第14卷 第11期　高能物理与核物理　Vol. 14, No. 11
1990年11月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Nov., 1990

BJL 技术与阿贝尔陪集纯规范场理论手征反常的微扰论研究

井思聪　阮浩
（中国科技大学近代物理系，合肥）

摘　　要

本文首次进行了陪集纯规范场理论的微扰论研究．利用 BJL 技术，通过计算有关对易子的 Schwinger 项，得到了阿贝尔陪集纯规范场理论中的反常 Ward 恒等式．这一结果与相应的非微扰计算相符合．

一、引　　言

1986年，Faddeev 等人指出了有反常的规范理论在量子化时，原有的经典的第一类约束会转化为第二类约束，因而给标准的规范场路径积分量子化带来了困难[1]，并建议通过引入手征辅助场和作用量中的抵消项来解决这个困难．这种情况使我们想起了陪集纯规范场理论[2]．这一理论是通过引入陪集空间纯规范场来扩大原有的对称性的，而且对于通常的手征群，这种陪集纯规范场的变换性质与 Faddeev 所建议的手征辅助场极为相似．此外，在生成泛函的路径积分形式中引入了陪集纯规范场之后，对于阿贝尔手征群，会自动给出手征反常项，即 Faddeev 建议外加的抵消项[3]．因此，自然需要对陪集纯规范场理论的手征反常进行深入细致地研究，从而寻找克服上述困难的具体方法．

陪集纯规范场理论手征反常的非微扰计算已在文献[4]中进行过详细的讨论．但是，由于通常的陪集纯规范场理论的拉氏量中不显含动能项，因而该理论的微扰论计算尚未进行过，本文在物理规范下，采用冻结近似，使陪集纯规范场取得动能项，从而进行该理论的微扰论研究．

我们考虑如下的拉氏密度

$$\mathscr{L}^{(A)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \bar{\psi}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi - g\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\phi^+ + \frac{1-\gamma_5}{2}\phi\right)\psi$$
$$- (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^+(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - V(\phi^+\phi), \tag{1.1}$$

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，而 ϕ 是 Higgs 场．对 $\mathscr{L}^{(A)}$ 作下列的正则变换：

$$\psi' = e^{i\theta\frac{1-\gamma_5}{2}}\psi, \qquad \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\theta\frac{1+\gamma_5}{2}},$$
$$\phi' = e^{-i\theta}\phi, \qquad \phi^{+\prime} = e^{i\theta}\phi, \tag{1.2}$$

本文1990年3月16日收到．

可以得到

$$\mathscr{L}^{(A)\prime}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{2}-\bar{\psi}'\gamma_{\mu}\left(\partial_{\mu}-ieA_{\mu}\frac{1+\gamma_{5}}{2}-i\partial_{\mu}\theta\frac{1-\gamma_{5}}{2}\right)\psi'$$
$$-g\bar{\psi}'\left(\frac{1+\gamma_{5}}{2}\phi^{+\prime}+\frac{1-\gamma_{5}}{2}\phi'\right)\psi'-(\partial_{\mu}+ieA_{\mu}$$
$$-i\partial_{\mu}\theta)\phi^{+\prime}(\partial_{\mu}-ieA_{\mu}+i\partial_{\mu}\theta)\phi'-V(\phi^{+\prime}\phi'). \tag{1.3}$$

这样就很自然地引入了陪集纯规范场 $\theta(x)$，为了计算方便起见，略去撇号，将上式记为

$$\mathscr{L}^{(B)}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{2}-\bar{\psi}\gamma_{\mu}\left(\partial_{\mu}-ieA_{\mu}\frac{1+\gamma_{5}}{2}-i\partial_{\mu}\theta\frac{1-\gamma_{5}}{2}\right)\psi$$
$$-g\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_{5}}{2}\phi^{+}+\frac{1-\gamma_{5}}{2}\phi\right)\psi-(\partial_{\mu}+ieA_{\mu}$$
$$-i\partial_{\mu}\theta)\phi^{+}(\partial_{\mu}-ieA_{\mu}+i\partial_{\mu}\theta)\phi-v(\phi^{+}\phi), \tag{1.4}$$

