第14卷 第10期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 10
1990年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 1990

J/ψ 强子衰变过程的矩分析*

郁 宏 沈齐兴
(中国科学院高能物理所，北京)

摘 要

本文给出了过程 $e^+ + e^- \to J/\psi \to V + X$, $V \to P_1P_2$ 或 $P_1P_2P_3$ 和 $X \to P\bar{P}$ 的角分布螺旋度形式，并在此基础上进行了矩分析，得到了若干关系式，有助于确定玻色共振态X的自旋 J_x 以及过程 $J/\psi \to V + X$ 的螺旋度振幅之比.

一、引 言

在文献[1]中，我们给出了过程 $e^+ + e^- \to J/\psi \to V + X$, $V \to P_1P_2$ 或 $P_1P_2P_3$ 和 $e^+ + e^- \to J/\psi \to V + X$, $X \to P\bar{P}$ 的角分布螺旋度形式. 它们的矩的矢量介子角分布分别为:

$$H_{J_x}(\theta_v, lm) = \int W_{J_x}(\theta_v, \theta_1, \phi_1) D^l_{m0}(\phi_1, \theta_1, 0) \sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1,$$

$$H_{J_x}(\theta_v, LM) = \int W_{J_x}(\theta_v, \theta, \phi) D^L_{M0}(\phi, \theta, 0) \sin\theta d\theta d\phi. \tag{1}$$

它们的矩为:

$$m_{J_x}(lm) = \int H_{J_x}(\theta_v, lm) \sin\theta_v d\theta_v,$$

$$M_{J_x}(LM) = \int H_{J_x}(\theta_v, LM) \sin\theta_v d\theta_v. \tag{2}$$

其中，θ_v 是在 J/ψ 静止系中入射正电子和出射矢量介子之间的夹角; θ_1, ϕ_1 是在矢量介子V的静止系中赝标介子 P_1 的极角和方位角或者包含三个赝标介子的衰变平面的法线方向的极角和方位角; θ, ϕ 是在X静止系中赝标介子P的极角和方位角. 坐标系 z 轴取为 J/ψ 静止系中矢量介子V的运动方向，e^+, e^- 束在 x-z 平面内. 正如我们在文献[2]中指出的，J/ψ 辐射衰变过程的矩与此类似，它们都过于简单，只包含二个参数 l、m 或者 L、M，很难给出如文献[3]中那样的一些关系式来作为确定X的自旋-宇称等物理量的判据. 为克服这一困难，我们在文献[2、4、5、6]中，有别于文献[3]，利用矩的光子角分布，有时再加上某种特殊选定的权，求出加权后的矩，讨论了 J/ψ 辐射衰变过程中产生的 ξ 粒子的自旋问题，ι-E 疑难以及 θ-G 问题等等，给出了一些有效的判据.

对于过程 $e^+ + e^- \to J/\psi \to V + X$，若考虑V和X同时继续衰变. V衰变为二个或

本文1990年1月31日收到.
* 国家自然科学基金资助课题.

三个赝标介子，X衰变为一对正反赝标介子．我们不难得到它们的角分布公式为

$$W_{J_x}(\theta_v,\ \theta_1\phi_1,\ \theta\phi)\propto\sum_{\substack{\lambda_v\lambda_v'\\ \lambda_x\lambda_x'}} I_{\lambda_J,\lambda_J'}(\theta_v)A_{\lambda_v\lambda_x}A_{\lambda_v'\lambda_x'}D^{1*}_{\lambda_v0}(\phi_1\theta_10)$$
$$\cdot D^1_{\lambda_v'0}(\phi_1\theta_10)D^{J_x^*}_{-\lambda_x0}(\phi\theta0)D^{J_x}_{-\lambda_x'0}(\phi\theta0). \qquad (3)$$

