2\supset U_1\oplus U_1$ 的如下 VCS 表示，

$$\Gamma(A_1)=\partial_1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}z_2\partial_y,$$
$$\Gamma(A_2)=\partial_2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}z_1\partial_y,$$
$$\Gamma(B_1)=-\sqrt{\frac{1}{2}}y\partial_2+\frac{1}{4}z_1y\partial_y+\frac{1}{2}z_1v_1$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}}z_2\tau_-^{in}-\frac{1}{2}z_1\left(y\partial_y+\frac{1}{2}z\cdot\partial\right),$$

$$\Gamma(B_2)=\sqrt{\frac{1}{2}}y\partial_1+\frac{1}{4}z_2y\partial_y+\frac{1}{2}z_2V_2$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2}}z_1\tau_+^{in}-\frac{1}{2}z_2\left(y\partial_y+\frac{1}{2}z\cdot\partial\right),$$

$$\Gamma(\nu_+)=\partial_y,$$

$$\Gamma(\nu_-)=-\nu_0^{in}y+\frac{1}{2}y(y\partial_y+z\cdot\partial)+\frac{1}{2}(z\times z)^{(1)}\cdot\tau^{in},$$

$$\Gamma(\nu_0)=\nu_0^{in}-y\partial_y-\frac{1}{2}z\cdot\partial=\nu_0^{in}+\nu_0^c,$$

$$\Gamma(\tau_+)=\tau_+^{in}+\sqrt{\frac{1}{2}}z_2\partial_1=\tau_+^{in}+\tau_+^c,$$

$$\Gamma(\tau_-)=\tau_-^{in}-\sqrt{\frac{1}{2}}z_1\partial_2=\tau_-^{in}+\tau_-^c,$$

$$\Gamma(\tau_0)=\tau_0^{in}-\frac{1}{2}z_1\partial_1+\frac{1}{2}z_2\partial_2=\tau_0^{in}+\tau_0^c, \tag{2.6}$$

其中

$$\nu_0^{in}=\frac{1}{2}(v_1+v_2),\quad \tau_0^{in}=\frac{1}{2}(v_1-v_2). \tag{2.7}$$

再引入如下辅助算符:

$$\hat{\Lambda}_0=-\tau^{in}\cdot\tau^c-\nu_0^{in}\nu_0^c-\frac{1}{8}(z\cdot\partial)^2+\frac{1}{8}(z\cdot\partial)-\frac{1}{4}y\partial_y(z\cdot\partial),$$

$$\hat{\Lambda}_1=-\nu_0^{in}y\partial_y+\frac{1}{2}y\partial_y(z\cdot\partial)+\frac{1}{4}(y\partial_y)^2-\frac{1}{4}(y\partial_y), \tag{2.8}$$

使

$$\Gamma(B_i)=(-1)^i\sqrt{\frac{1}{2}}y\partial_j+[\hat{\Lambda}_0,z_i],$$

$$\Gamma(\nu_-)=[\hat{\Lambda}_1,y]+\frac{1}{2}(z\times z)^{(1)}\cdot\tau^{in}, \tag{2.9}$$

在 (2.9) 式中,当 $i=1,2$ 时, $j=2,1$.

其正交的 Bargmann 基矢可写为

$$\left\langle y,z\left|(v_1v_2)^{I_{M_I}}_{SM_S};J\right.\right\rangle=[(S-M_S)!]^{\frac{1}{2}}y^{S-M_S}\left[Z^{(J)}(z)\times\left|\begin{matrix}(v_1-v_2)/2\\(v_1+v_2)/2\end{matrix}\right\rangle\right]^{(I)}_{M_I}, \tag{2.10}$$

其中 $S=\frac{1}{2}(v_1+v_2)-J$, 且

$$Z_\mu^{(J)}(z)=\frac{z_1^{J-\mu}z_2^{J+\mu}}{[(J-\mu)!(J+\mu)!]^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.11}$$