易见 $\mathscr{L}^{(B)}$ 在下列 $U(1)_L\times U(1)_R$ 规范变换下不变：

$$\begin{aligned}&\psi'=e^{i\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}}e^{i\beta\frac{1-\gamma_5}{2}}\psi,\quad \bar{\psi}'=\bar{\psi}e^{-i\beta\frac{1+\gamma_5}{2}}e^{-i\alpha\frac{1-\gamma_5}{2}},\\&\phi'=e^{i\alpha}e^{-i\beta}\phi,\qquad \phi^{+\prime}=e^{-i\alpha}e^{i\beta}\phi^{+},\\&A'_{\mu}=A_{\mu}+\frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha,\quad \theta'=\theta+\beta.\end{aligned} \tag{1.5}$$

本文在物理规范下，首先采用冻结近似，使陪集纯规范场取得动能项，同时规范场也获得质量。然后利用 BJL 技术[5]，计算了全部有关的 Green 函数，从而得到所需要的 Schwinger 项[6]，由此给出左手流散度的反常 Ward 恒等式，此外，利用非微扰方法，还得到了与微扰论一致的左手流 Ward 恒等式。为简单起见，本文的计算是在二维时空中进行的，但是不难推广到四维时空的情形。因此在本文中，γ 矩阵定义为

$$\gamma_{1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \gamma_{2}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \gamma_{5}=-i\gamma_{1}\gamma_{2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

本文的安排如下：第二节根据 Dirac 广义哈密顿系统的理论[7]，分析陪集纯规范场理论的约束问题，并导出有用的 Feynman 规则；第三节利用 BJL 技术进行理论中手征反常的微扰论计算；第四节给出相应的手征反常的非微扰计算，由此得到与微扰论计算相符合的反常 Ward 恒等式。

二、约束条件与 Feynman 规则

将 Higgs 场参数化，即取

$$\phi=\rho e^{i\xi},\quad \phi^{+}=\rho e^{-i\xi}, \tag{2.1}$$

则拉氏密度(1.4)式可以写为

$$\mathscr{L}^{(B)}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{2}-\bar{\psi}\gamma_{\mu}\left(\partial_{\mu}-ieA_{\mu}\frac{1+\gamma_{5}}{2}-i\partial_{\mu}\theta\frac{1-\gamma_{5}}{2}\right)\psi-g\rho\bar{\psi}e^{-i\xi\gamma_{5}}\psi$$
$$-(\partial_{\mu}+ieA_{\mu}-i\partial_{\mu}\theta-i\partial_{\mu}\xi)\rho(\partial_{\mu}-ieA_{\mu}+i\partial_{\mu}\theta+i\partial_{\mu}\xi)\rho-V(\rho^{2}). \tag{2.2}$$

不难看出在下列规范变换下，(2.2)式不变：

$$\psi' = e^{i\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}}e^{i\beta\frac{1-\gamma_5}{2}}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\beta\frac{1+\gamma_5}{2}}e^{-i\alpha\frac{1-\gamma_5}{2}},$$

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha, \quad \theta' = \theta + \beta, \tag{2.3}$$

$$\xi' = \xi + \alpha - \beta, \qquad \rho' = \rho.$$

文献[8]中已经表明，Higgs 场对手征反常无影响，而且(2.3)的最后一式表明 Higgs 场的径向部分在变换时是不变的，所以我们可取冻结近似，即令 $\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{2}}$，并引入记号

$$m = \frac{\rho_0 g}{\sqrt{2}}, \quad B = \rho_0\theta, \quad C = \rho_0\xi, \tag{2.4}$$