矩的矢量介子角分布为

$$H_{J_x}(\theta_v,\ LMlm)=\int W_{J_x}(\theta_v,\ \theta_1\phi_1,\ \theta\phi)D^l_{m0}(\phi_1\theta_10)$$
$$\cdot D^L_{M0}(\phi\theta0)\sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1\sin\theta d\theta d\phi. \qquad (4)$$

它们的矩为

$$M_{J_x}(LMlm)=\int H_{J_x}(\theta_v,\ LMlm)\sin\theta_v d\theta_v \qquad (5)$$

利用(3)式以及D函数的性质，我们可以得到

$$H_{J_x}(\theta_v,\ LMlm)\propto\sum_{\substack{\lambda_v\lambda_v'\\ \lambda_x\lambda_x'}} I_{\lambda_J,\lambda_J'}(\theta_v)g_{\lambda_v\lambda_x\lambda_v'\lambda_x'}(J_x-\lambda_x'LM|J_x-\lambda_x)$$
$$\cdot(1\lambda_v'lm|1\lambda_v)(J_x0L0|J_x0)(10l0|10). \qquad (6)$$

其中，$g_{\lambda_v\lambda_x\lambda_v'\lambda_x'}=A_{\lambda_v\lambda_x}A_{\lambda_v'\lambda_x'}$，由宇称守恒，我们有，

$$g_{\lambda_v\lambda_x\lambda_v'\lambda_x'}=g_{-\lambda_v-\lambda_x-\lambda_v'-\lambda_x'}=\varepsilon g_{-\lambda_v-\lambda_x\lambda_v'\lambda_x'}=\varepsilon g_{\lambda_v\lambda_x-\lambda_v'-\lambda_x'}. \qquad (7)$$

其中 $\varepsilon=\eta_x(-1)^{J_x}$，$\eta_x$ 为X粒子的宇称．在文献[2]中，我们给出了 $I_{\lambda_J\lambda_J'}(\theta_\gamma)$ 的定义及具体表达式(见该文(6)、(7)式)．$I_{\lambda_J\lambda_J'}(\theta_v)$ 的定义及具体表达式除 θ_γ 由 θ_v 代替之外与之完全相同．我们注意到它们满足以下关系式

$$I_{\lambda_J,\lambda_J'}(\theta_v)=(-1)^{\lambda_J'-\lambda_J}I_{-\lambda_J,-\lambda_J'}(\theta_v)=I_{\lambda_J',\lambda_J}(\theta_v). \qquad (8)$$

定义

$$K_{\lambda_J,\lambda_J'}=\int I_{\lambda_J,\lambda_J'}(\theta_v)\sin\theta_v d\theta_v. \qquad (9)$$

其具体表达式是

$$K_{1,1}=K_{-1,-1}=\frac{8}{3}p^2,$$
$$K_{1,0}=K_{0,1}=-K_{-1,0}=-K_{0,-1}=0,$$
$$K_{1,-1}=K_{-1,1}=\frac{4}{3}p^2,$$
$$K_{0,0}=\frac{8}{3}p^2. \qquad (10)$$

我们有

$$M_{J_x}(LMlm)\propto\sum_{\substack{\lambda_v\lambda_v'\\ \lambda_x\lambda_x'}} K_{\lambda_J,\lambda_J'}g_{\lambda_v\lambda_x\lambda_v'\lambda_x'}(J_x-\lambda_x'LM|J_x-\lambda_x)$$

$$\cdot(1\lambda_v' lm|1\lambda_v)(J_x 0 L 0|J_x 0)(10l0|10). \tag{11}$$

一个重要之点是，现在的矩的矢量介子角分布 $H_{J_x}(\theta_v, LMlm)$ 和矩 $M_{J_x}(LMlm)$ 包含了四个参数 L、M、l 和 m。因而，我们有可能找到它们之间的某些关系式，有助于确定X粒子的自旋 J_x 和较易于拟合出过程 $J/\psi\to V+X$ 的螺旋度振幅的比值.

