第 15 卷 第 1 期　　高能物理与核物理　　Vol. 15, No. 1
1991 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1991

快报

具有 Φ^4 相互作用的非拓扑孤子

倪致祥　　李新洲
(华东理论物理研究所，上海 200237)

摘　　要

在具有非线性自相互作用 $g\Phi^4$ 的可重正化标量场论中，本文研究了一类新的非拓扑孤子. 耦合常数 g 有一个临界值 g_{crit}，当 $g > g_{crit}$ 时，不存在稳定的非拓扑孤子.

一、引　　言

非拓扑孤子是经典场的稳定解[1]，场被禁闭在空间的一个有限区域并具有守恒的 Noether 荷. 新近，非拓扑孤子以孤子星[2]、夸克矿块[3]、Q-球[4]、宇宙中微子球[5]以及作为宇宙早期相变机制[6]等各种形式而被广泛研究. 我们也研究了非拓扑费米子弦的存在性和稳定性[7]. 作为李政道及其合作者的建议[8]，最简单的具有非拓扑孤子的可重整化场论将有二个标量场构成，它们是实标量场 σ 和复标量场 Φ. 我们考虑在离散对称性 $\sigma \to -\sigma$ 和整体 $U(1)$ 对称性 $\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$ 下不变的拉格朗日量

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + |\partial_\mu \Phi|^2 - U(|\Phi|, \sigma), \tag{1}$$

其中

$$U(|\Phi|, \sigma) = \frac{1}{4}\lambda(\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 + g^2|\Phi|^4 + \frac{\mu^2}{\sigma_0^2}|\Phi|^2\sigma^2. \tag{2}$$

上述拉氏量的球对称非拓扑孤子首先是由李政道等在 $g = 0$ 的特殊情形下进行研究的[8]. 本文将研究 $g \neq 0$ 的情形. 我们仅对 $\sigma_0^2 > 0$ 有兴趣，所以离散对称性在基态是自发破缺的，$\langle\sigma\rangle = \pm\sigma_0$. 另一方面，$U(1)$ 对称性是未破缺的，所以存在一个 Noether 流

$$J_\mu = -i(\Phi^*\partial_\mu\Phi - \Phi\partial_\mu\Phi^*), \tag{3}$$

与此相关的守恒荷为

$$Q = \int d^3 r J_0, \tag{4}$$

守恒荷 Q 是使得非拓扑孤子稳定的必要条件. 在本文中，我们将构造 $g \neq 0$ 的非拓扑孤子解，并指出耦合常数 g 有一个临界值 g_{crit}，当 $g > g_{crit}$ 时，不存在稳定的非拓扑孤

本文 1990 年 7 月 26 日收到.

子.

二、薄壁孤子解

从(3)和(4)式可知，具有非零荷的经典解 $\Phi(\boldsymbol{r}, t)$ 必须是依赖时间的. 选择如下的球对称形式

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = e^{i\omega t}\varphi(r)/\sqrt{2}, \tag{5}$$

$$\sigma(\boldsymbol{r}, t) = \sigma(r). \tag{6}$$

运动方程可以写作

$$\frac{1}{r}(r\varphi)'' = \frac{\mu^2\sigma^2}{\sigma_0^2}\varphi + g^2\varphi^3 - \omega^2\varphi, \tag{7}$$

$$\frac{1}{r}(r\sigma)'' = \lambda(\sigma^2 - \sigma_0^2)\sigma + \frac{\mu^2 f^2}{\sigma_0^2}\sigma. \tag{8}$$

非拓扑孤子解在原则上可利用如下方式构成：选取适当的参数值 ω、g、μ 和 λ 并利用边界条件 $\varphi(\infty) = 0$，$\sigma(\infty) = 1$ 及

$$\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\frac{d\sigma}{dr}\right|_{r=0} = 0.$$