这时拉氏密度(2.2)式可以改写为

$$\mathscr{L}^{(B)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \bar{\psi}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\frac{1+\gamma_5}{2} - \frac{i}{\rho_0}\partial_\mu B\,\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi - m\bar{\psi}e^{-i\frac{1}{\rho_0}C\gamma_5}\psi$$

$$-\frac{1}{2}(\rho_0 eA_\mu - \partial_\mu(B+C))^2 - V(\rho_0^2), \tag{2.5}$$

由此可得下列各正则动量：

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathscr{L}^{(B)}}{\partial\dot{A}_\mu} = iF_{2\mu} \equiv -E_\mu, \quad \pi_\psi = \frac{\partial\mathscr{L}^{(B)}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^+,$$

$$\pi_B = \frac{\partial\mathscr{L}^{(B)}}{\partial\dot{B}} = \frac{1}{\rho_0}\psi^+\frac{1-\gamma_5}{2}\psi + \rho_0 eA_0 + \dot{B} + \dot{C}, \tag{2.6}$$

$$\pi_C = \frac{\partial\mathscr{L}^{(B)}}{\partial\dot{C}} = \rho_0 eA_0 + \dot{B} + \dot{C}.$$

于是可知该理论具有两个原始约束：

$$\pi_2 = 0, \quad G_1 \equiv \pi_B - \pi_C - \frac{1}{\rho_0}\psi^+\frac{1-\gamma_5}{2}\psi = 0 \tag{2.7}$$

而且，哈密顿量密度可以写为

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi_\psi\dot{\psi} + \pi_\mu\dot{A}_\mu + \pi_B\dot{B} + \pi_C\dot{C} - \mathscr{L}^{(B)}\\
&= \frac{1}{2}E_1^2 + \bar{\psi}\gamma_1\left(\partial_1 - ieA_1\frac{1+\gamma_5}{2} - \frac{i}{\rho_0}\partial_1 B\,\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi + m\bar{\psi}e^{-\frac{i}{\rho_0}C\gamma_5}\psi\\
&\quad + \frac{1}{2}\pi_c^2 + \frac{1}{2}(e\rho_0 A_1 - \partial_1 B - \partial_1 C)^2\\
&\quad + A_0\left(-\partial_1 E_1 + e\psi^+\frac{1+\gamma_5}{2}\psi - e\rho_0\pi_c\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中忽略了常数 $V(\rho_0^2)$。按照 Dirac 的广义哈密顿系统理论，原始约束应满足如下的自洽性条件

$$\dot{\pi}_2 = [\pi_2, H]_{\text{P.B.}} = \left[\pi_2, \int dx\mathscr{H}\right]_{\text{P.B.}} \approx 0, \tag{2.9}$$

其中"≈"表示弱等于零，并且基本泊松括号定义为

$$
\begin{aligned}
&[\pi_\mu(x,t),A_\nu(x',t)]_{\text{P.B.}}=[A_\nu(x',t),E_\mu(x,t)]_{\text{P.B.}}=-\delta_{\mu\nu}\delta(x-x'),\\
&[\psi(x,t),\psi^+(x',t)]_{\text{P.B.}}=-i\delta(x-x'),\\
&[B(x,t),\pi_B(x',t)]_{\text{P.B.}}=[C(x,t),\pi_c(x',t)]_{\text{P.B.}}=\delta(x-x').
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

(2.6) 式给出一个次级约束

$$G=-\partial_1E_1+e\psi^+\frac{1+\gamma_5}{2}\psi-e\rho_0\pi_c=0. \tag{2.11}$$

进一步,可以知道由自洽性条件

$$\dot{G}_1=[G_1,H]_{\text{P.B.}}=0,\quad \dot{G}=[G,H]_{\text{P.B.}}=0$$

得不到新的约束,并且

$$[\pi_2,G]_{\text{P.B.}}=[\pi_2,G_1]_{\text{P.B.}}=[G,G_1]_{\text{P.B.}}=0. \tag{2.12}$$

因此该理论含有两个原始约束和一个次级约束,并且都是第一类约束.