二、矩及其关系式

我们可以把(6)式写成

$$H_{J_x}(\theta_v, LMlm)\propto t^{M,m^*}_{J_x,L,l}(\theta_v)(J_x 0 L 0|J_x 0)(10l0|10). \tag{12}$$

其中，多极参数

$$t^{M,m^*}_{J_x,L,l}(\theta_v)=\sum_{\substack{\lambda_v\lambda_v'\\ \lambda_x\lambda_x'}} I_{\lambda_J,\lambda_J'}(\theta_v)(J_x-\lambda_x' LM|J_x-\lambda_x)$$

$$\cdot(1\lambda_v' lm|1\lambda_v)\cdot g_{\lambda_v\lambda_x\lambda_v'\lambda_x'}, \tag{13}$$

以及

$$\lambda_J=\lambda_v-\lambda_x,\quad \lambda_J'=\lambda_v'-\lambda_x',\quad M=\lambda_x'-\lambda_x,$$

$$m=\lambda_v-\lambda_v',\quad L\leqslant 2J_x,\quad l\leqslant 2. \tag{14}$$

由(7),(8)式以及 C-G 系数的性质，我们可以得到

$$t^{M,m^*}_{J_x,L,l}(\theta_v)=(-1)^{L+l}t^{M,m}_{J_x,L,l}(\theta_v), \tag{15}$$

$$t^{M,m^*}_{J_x,L,l}(\theta_v)=(-1)^{L+l+M+m}t^{-M,-m^*}_{J_x,L,l}(\theta_v), \tag{16}$$

$$t^{M,m^*}_{J_x,L,l}(\theta_v)=(-1)^{M+m}t^{-M,-m}_{J_x,L,l}(\theta_v). \tag{17}$$

由(15)式可知，当 $L+l$ 为偶时，此多极参数为纯实．于是由(16)式我们有

$$t^{M,m^*}_{J_x,L,l}(\theta_v)=(-1)^{M+m}t^{-M,-m^*}_{J_x,L,l}(\theta_v). \tag{18}$$

$$(L+l)=\text{偶}$$

把(15)—(17)式代入(12)式，我们得到

$$H_{J_x}(\theta_v, LMlm)=(-1)^{L+l}H^*_{J_x}(\theta_v, LMlm), \tag{19}$$

$$H_{J_x}(\theta_v, LMlm)=(-1)^{L+l+M+m}H_{J_x}(\theta_v, L-Ml-m), \tag{20}$$

$$H_{J_x}(\theta_v, LMlm)=(-1)^{M+m}H^*_{J_x}(\theta_v, L-Ml-m). \tag{21}$$

由(19)式和(20)式可知，当 $(L+l)$ 为偶时，$H_{J_x}(\theta_v, LMlm)$ 为纯实，相应的矩 $M_{J_x}(LMlm)$ 亦为纯实．由(20)式及(5)式可以得到

$$H_{J_x}(\theta_v, LMlm)=(-1)^{M+m}H_{J_x}(\theta_v, L-Ml-m),\quad (L+l\ \text{为偶});$$

$$M_{J_x}(LMlm)=(-1)^{M+m}M_{J_x}(L-Ml-m),\quad (L+l\ \text{为偶}). \tag{22}$$

若要(12)式中的 C-G 系数 $(10l0|10)$ 不为 0，l 必须为偶. 这样，只有 L 亦为偶，$H_{J_x}(\theta_v, LMlm)$ 和 $M_{J_x}(LMlm)$ 才为纯实且非零. 定义以下螺旋度振幅之比

$$x = \frac{A_{11}}{A_{10}}, \quad y = \frac{A_{12}}{A_{10}}, \quad z_1 = \frac{A_{00}}{A_{10}}, \quad z_2 = \frac{A_{01}}{A_{10}}. \tag{23}$$

对于我们所讨论的过程，$J_x^{\eta_x} = (2n)^+$，$n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$. 下面,我们分别给出 $J_x^{\eta_x} = 0^+, 2^+, 4^+$ 三种情况的矩的矢量介子角分布 $H_{J_x}(\theta_v, LMlm)$,矩 $M_{J_x}(LMlm)$ 及其关系式.