需要指出的是在幺正条件 (2.3) 下,变量 z_1,z_2 与双重旋量 $T_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}},-T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 的变换性质

相同。

容易求出其 K^2 矩阵[4]

$$K^2(ISM_S)=K^2(IS)K^2(SM_S), \tag{2.12}$$

$$K^2(SM_S)=\frac{(2S)!\,(S-M_S)!}{2^{S-M_S}(S+M_S)!}, \tag{2.13}$$

而 $K^2(IS)\equiv K^2(IJ)$ 的递推公式为

$$\frac{K^2\left(I'J+\frac{1}{2}\right)}{K^2(IJ)}=\Lambda_0\left(I'J+\frac{1}{2}\right)-\Lambda_0(IJ)+\sqrt{\frac{1}{2}}\,(2S+1)^{-1}$$

$$\times\frac{\left\langle \begin{matrix} I' \\ S-\frac{1}{2}\ \ S-\frac{1}{2};\end{matrix}\ J+\frac{1}{2}\left\|(z\times z)^{(1)}\cdot\tau^{in}\right\|\begin{matrix} I' \\ S+\frac{1}{2}\ \ S+\frac{1}{2};\end{matrix}\ J-\frac{1}{2}\right\rangle}{\left\langle \begin{matrix} I' \\ S-\frac{1}{2}\ \ S-\frac{1}{2};\end{matrix}\ J+\frac{1}{2}\|z\|\begin{matrix} I \\ SS\end{matrix};J\right\rangle}$$

$$\times\left\langle \begin{matrix} I' \\ S+\frac{1}{2}\ \ S+\frac{1}{2};\end{matrix}\ J-\frac{1}{2}\left\|\partial\right\|\begin{matrix} I \\ SS\end{matrix};J\right\rangle. \tag{2.14}$$

其中 z 的约化矩阵元可进一步表为

$$\left\langle \begin{matrix} I' \\ S+\frac{1}{2}\ \ S+\frac{1}{2};\end{matrix}\ J+\frac{1}{2}\left\|z\right\|\begin{matrix} I \\ SS\end{matrix};J\right\rangle$$

$$=U\left(\frac{1}{2}(V_1-V_2),\ J,\ I',\ \frac{1}{2};\ I,J+\frac{1}{2}\right)\left\langle J+\frac{1}{2}\left\|z\right\|J\right\rangle, \tag{2.15}$$

这里U是 Racah W 系数的幺正形式。而约化矩阵元

$$\left\langle J+\frac{1}{2}\left\|z\right\|J\right\rangle=(2J+1)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.16}$$

为了解析地求出 $K^2(IJ)$ 子矩阵，我们令

$$S=\nu_0^{in}-\frac{1}{2}(p+q),$$

$$I=\tau_0^{in}+\frac{1}{2}(p-q), \tag{2.17}$$

其中 p,q 可取保证 $S,I\geqslant 0$ 的正整数或零。从 (2.14) 式我们得到

$$\frac{K^2(pq+1)}{K^2(pq)}=\frac{(2v_1-q+2)(v_1+v_2-q+1)}{4(v_1+v_2-p-q+1)},$$

$$\frac{K^2(p+1q)}{K^2(pq)}=\frac{(v_1+v_2-p+1)(2v_2-p)}{4(v_1+v_2-p-q+1)}, \tag{2.18}$$

由 $K^2(00)=1$，通过逐步迭代我们最后得到

$$K^2(IS)=\frac{(2v_1+2)!\,(2v_2)!\,(v_1+v_2+1)!\,(2S+1)!}{4^{v_1+v_2-2S}(v_1+S+I+2)!\,(v_2+S+I+1)!\,(v_1-I+S+1)!\,(v_2-I+S)!}. \tag{2.19}$$