利用方程(7)、(8)和边值条件，容易得到非拓扑孤子的数值解. 在本文中，为了得到解析解，我们采用薄壁极限（$Q \gg 1$）. 利用如下的球对称试探函数[8]，

$$\varphi = \begin{cases} f(r), & r \leqslant R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \tag{9}$$

$$\sigma = \begin{cases} h(r), & r \leqslant R, \\ 1 - \exp[-(r-R)/L], & r > R. \end{cases} \tag{10}$$

其中 R 和 L 是二个长度参数，R 是孤子的半径，由 $f(r)$ 的第一个零点决定. L 是孤子壁的宽度，它将内部的亚真空区域和外部的真真空区域隔开. 对于大 Q（孤子壁的宽度与半径相比小得多）联系于壁的能量是可以忽略的. 在薄壁极限 $L \to \infty$ 下，可将 $\sigma(r)$ 看作为阶梯函数[8]. 运动方程约化成

$$\frac{1}{r}(rf)'' = g^2 f^3 - \omega^2 f. \tag{11}$$

我们发现(11)式存在如下形式的解，

$$f = \frac{a_0 \sin\omega r}{r} + g^2 a_0^3 \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cdot (\omega r)^{2k}}{(2k+1)!}, \tag{12}$$

其中

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3g^2a_0^2 - 4, \quad a_3 = 19g^4a_0^4 - 35g^2a_0^2 + 17,$$
$$a_4 = \frac{619}{3}g^6a_0^6 - 488g^4a_0^4 + 366g^2a_0^2 - \frac{256}{3}, \cdots. \tag{13}$$

在弱耦合情形，$g \ll 1$，我们有

$$f \approx \frac{a_0 \sin\omega r}{r}. \tag{14}$$

将(14)式代入能量泛函,

$$E = \int d^3r \left\{\frac{1}{2}\omega^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi'(r)^2 + \frac{1}{2}\sigma'(r)^2 + U(\varphi,\sigma)\right\}$$

$$= \omega Q + \frac{\pi^4\lambda\sigma_0^4}{3\omega^3} + \frac{g^2Q^2\omega I}{4\pi^2}, \tag{15}$$

其中

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx \approx \frac{6}{25}. \tag{16}$$

对于固定的Q值,利用能量的最小值可以确定孤子半径R的值

$$R_{\min} \simeq \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{Q + \frac{Ig^2}{4\pi^2}Q^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{17}$$

在半径 $R_{\min}$ 处,非拓扑孤子的能量为

$$E \simeq \frac{4}{3}\pi\sigma_0\lambda^{\frac{1}{4}}Q^{\frac{3}{4}}\left(1 + \frac{g^2I}{4\pi^2}Q\right)^{\frac{3}{4}}. \tag{18}$$

三、稳定性条件

如果非拓扑孤子是固定荷的最低能相,则称它们是量子力学稳定的. 在 $g=0$ 的情形,我们知道

$$E \simeq \frac{4}{3}\pi\sigma_0\lambda^{\frac{1}{4}}Q^{\frac{3}{4}},$$

对于足够大的Q值,总能满足条件 $E<\mu Q$, 即非拓扑孤子不会弥散成自由粒子. 也就是说,存在一个 $Q_{\min}$, 当 $Q>Q_{\min}$ 时,非拓扑孤子是稳定的. 在 $g\neq 0$ 的情形,由于当Q增大时自相互作用能将变得更为重要,非拓扑孤子的能量将比 $g=0$ 时有所增加.对于 $\partial E/\partial Q>\mu$ 的情形, 我们必须考虑一部分荷进入孤子的内部区域, 而另一部分的荷成为自由粒子. 所以在 $g\neq 0$ 的情形, 存在一个最大荷 $Q_{\max}$, 如果 $Q>Q_{\max}$, 体系的最低能态是具有荷 $Q_{\max}$ 的非拓扑孤子加上 $Q-Q_{\max}$ 荷的自由粒子.