将这些约束合并,可得如下的哈密顿量

$$H_T=\int dx(\mathscr{H}+\lambda G+\lambda_1G_1+\lambda_2\pi_2), \tag{2.13}$$

其中 λ、λ_1 和 λ_2 是场量及其共轭动量的任意函数. 由于我们以下的讨论是在取定了时间规范和物理规范之后进行的,即取规范条件为

$$A_2=iA_0=0,\ C=0, \tag{2.14}$$

因此(2.13)式中的 $\lambda_2\pi_2$ 这一项可以略去,并且次级约束(2.11)式可以写为

$$G=-\partial_1E_1+e\psi^+\frac{1+\gamma_5}{2}\psi-e\rho_0\dot{B}=0. \tag{2.15}$$

由规范场的运动方程出发也可以看出这一点。事实上,由拉氏密度(3.5)可得规范场的运动方程

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=-ie\bar{\psi}\gamma_\nu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi+e\rho_0(e\rho_0A_\nu-\partial_\nu(B+C)), \tag{2.16}$$

在规范条件(2.14)之下,取 $\nu=2$, 正好给出(2.15)式.

在进行微扰论计算时,为了得到 Feynman 规则,我们可将哈密顿量(2.8)划分为

$$H=\int dx\mathscr{H}=\int dx(\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_i), \tag{2.17}$$

其中

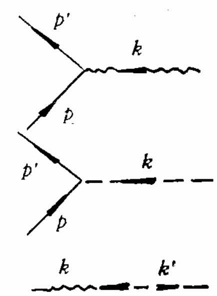
$$
\begin{aligned}
&\mathscr{H}_0=\frac{1}{2}E_1^2+\frac{1}{2}\mu^2A_1^2-A_0\partial_1E_1+\bar{\psi}(\gamma_1\partial_1+m)\psi+\frac{1}{2}\pi_B^2+\frac{1}{2}(\partial_1B)^2,\\
&\mathscr{H}_i=-ieA_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi-\frac{i}{\rho_0}\partial_\mu B\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi-e\rho_0A_\mu\partial_\mu B.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

其中 $\mu=e\rho_0$, 并且略去了法向有关项[9]

$$-eA_0\psi^+\frac{1-\gamma_5}{2}\psi-e^2\rho_0^2A_0^2-\frac{1}{2\rho_0^2}\left(\psi^+\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)^2.$$

我们可得如下的 Feynman 规则. 对于顶角,我们有

$$-e\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}(2\pi)^2\delta(p'-p-k),$$



$$-\frac{i}{\rho_0}k_\mu\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}(2\pi)^2\delta(p'-p-k), \tag{2.19}$$

$$e\rho_0 k_\mu(2\pi)^2\delta(k'-k),$$

其中直线代表费米子场，波纹线代表规范场，虚线代表赝标量场(陪集纯规范场)。

另外，旋量场的传播子为

$$S_F(p)=\frac{-1}{\hat{p}-im-i\varepsilon}, \tag{2.20}$$

赝标量场(陪集纯规范场)的传播子为

$$\Delta_F(k)=\frac{-i}{k^2-i\varepsilon}, \tag{2.21}$$

最后，不难求得在时间规范下规范场 A_μ 的传播子为

$$D_{\mu\nu}(k)=\frac{-i}{k^2+\mu^2-i\varepsilon}\left\{\delta_{\mu\nu}-\frac{(k\cdot n)(k_\mu n_\nu+k_\nu n_\mu)+\mu^2 n_\mu n_\nu}{(k\cdot n)^2+\mu^2}+\frac{k_\mu k_\nu}{(k\cdot n)^2+\mu^2}\right\}. \tag{2.22}$$

其中 $n_\mu=(n_1,n_2)=(0,1)$，$k\cdot n=k_\mu n_\mu$。

三、手征反常的微扰计算

在时间规范 $A_0=0$ 之下，

$$E_1=-\dot{A}_1, \tag{3.1}$$

哈密顿量可以写为

$$H_T=H_1+H_2+H_3+H_4, \tag{3.2}$$

其中

$$H_1=\int dx\left(-\frac{1}{2}E_1^2+\frac{1}{2}\mu^2A_1^2-ieA_1\bar{\psi}\gamma_1\frac{1+\gamma_5}{2}\psi-\frac{i}{\rho_0}\partial_\mu B\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi+m\bar{\psi}\psi\right),$$

$$H_2=\int dx\left(\frac{1}{2}\pi_B^2+\frac{1}{2}(\partial_1B)^2-e\rho_0A_1\partial_1B\right), \tag{3.3}$$

$$H_3=\int dx\bar{\psi}\gamma_1\partial_1\psi,\quad H_4=\int dx\lambda G,$$

量子化后，下列各量皆为算符：

$$j_\mu^L=i\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi,\quad j_\mu^R=i\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi,\quad (j_2^{L,R}=ij_0^{L,R}) \tag{3.4}$$