由于 $K^2(IS)$ 是一维的，所以 $SO_5\downarrow SU_2\oplus SU_2$ 是简单可约的。在(2.17)的基础上，I,S 的取值还要保证(2.19)式中的阶乘项不出现负数。例如，当 $v_2=0$ 时，由于 $I\geqslant S$，为了保证(2.19)式分母上的最后一个阶乘因子不为负，必须取 $S=I$。这样，上述条件及(2.17)式综合起来就给出了 $SO_5\downarrow SU_2\oplus SU_2$ 的分歧律公式。

幺正表示算符 $\gamma(B_i)$ 的约化矩阵元可通过下式求出[4]

$$\left\langle \begin{matrix} I' \\ S-\frac{1}{2} \end{matrix}; J+\frac{1}{2} \middle\| \gamma(B_i) \middle\| \begin{matrix} I \\ S \end{matrix}; J \right\rangle = \left[\frac{K\left(I'S-\frac{1}{2}\right)}{K(IS)}\right]^{1/2}$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} I' \\ S-\frac{1}{2} \end{matrix}; J+\frac{1}{2} \middle\| z \middle\| \begin{matrix} I \\ S \end{matrix}; J \right\rangle \left\langle SS\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \middle| S-\frac{1}{2}\; S-\frac{1}{2} \right\rangle^{-1}. \tag{2.20}$$

其中上式最后一项为 SU_2 CG 系数的倒数。其进一步的结果可表为

$$\left\langle \begin{matrix} I+\frac{1}{2} \\ S-\frac{1}{2} \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{(v_1-I+S+1)(v_2-I+S)(v_1-S+I+2)(v_2-S+I+1)}{(2S)(2I+2)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} I-\frac{1}{2} \\ S-\frac{1}{2} \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{(v_1+S+I+2)(v_2+S+I+1)(v_1-S-I+1)(-v_2+S+I)}{(2S)(2I)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.21}$$

其它约化矩阵元可通过其厄密共轭得到，

$$\left\langle \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} I' \\ S' \end{matrix} \right\rangle = \left[\frac{(2I'+1)(2S'+1)}{(2I+1)(2S+1)}\right]^{\frac{1}{2}} (-)^{I'-I+S'-S+1} \times \left\langle \begin{matrix} I' \\ S' \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.22}$$

最后，用类似文献[3]的方法，我们得到 $SO_5\supset SU_2\oplus SU_2\supset U_1\oplus U_1$ 的正交基矢如下：

$$\left| \begin{matrix} (v_1v_2) \\ I\ M_I \\ S\ M_S \end{matrix} \right\rangle = \left[\frac{4^{v_1+v_2-2S}(v_1+S+I+2)!(v_2+S+I+1)!}{(2v_1+2)!(2v_2)!(v_1+v_2+1)!}\right.$$

$$\left.\times \frac{(v_1-I+S+1)!(v_2-I+S)!2^{S-M_S}(S+M_S)!}{(2S+1)!(2S)!(S-M_S)!}\right]^{1/2}$$

$$\times \sum_{\mu_1\mu_2} \left\langle \frac{1}{2}(v_1-v_2)M_I-\mu_1 J\mu_1 \middle| IM_I \right\rangle$$

$$\times \frac{[(J+\mu_1)!(J-\mu_1)!]^{\frac{1}{2}}}{(J-\mu_1-\mu_2)!(J+\mu_1-\mu_2)!\mu_2!}$$

$$\times (-)^{J+\mu_1-\mu_2}_{-} v^{S-M_S+\mu_2}_{-} T^{J-\mu_1-\mu_2}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\ T^{J+\mu_1-\mu_2}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

$$\times \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}(v_1-v_2) & M_I-\mu_1 \\ \frac{1}{2}(v_1+v_2) & \frac{1}{2}(v_1+v_2) \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.23}$$

其中求和号后的第一项为 SU_2 CG 系数.