一个场论模型存在稳定的非拓扑孤子的条件是 $Q_{\max}>Q_{\min}$. 在 $g=0$ 理论中, 由于 $Q_{\max}\to\infty$, 所以这一条件是恒满足的.

下面我们利用这些一般讨论于薄壁孤子解,利用(18)式和 $E<\mu Q$, 我们有

$$\left(Q + \frac{4\pi^2}{g^2I}\right)^3 < \frac{81\pi^2Q}{4g^6I^3\lambda}\left(\frac{\mu}{\sigma_0}\right)^4. \tag{19}$$

Q的值依赖于g和 μ/σ_0, 这些都是与模型有关的参数. 容易计算得到

$$Q_{\max} = \frac{3\mu^2\pi}{g^3I\sigma_0^2}\sqrt{\frac{3}{I\lambda}}\cos\frac{\pi - \cos^{-1}\frac{4\pi\sigma_0^2g}{\mu^2}\sqrt{\frac{I\lambda}{3}}}{3} - \frac{4\pi^2}{g^2I}, \tag{20}$$

$$Q_{\min}=\frac{3\mu^2\pi}{g^3I\sigma_0^2}\sqrt{\frac{3}{I\lambda}}\cos\frac{\pi+\cos^{-1}\frac{4\pi\sigma_0^2 g}{\mu^2}\sqrt{\frac{I\lambda}{3}}}{3}-\frac{4\pi^2}{g^2I}. \tag{21}$$

耦合常数 g 存在一个临界值 g_{crit},

$$g_{crit}=\frac{3}{16\pi^2I\lambda}\left(\frac{\mu}{\sigma_0}\right)^4. \tag{22}$$

当 $g<g_{crit}$，则有 $Q_{\min}<Q_{\max}$，也就是说，当 Q 满足 $Q_{\min}<Q<Q_{\max}$ 时，非拓扑孤子解(5)和(6)是稳定的。当 $g>g_{crit}$ 时，不存在稳定的非拓扑孤子解。

四、讨　论

我们已经研究了一类新的非拓扑孤子解，并指出耦合常数 g 有一个临界值 g_{crit}，当 $g>g_{crit}$ 时，不存在稳定的非拓扑孤子。下面再进行三点简明的讨论：

1. 在 $g\to 0$ 的极限，从(20)和(21)式可得 $Q_{\max}\to\infty$，及 $Q_{\min}\to\lambda\left(\frac{4\pi\sigma}{3m}\right)^4$，这与李政道等人的研究[8]是一致的。

2. 拉格朗日量(1)对于离散对称性 $\sigma\to-\sigma$，在基态是自发破缺的，$\langle\sigma\rangle=\pm\sigma_0$。如果 $\sigma_0>1\text{MeV}$，将会导致熟知的畴壁问题，这可以附加明显的离散对称破缺项来消除。由于这些附加项非常小，所以不会影响本文的讨论。

3. 如果进一步引入规范相互作用，我们可以得到类似的结论，即规范耦合常数 e 有一个临界值 e_{crit}，当 $e>e_{crit}$ 时，不存在稳定的非拓扑孤子。关于这些结果，我们将另文发表。

参　考　文　献

[1] T. D. Lee, *Phys. Rep.*, **C23**(1976), 254.
[2] T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3637.
[3] E. Witten, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 272.
[4] S. Colemann, *Nucl. Phys.*, **B262**(1985), 263.
[5] B. Holdom, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 1000.
[6] J. Frieman, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 2101.
[7] Shi Xin and Li Xinzhou, *Phys. Rev.*, **D42**(1990), in Press.
[8] R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 2739

A Class of Non-Topological Solitons With Self-Interactions Φ^4

NI ZHIXIANG LI XINZHOU

(*East China Institute for Theoretical Physics, Shanghai* 200237)

ABSTRACT

A new class of non-topological solitons is constructed in renormalizable scalar field theories with non-linear self-interactions. There exists a critical value g_{crit} for the coupling g. For $g > g_{crit}$ there are no stable non-topological solitons.