为了得到该理论左手流散度的 Ward 恒等式，我们考虑

$$-i\dot{G}=[H_T,G], \tag{3.5}$$

其中 H_T 由(3.2)式给出。下面我们利用 BJL 技术求出(3.5)式中各有关力学量算符的等时对易子。一般地，对于两个算符 A、B 编时乘积的矩阵元，我们定义

$$T(p)=\int d^2x e^{ipx}\langle\alpha|TA(x)B(0)|\beta\rangle, \tag{3.6}$$

其中 p、x 分别代表二维动量与坐标,即 $p=(p_1,ip_0)$, $x=(x,it)$, 同时 $d^2x=dxdt$,而 $|\alpha\rangle$、$|\beta\rangle$ 是正交归一态. 考虑下列极限

$$\lim_{p_0\to\infty} p_0T(p) = -i\int dx e^{ip_1x}\langle\alpha|[A(x,0)B(0,0)]|\beta\rangle,$$

按照 BJL 方法,我们有

$$[A(x,0),B(0,0)]=\begin{cases} i\delta(x) & \text{若 } \lim\limits_{p_0\to\infty} p_0T(p)=1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\delta(x), & \text{若 } \lim\limits_{p_0\to\infty} p_0T(p)=p_1. \end{cases} \tag{3.7}$$

并且

$$[\dot{A}(x,0),B(0,0)]=\begin{cases} \delta(x) & \text{若 } \lim\limits_{p_0\to\infty} p_0^2T(p)=1 \\ -i\dfrac{\partial}{\partial x}\delta(x) & \text{若 } \lim\limits_{p_0\to\infty} p_0^2T(p)=p_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

现在我们计算出现在 $[H_T, G]$ 中的一些对易子. 首先考虑 $[j_\mu^L(x), j_\mu^L(y)]$, 在 Heisenberg 表象中取

$$T_{\mu\nu}(p)=\int d^2x e^{ipx}\langle 0\|Tj_\mu^L(x)j_\nu^L(0)\|0\rangle, \tag{3.9}$$

转到相互作用表象,我们有

$$T_{\mu\nu}(p)=\int d^2x e^{ipx}\langle 0|Tj_\mu^L(x)j_\nu^L(0)S|0\rangle. \tag{3.10}$$

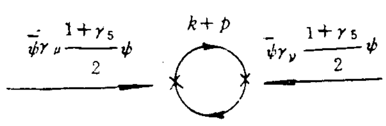


图 1

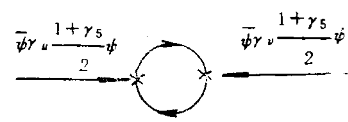


图 2

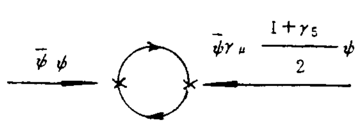


图 3

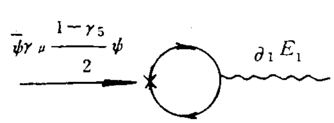


图 4

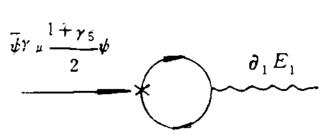


图 5

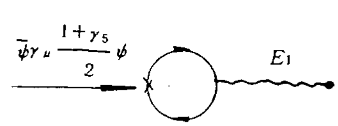


图 6

对于图 1—6 所示的过程,只需取 S 矩阵为 1, 这时有

$$T_{\mu\nu}(p)=\int d^2x e^{ipx}\mathrm{Tr}S_F(-x)\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}S_F(x)\gamma_\nu\frac{1+\gamma_5}{2}, \tag{3.11}$$