三、$SO_5\supset U_1\oplus U_1$ 的 VCS 表示

为了方便,我们把 SO_5 代数的元素表为 $V_\nu^{(1)}(\nu=0,\pm1)$ 及 $V_\mu^{(3)}(\mu=0,\pm1,\pm2,\pm3)$, 它们分别为 SO_3 的一阶及三阶张量算符. 并令

$$A_1=\sqrt{\frac{2}{5}}V_1^{(1)}+\sqrt{\frac{3}{5}}V_1^{(3)},\quad A_4=\sqrt{\frac{3}{5}}V_1^{(1)}-\sqrt{\frac{2}{5}}V_1^{(3)},$$

$$A_2=V_2^{(3)},\quad A_3=V_3^{(3)}; \tag{3.1a}$$

并且

$$B_i=A_i^\dagger,\quad i=1,2,3,4. \tag{3.1b}$$

A_i 满足

$$A_i\left|\begin{matrix}(v_1v_2)\\ M=2v_1+v_2\quad N=v_1-2v_2\end{matrix}\right\rangle=0, \tag{3.2}$$

其中 M,N 分别为 $\hat{M}=\sqrt{10}\,V_0^{(1)}$ 及 $\hat{N}=\sqrt{10}\,V_0^{(3)}$ 的量子数. A_i, B_i, $\hat{M}$, $\hat{N}$ 之间的对易关系为

$$[A_1,A_3]=[A_2,A_3]=[A_1,A_2]=[A_3,A_4]=0,$$

$$[A_2,A_4]=\sqrt{\frac{1}{2}}A_3,\quad [A_1,A_4]=\sqrt{\frac{1}{2}}A_2, \tag{3.3a}$$

$$[\hat{M},A_1]=A_1,\quad [\hat{M},A_2]=2A_2,$$
$$[\hat{M},A_4]=A_4,\quad [\hat{M},A_3]=3A_3,$$
$$[A_1,\hat{N}]=-3A_1,\quad [A_2,\hat{N}]=-A_2,$$
$$[A_3,\hat{N}]=A_3,\quad [A_4,\hat{N}]=2A_4, \tag{3.3b}$$
$$[A_1,B_3]=[A_3,B_1]=[A_4,B_1]=[A_1,B_4]=0,$$

$$[A_2,B_3]=-\sqrt{\frac{1}{2}}B_4,\quad [A_2,B_1]=-\sqrt{\frac{1}{2}}A_4,$$

$$[A_4,B_3]=\sqrt{\frac{1}{2}}B_2,\quad [A_1,B_2]=-\sqrt{\frac{1}{2}}B_4,$$

$$[A_3,B_4]=\sqrt{\frac{1}{2}}A_2,\quad [A_3,B_2]=-\sqrt{\frac{1}{2}}A_4,$$

$$[A_2,B_4]=\sqrt{\frac{1}{2}}A_1,\quad [A_4,B_2]=\sqrt{\frac{1}{2}}B_1,$$

$$[A_1,B_1]=\frac{1}{10}(\hat{M}+3\hat{N}),\quad [A_2,B_2]=\frac{1}{10}(2\hat{M}+\hat{N}),$$

$$[A_3,B_3]=\frac{1}{10}(3\hat{M}-\hat{N}),\quad [A_4,B_4]=\frac{1}{10}(\hat{M}-2\hat{N}). \tag{3.3c}$$

容易证明

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \\ \partial_4 \end{pmatrix} e^{z\cdot A} = \begin{pmatrix} A_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_4 A_2 + \frac{1}{12} z_4^2 A_3 \\ A_2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_4 A_3 \\ A_3 \\ A_4 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_1 A_2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_2 A_3 - \frac{1}{12} z_1 z_4 A_3 \end{pmatrix} e^{z\cdot A}, \tag{3.4}$$

