第15卷 第10期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 10
1991年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 1991

快报

相对论二体波动方程及夸克偶素短程作用

罗振飞 邱锡钧
（中国科学院上海原子核研究所，201800）

摘 要

广泛应用于非相对论量子力学的费曼-海尔曼定理被推广到相对论二体波动方程并由此得到了计算介子质量的理论公式．分析表明本文所考虑的两种波动方程不能很好地描述夸克偶素的短程相互作用．

利用相对论二体波动方程计算介子质量谱一直是人们感兴趣的课题．用于这方面计算的主要有从狄拉克约束力学推导的二体方程[1]，无自旋 Salpeter 方程[2]（自旋部分通过唯象势引进，忽略它不影响下面的讨论结果）和唯象的二体狄拉克方程[3]等．前者在描述包括轻、重夸克的介子质量谱方面是相当成功的，且只用一个可调参数．而后两方程一般需要至少5个参数．本文的目的就是从费曼-海尔曼定理出发，推导介子的质量公式，并通过简单的分析解释为什么在利用后两个方程计算时必须引进一些附加的（除 QCD 支持的）短程作用项（从而增加了可调参数）才能较好地解释实验观察的介子谱．

在非相对论量子力学中，费曼-海尔曼定理被广泛地应用并得到了许多有意义的结果[4]．对波动方程

$$H(\lambda)\psi(\lambda) = E(\lambda)\psi(\lambda). \tag{1}$$

这里 E 是束缚态能量，ψ 是归一化波函数，我们有

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \left\langle \psi \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi \right\rangle. \tag{2}$$

最近，Lichtenberg[5] 曾成功地将该定理应用到相对论波动方程． 下面我们将利用费曼-海尔曼定理推导我们感兴趣的波动方程的束缚态能量表达式．

无自旋 Salpeter 方程在质心系中可写成

$$[\sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2} + U]\psi = E\psi. \tag{3}$$

在坐标表象中，$\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$，利用(2)式可得

$$\frac{\partial E}{\partial \hbar} = \frac{1}{\hbar}\left\langle \psi \left| \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_1^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_2^2}} \right| \psi \right\rangle. \tag{4}$$

本文1991年4月1日收到．

在动量表象中，$\boldsymbol{r}=i\hbar\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}$，则从(2)式有

$$\frac{\partial E}{\partial\hbar}=\frac{1}{\hbar}\langle\phi|\boldsymbol{r}\cdot\nabla U|\phi\rangle. \tag{5}$$

由于 $\frac{\partial E}{\partial\hbar}$ 的值不依赖于所选表象，我们得到适用于无自旋 Salpeter 方程的维里定理

$$\langle\phi|\boldsymbol{r}\cdot\nabla U|\phi\rangle=\left\langle\phi\left|\frac{p^2}{\sqrt{p^2+m_1^2}}+\frac{p^2}{\sqrt{p^2+m_2^2}}\right|\phi\right\rangle. \tag{6}$$

这与 Lucha 和 Schöberl 在相空间中利用膨胀算子的作法[6]所得到的结果一致。对(3)式两边求期待值并利用(6)式，即可得到束缚态能量

$$E^S=\left\langle\phi\left|\frac{m_1^2}{\sqrt{p^2+m_1^2}}+\frac{m_2^2}{\sqrt{p^2+m_2^2}}\right|\phi\right\rangle+\langle\phi|U+\boldsymbol{r}\cdot\nabla U|\phi\rangle. \tag{7}$$

接着，我们考虑唯象二体狄拉克方程(质心系)

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{p}+\beta_1(m_1+S)-\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{p}+\beta_2(m_2+S)+V]\phi=E\phi. \tag{8}$$

这里夸克-反夸克相互利用 S 作为 Lorentz 标量，V 作为 Lorentz 四矢量的第四分量[3]。利用完全类似的推导，我们有

$$\langle\phi|(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\cdot\boldsymbol{p}|\phi\rangle=\langle\phi|(\beta_1+\beta_2)\boldsymbol{r}\cdot\nabla S|\phi\rangle+\langle\phi|\boldsymbol{r}\cdot\nabla V|\phi\rangle. \tag{9}$$

而束缚态能量表为

$$\begin{aligned}E^D=&\langle\phi|(\beta_1+\beta_2)\boldsymbol{r}\cdot\nabla S|\phi\rangle+\langle\phi|\beta_1(m_1+S)\\&+\beta_2(m_2+S)|\phi\rangle+\langle\phi|V+\boldsymbol{r}\cdot\nabla V|\phi\rangle.\end{aligned} \tag{10}$$

至此已得到了分别基于无自旋 Salpeter 方程和唯象二体狄拉克方程的介子质量公式。

对典型的夸克-反夸克作用势 $S=ar$，$V=-\frac{K}{r}$，$U=S+V$，方程(7)和(10)分别给出

$$E^S=\left\langle\phi\left|\frac{m_1^2}{\sqrt{p^2+m_1^2}}+\frac{m_2^2}{\sqrt{p^2+m_2^2}}\right|\phi\right\rangle+\langle\phi|2ar|\phi\rangle. \tag{11}$$

$$E^D=\langle\phi|(\beta_1+\beta_2)ar|\phi\rangle+\langle\phi|\beta_1(m_1+ar)+\beta_2(m_2+ar)|\phi\rangle. \tag{12}$$

从上述两式可看出，利用无自旋 Salpeter 方程和唯象二体狄拉克方程计算介子质量谱时，(QCD 支持的) 夸克-反夸克短程作用由于 $\langle|V+\boldsymbol{r}\cdot\nabla V|\rangle$ 的出现相消。短程作用 $V=-K/r$ 的影响仅仅改变了体系波函数，而计算经验表明这对于准确预言轻夸克体系的质量谱是远远不够的。由此，我们可以解释为什么在文献[2]和[3]的处理中，为得到对整个介子谱的较好符合，总是必须引进附加的(除 $V=-K/r$ 外) δ 函数，阶跃函数，或比 $\frac{1}{r}$ 更奇异的函数项来描述夸克-反夸克的短程相互作用。而这些附加项的引进也就增加了一些可调参数。

如果夸克-反夸克间的相互作用采用 Richardson 势[7](文献[1]从利用狄拉克约束力学推导的二体方程和 Richardson 势出发，只用一个参数就很好地解释了介子质量谱)，则短程部分 $V\to\frac{1}{r\ln(\Lambda r)}$，这里 Λ 是 QCD 标度参数。从(7)和(10)式我们看到，在

用无自旋 Salpeter 方程和唯象二体狄拉克方程计算介子质量时，短程作用仍被部分地消除。

参　考　文　献

[1] H. W. Crater and P. V. Alstine, *Phys, Rev.*, **D37**(1988), 1982
[2] D. P. Stanley and D. Robson, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 3180; S. Godfrey and N. Isgur, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 189
[3] D. D. Brayshow, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 1465
[4] C. Quigg and J. L. Rosner, *Phys. Rep.*, **56**(1979), 167
[5] D. B. Lichtenberg, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 4196
[6] W. Lucha and F. F. Schöberl, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 2733
[7] J. Richardson, *Phys. Lett.*, **82B**(1979), 272

Relativistic Two-body Wave Equation and the Short-range Interaction of Quarkonium

LUO ZHENFEI　　QIU XIJUN

(*Shanghai Institute of Nuclear Research, Academia Sinica*, 201800)

ABSTRACT

The Feynman-Hellmann theorem widely used in nonrelativistic quantum mechanics is applied to relativistic two-body wave equations from which we obtain the meson mass formula It is shown that wave equations considered here are unable to describe the short-range interaction of quarkonium reasonably.