其中

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k e^{ikx}\frac{-1}{\hat{K} - im - i\varepsilon}. \tag{3.12}$$

不难得到

$$T_{\mu\nu}(p) = \frac{i}{4\pi}\frac{\delta_{\mu\nu}p^2 - 2p_\mu p_\nu - i\varepsilon_{\mu\nu}p^2 - 2i\varepsilon_{\lambda\nu}p_\mu p_\lambda}{p^2}\int_0^1 dx\frac{x(1-x)}{\frac{m^2}{p^2} + x(1-x)}. \tag{3.13}$$

由于在取极限 $p_0 \to \infty$ 时有

$$\int_0^1 dx\frac{x(1-x)}{\frac{m^2}{p_1^2 - p_0^2} + x(1-x)}\Bigg|_{p_0\to\infty} = 1,$$

所以利用(3.7)式可得

$$[j_1^L(x), j_1^L(y)] = [j_1^L(x), j_0^L(y)] = [j_0^L(x), j_0^L(y)] = -2\delta'(x-y)k, \tag{3.14}$$

其中 $k = \frac{-i}{4\pi}$，$\delta'(x-y) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y)$. (3.14) 式的右端即所谓的 Schwinger 项.

类似地，可以得到如下的等时对易子

$$[j_\mu^L(x), j_\nu^R(y)] = 0, \tag{3.15}$$

$$[\bar{\phi}(x)\phi(x), j_\mu^{L,R}(y)] = 0, \tag{3.16}$$

$$[j_1^L(x), \partial_1 E_1(y)] = [j_0^L(x), \partial_1 E_1(y)] = -e\delta'(x-y)k, \tag{3.17}$$

$$[j_\mu^R(x), \partial_1 E_1(y)] = 0, \tag{3.18}$$

$$[j_1^L(x), E_1(y)] = [j_0^L(x), E_1(y)] = -e\delta(x-y)k. \tag{3.19}$$

以及

$$[\partial_1 E_1(x), \bar{\phi}(y)\phi(y)] = 0,\ [j_\mu^L(x), \partial_\nu B(y)] = 0,\ [j_\mu^L(x), \pi_B(y)] = 0. \tag{3.20}$$

可是，$[j_\mu^R(x),\ \dot{B}(y)] \neq 0$，因此这种形式的对易子对于 $[H_T,\ G]$ 是有贡献的. 但是利用(2.15)式又可以把(3.5)式的左端写为

$$\begin{aligned}-i\partial_0 G &= -i\partial_0(-\partial_1 E_1 + ej_0^L - e\rho_0\dot{B}) \\ &= -ie\partial_0 j_0^L - \partial_1[H_T, E_1] - e\rho_0[H_T, \dot{B}],\end{aligned} \tag{3.21}$$

易见在(3.21)式的右端也包含有 $[j_\mu^R(x),\ \dot{B}(y)]$ 的贡献. 由于按(3.5)式和按(3.21)式计算的 $-i\partial_0 G$ 当然相等，因此在将这两种计算的结果合并时，$[j_\mu^R(x), \dot{B}(y)]$ 的贡献互相抵消. 这样，利用(3.14—20)式，由(3.5)式我们有

$$-i\dot{G} = [H_T, G(x)] = -\frac{ie^2}{4\pi}(E_1(x) + \partial_1 A_1(x)), \tag{3.22}$$

其中 $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$，并且我们略去了 $[H_T,\ -e\rho_0\dot{B}(x)]$ 的贡献，另一方面，由 (3.21) 式我们又有

$$-i\dot{G} = -ie\partial_\mu j_\mu^L + \frac{ie^2}{4\pi}\partial_1(A_1 - \lambda), \tag{3.23}$$

其中我们也略去了 $[H_T,\ -e\rho_0\dot{B}(y)]$ 的贡献. 因此我们得到

$$\partial_\mu j_\mu^L(x) = \frac{-e}{4\pi}(\partial_0 A_1(x) + C\partial_1 A_1(x)), \tag{3.24}$$