其中 $z \cdot A = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3 + z_4A_4$。

利用文献[3]给出的定义,不难求出如下 $SO_5 \supset U_1 \oplus U_1$ 的 VCS 表示,

$$\Gamma(A_1) = \partial_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_4\partial_2 + \frac{1}{24} z_4^2 \partial_3,$$

$$\Gamma(A_2) = \partial_2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_4\partial_3,$$

$$\Gamma(A_3) = \partial_3,$$

$$\Gamma(A_4) = \partial_4 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_1\partial_2 + \frac{1}{2} z_2\partial_3 - \frac{1}{24} z_1 z_4 \partial_3,$$

$$\Gamma(\hat{M}) = M^{in} - (z_1\partial_1 + 2z_2\partial_2 + 3z_3\partial_3 + z_4\partial_4),$$

$$\Gamma(\hat{N}) = N^{in} - (3z_1\partial_1 + z_2\partial_2 - z_3\partial_3 - 2z_4\partial_4),$$

$$\begin{aligned}\Gamma(B_1) = {} & \frac{1}{10} z_1(M^{in} + 3N^{in}) - \sqrt{\frac{1}{2}}\, z_2\partial_4 - \frac{1}{4} z_1(2z_1\partial_1 + z_2\partial_2 - z_4\partial_4) \\ & - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_1^2 z_4\partial_2 - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_1 z_2 z_4 \partial_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(B_2) = {} & -\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_3\partial_4 + \frac{1}{10} z_2(2M^{in} + N^{in}) - \frac{1}{4} z_2(z_1\partial_1 + z_4\partial_4) \\ & - \frac{1}{4} z_1 z_3 \partial_2 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_1 z_4 N^{in} - \frac{1}{4} z_2(z_1\partial_1 + z_2\partial_2 + z_3\partial_3) \\ & - \frac{1}{24}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_1 z_4(6z_1\partial_1 + 3z_2\partial_2 - z_3\partial_3 - 2z_4\partial_4) - \frac{1}{32} z_1 z_2 z_4^2 \partial_3 \\ & - \frac{5}{96} z_1^2 z_4^2 \partial_2 - \frac{1}{576}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_1^2 z_4^3 \partial_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(B_3) = {} & \frac{1}{10} z_3(3M^{in} - N^{in}) - \frac{1}{2} z_3(z_2\partial_2 + z_3\partial_3 + z_4\partial_4) \\ & - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_2^2\partial_1 + \frac{1}{20}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_2 z_4(M^{in} + 3N^{in}) \\ & - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}\, z_2 z_4(2z_1\partial_1 + z_2\partial_2) + \frac{1}{24} z_1 z_4^2 N^{in}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{96}z_1z_4^2(3z_1\partial_1+2z_2\partial_2-2z_4\partial_4)+\frac{1}{96}z_1^2z_4^2\partial_3$$

$$-\frac{1}{64}\sqrt{\frac{1}{2}}z_1^2z_4^3\partial_2-\frac{1}{90}\sqrt{\frac{1}{2}}z_1z_2z_4^3\partial_3-\frac{1}{2304}z_1^2z_4^4\partial_3,$$

$$\Gamma(B_4)=\frac{1}{10}z_4(M^{in}-2N^{in})+\sqrt{\frac{1}{2}}z_2\partial_1+\sqrt{\frac{1}{2}}z_3\partial_2$$

$$+\frac{1}{4}z_4(z_1\partial_1-z_4\partial_4-z_3\partial_3)+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2}}z_1z_4^2\partial_2$$

$$+\frac{1}{24}\sqrt{\frac{1}{2}}z_2z_4^2\partial_3, \tag{3.5}$$

其中 $M^{in}=2v_1+v_2$，$N^{in}=v_1-2v_2$.