其中C是任意函数．当取$C=0$时，我们得到通常的左手流散度的 Ward 恒等式：

$$\partial_\mu j^L_\mu(x)=\frac{-e}{4\pi}\partial_0 A_1(x). \tag{3.25}$$

四、手征反常的非微扰计算

前一节中我们在物理规范下，取冻结近似，用微扰论方法得到了左手流散度的反常 Ward 恒等式，这一结果也可用非微扰方法得到．为此我们可将理论的生成泛函写为

$$Z[J]=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta]\exp\left\{i\int d^2x(\mathscr{L}+j_\mu A_\mu+j\theta+\bar{\eta}\phi+\bar{\phi}\eta)\right\}, \tag{4.1}$$

其中j_μ、j、$\bar{\eta}$和η分别是相应于A_μ、θ、ϕ和$\bar{\phi}$场的外源，并且由于我们考虑到在物理规范下取冻结近似后的 Higgs 场已不再是变量了，因此在积分测度中略去了 Higgs 场．另外由于 Higgs 场不进入手征反常，所以为简便起见，我们在(4.1)式中取

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}-\bar{\phi}\gamma_\mu\left(\partial_\mu-ieA_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}-i\partial_\mu\theta\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\phi. \tag{4.2}$$

在生成泛函(4.1)式中进行左手征变换

$$\phi'=e^{i\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}}\phi,\quad \bar{\phi}'=\bar{\phi}e^{-i\alpha\frac{1-\gamma_5}{2}}, \tag{4.3}$$

其中α是定域变换参数．这时，相应的费米场路径积分测度的改变为[4]

$$[d\phi d\bar{\phi}]=[d\phi' d\bar{\phi}']e^{i\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5}, \tag{4.4}$$

式中$\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5$即所谓的手征相因子．为计算$\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5$，可将理论中的协变微商写为

$$\hat{D}=\hat{\partial}-ie\hat{A}\frac{1+\gamma_5}{2}-i\hat{\partial}\theta\frac{1-\gamma_5}{2}=\hat{D}_L\frac{1+\gamma_5}{2}+\hat{D}_R\frac{1-\gamma_5}{2}, \tag{4.5}$$

其中

$$\hat{D}_L=\hat{\partial}-ie\hat{A}=\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu),\quad \hat{D}_R=\hat{\partial}-i\hat{\partial}\theta=\gamma_\mu(\partial_\mu-i\partial_\mu\theta). \tag{4.6}$$

这样，我们可以按下式计算手征相因子$\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5$：

$$\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\int d^2x\alpha(x)\mathrm{tr}\gamma_5\left[\left(e^{\frac{i}{M^2}\hat{D}_L\hat{D}_R}+e^{\frac{i}{M^2}\hat{D}_R\hat{D}_L}\right)\delta(x-x')\right]\bigg|_{x'=x}.$$

由此得到

$$\mathrm{Tr}\alpha\gamma_5=\frac{ie}{8\pi}\int d^2x\alpha\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{4.7}$$

于是，在变换(4.3)之下，生成泛函(4.1)变为

$$Z[J]=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta]\exp\left\{i(\mathscr{L}+j_\mu A_\mu+j\theta+\bar{\eta}\phi+\bar{\phi}\eta-i\partial_\mu\alpha\cdot\bar{\phi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\phi+i\bar{\eta}\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}\phi-i\alpha\bar{\phi}\frac{1-\gamma_5}{2}\eta-\frac{ie}{8\pi}\alpha\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu})\right\}. \tag{4.8}$$

由于

$$\int d^2xi\partial_\mu\alpha\cdot\bar{\phi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\phi=-\int d^2x\alpha\partial_\mu\left(i\bar{\phi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\phi\right),$$

所以可将(4.8)式改写为

$$Z[J]=\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta]\exp\left\{i\left(\mathscr{L}+j_\mu A_\mu+j\theta+\bar{\eta}\phi+\bar{\phi}\eta+\alpha\partial_\mu\left(i\bar{\phi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\phi\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+i\bar{\eta}\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}\phi-i\alpha\bar{\phi}\frac{1-\gamma_5}{2}\eta-\frac{ie}{8\pi}\alpha\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\right\}. \tag{4.9}$$

在(4.9)式两端对 α 作泛函微商，并令 $\alpha\to 0$，可得

$$\int[d\phi d\bar{\phi}dA_\mu d\theta]\exp\left\{i\int d^2x(\mathscr{L}+j_\mu A_\mu+j\theta+\bar{\eta}\phi+\bar{\phi}\eta)\right\}$$
$$\cdot\left[\partial_\mu\left(i\bar{\phi}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\phi\right)-\frac{ie}{8\pi}\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+i\bar{\eta}\frac{1+\gamma_5}{2}\phi-i\bar{\phi}\frac{1-\gamma_5}{2}\eta\right]=0. \tag{4.10}$$

对(4.10)式中的外源 η 和 $\bar{\eta}$ 进行泛函微商 $\frac{\delta}{i\delta\eta(x)}$、$\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x)}$，微商后令所有外源趋向于零。由此可得左手流 Ward 恒等式

$$\partial_\mu\langle T\phi(z)j_\mu^L(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0=\frac{-e}{4\pi}\langle T\phi(z)\partial_0A_1(x)\bar{\phi}(z')\rangle_0$$
$$+\delta(x-z')\left\langle T\phi(z)\bar{\phi}(x)\frac{1-\gamma_5}{2}\right\rangle_0-\delta(x-z)\left\langle T\frac{1+\gamma_5}{2}\phi(x)\bar{\phi}(z')\right\rangle_0. \tag{4.11}$$

可以看出，这个结果与 $C=0$ 时的坐标表象表达式(3.25)是一致的。

总起来说，在本文中我们在物理规范下来取冻结近似，首次进行了陪集纯规范场理论的微扰论研究，得到了陪集纯规范场的传播子和有质量的规范场在时间轴规范下的传播了。然后利用 BJL 技术，求出了与非微扰结果一致的左手流反常 Ward 恒等式。本文的研究是对阿贝尔手征群进行的，如何将有关的结果推广到非阿贝尔情形，是令人很感兴趣的问题。同时，如何解决有反常的规范理论的量子化，仍是一个亟待解决的问题。这些方面的研究，目前仍在继续进行。

参　考　文　献

[1] Faddeev L.D. and Shatashvili S.L., *Phys. Lett.*, **167B** (1986), 225.
[2] 周光召，杜东生，阮图南，中国科学，**22**(1979)，142.
[3] 井思聪，阮图南，高能物理与核物理，**12**(1988)，773.
[4] 阮图南，井思聪，中国科学，**A12**(1987)，1273.
[5] J.D. Bjorken, *Phys.Rev.*, **D148**(1966), 1467
K.Johnson and F.E.Low, *Prog. Theoret. Phys.*, (Kyoto) Suppl **37—38**(1966), 74.
[6] Dac Sung Hwang, *Nucl.Phys.*, **B286**(1987), 231.
S-G. Jo, *Nucl.Phys.*, **B259**(1985), 616; *Phys.Lett.*, **163B** (1985), 353; *Phys.Rev.*, **D35**(1987), 3179.
[7] P.A.M.Dirac, «狄拉克量子力学演讲集»，(中译本)科学出版社，北京1986。
[8] 阮洁，井思聪，高能物理与核物理，**14**(1990)，882.
[9] David Lurié, «粒子和场»，(中译本)科学出版社，北京 1981.

BJORKEN-JOHNSON-LOW TECHNIQUE AND PERTURBATION STUDY ON CHIRAL ANOMALY IN ABELIAN COSET PURE GAUGE FIELD THEORY

JING SICONG RUAN JIE

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

The perturbation theory in coset pure gauge field theory is studied for the first time in this paper. By using the Bjorken-Johnson-Low technique and calculating the Schwinger term in related commutators, the anomalous Ward identity in Abelian coset pure gauge field theory is derived, which is consistent with the non-perturbative calculation