其正交的 Bargmann 基矢可写为

$$\left|\begin{matrix}(v_1v_2)\\ 2v_1+v_2-\alpha-2\beta-3\gamma-\delta\\ v_1-2v_2-3\alpha-\beta+\gamma+2\delta\end{matrix}\right\rangle=\frac{z_1^\alpha z_2^\beta z_3^\gamma z_4^\delta}{(\alpha!\beta!\gamma!\delta!)^{\frac{1}{2}}}\left|\begin{matrix}(v_1v_2)\\ 2v_1+v_2\\ v_1-2v_2\end{matrix}\right\rangle. \tag{3.6}$$

根据 Racah 定理，其最高权是简单的[6]，显然 $K^2_{(0)(0)}(2v_1+v_2,\ v_1-2v_2)=1$. 其它 K^2 矩阵由公式[3]

$$K^2\Gamma^\dagger(A_i)=\Gamma(B_i)K^2. \tag{3.7}$$

的矩阵元关系决定. 为了避免冗长的推导，我们仅写出头几个 K^2 矩阵的值.

$$K^2_{(1000)(1000)}(2v_1+v_2-1,\ v_1-2v_2-3)=\frac{1}{2}(v_1-v_2),$$

$$K^2_{(0001)(0001)}(2v_1+v_2-1,\ v_1-2v_2+2)=\frac{1}{2}v_2,$$

$$K^2_{(2000)(2000)}(2v_1+v_2-2,\ v_1-2v_2-6)=\frac{1}{4}(v_1-v_2)(v_1-v_2-1),$$

$$K^2_{(0002)(0002)}(2v_1+v_2-2,\ v_1-2v_2+4)=\frac{1}{8}v_2(2v_2-1),$$

$$K^2(2v_1+v_2-2,v_1-2v_2-1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}v_1 & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}(v_1-2v_2)\\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}(v_1-2v_2) & \frac{1}{16}[4(v_1-v_2)v_2+v_1]\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

其中矩阵元的下标变量为 $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

由于权的多重性完全由 K^2 矩阵异于零的数目决定，所以 $v_1=v_2$ 时，权 $(2v_1+v_2-1,\ v_1-2v_2-3)$ 不出现；$v_2=0$ 时，$(2v_1-1,\ v_1+2)$ 及 $(2v_1-2,\ v_1+4)$ 不出现；而 $(2v_1+v_2-2,\ v_1-2v_2-1)$ 一般总是双重的；等等. 这样 SO_5 的权及多重性问题完全由 K^2 矩阵异于零的数目决定.

四、结 论

本文详细讨论了 SO_5 及其代数链的 VCS 表示。其它的李代数，如 g_2 等完全可由类似的方法进行计算。

VCS 理论及 K 矩阵技术应用于群表示论的优点在于：把复杂的约化矩阵元计算问题转换为 Bargmann 空间 z 变量的约化矩阵元计算，而后者的运算一般都是十分简便的。另一方面，在确定李代数矩阵表示的同时，还确定了其正交基矢，特别同时确定了群的分歧律。而在传统的群表示论中，在计算约化矩阵元之前，必须用一套独立的方法[7]首先确定分歧律。

参 考 文 献

[1] 孙洪洲，高能物理与核物理，**4**(1980)，478.
[2] K. T. Hecht, *Nucl. Phys.*, **A493**(1989), 29.
[3] 潘峰，$SU_3\supset U_1\oplus U_1$ 的 VCS 表示，高能物理与核物理，待发表.
[4] D. J. Rowe, R. Le Blanc, and K. T. Hecht, *J. Math. Phys.*, **29**(1988), 287.
[5] O. Castanos, E. Chacon, and M. Moshinsky, C. Quesne, *J. Math. Phys.*, **26**(1985), 2102.
[6] G. Racah, *Ergeb. Exakt. Naturwiss.*, **37**(1965), 28.
[7] D.E.Littlewood, The Theory of Group Characters, 2nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1950.

Vector Coherent State Representations of $SO_5\supset SU_2\oplus SU_2\supset U_1\oplus U_1$ and $SO_5\supset U_1\oplus U_1$

PAN FENG
(*Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian* 116022)

ABSTRACT

VCS representations of $SO_5\supset SU_2\oplus SU_2\supset U_1\oplus U_1$ and $SO_5\supset U_1\oplus U_1$ are discussed. Reduced matrix elements for $SO_5\supset SU_2\oplus SU_2$ are derived. The multiplicity of a weight for SO_5 is determined by using the K-matrix technique.