(1)，$J_x^{\eta_x} = 0^+$

在这种情况下，L 和M必须为零. 于是

$$H_0(\theta_v, 00lm) \propto \sum_{\lambda_v \lambda'_v} I_{\lambda_J, \lambda'_J}(\theta_v) g_{\lambda_v 0 \lambda'_v 0} (1\lambda'_v lm|1\lambda_v) \cdot (10l0|10),$$

$$M_0(00lm) \propto \sum_{\lambda_v \lambda'_v} K_{\lambda_J, \lambda'_J}\, g_{\lambda_v 0 \lambda'_v 0} (1\lambda'_v lm|1\lambda_v) \cdot (10l0|10). \tag{24}$$

独立的非零矩的矢量介子角分布只有四个,它们是 $H_0(\theta_v, 0000)$，$H_0(\theta_v, 0020)$，$H_0(\theta_v, 0021)$ 和 $H_0(\theta_v, 0022)$. 因为过程 $J/\psi \to V + X(0^+)$ 只有两个独立的螺旋度振幅 A_{10} 和 A_{00},所以其中只出现一个螺旋度振幅之比 z_1. 例如

$$H_0(\theta_v, 0000) \propto 2g_{1010} I_{1,1}(\theta_v) + g_{0000} I_{0,0}(\theta_v) \sim 2p^2[(1 + \cos^2\theta_v) + z_1^2 \sin^2\theta_v],$$

$$H_0(\theta_v, 0021) \propto \frac{2}{5}\sqrt{3}\, g_{1000} I_{1,0}(\theta_v) \sim \frac{\sqrt{6}}{5} p^2 \cdot z_1 \sin 2\theta_v, \tag{25}$$

我们可以得到一个关系式

$$\begin{aligned} &2H_0(\theta_v, 0000) - 5H_0(\theta_v, 0020) - 5\sqrt{6} H_0(\theta_v, 0022) \\ &\quad \propto 6g_{1010}[I_{1,1}(\theta_v) + I_{1,-1}(\theta_v)] \sim 12p^2. \end{aligned} \tag{26}$$

它不含任何含 z_1 的项,并且与 θ_v 无关.

(2)，$J_x^{\eta_x} = 2^+$

在这种情况下，L 可以等于 0, 2 和 4，$|M| \leqslant L$，$l \leqslant 2$，$|m| \leqslant l$. 考虑到关系式 (22) 和 (14)，独立的非零 $H_2(\theta_v, LMlm)$ 有 33 个. 因为过程 $J/\psi \to V + X(2^+)$ 有五个独立的螺旋度振幅：$A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{00}, A_{01}$，所以其中将出现四个螺旋度振幅之比：$x$、$y$、$z_1$ 和 z_2. 如此众多的 $H_2(\theta_v, LMlm)$ 可以组合出很多关系式.

相应于(26)式,我们有

$$\begin{aligned} &2H_2(\theta_v, 0000) - 5H_2(\theta_v, 0020) - 5\sqrt{6} H_2(\theta_v, 0022) \\ &\propto 6\{g_{1212} I_{1,1}(\theta_v) + g_{1111} I_{0,0}(\theta_v) + g_{1010}[I_{1,1}(\theta_v) + I_{1,-1}(\theta_v)]\} \\ &\sim 6p^2[y^2(1 + \cos^2\theta_v) + 2x^2 \sin^2\theta_v] + 12p^2, \end{aligned} \tag{27}$$

多出了含 x^2 和 y^2 的项. 我们还有

$$\begin{aligned} &14\sqrt{5} H_2(\theta_v, 2200) - 35\sqrt{5} H_2(\theta_v, 2220) \\ &+ 28\sqrt{3} H_2(\theta_v, 4200) - 70\sqrt{3} H_2(\theta_v, 4220) = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\sqrt{3}H_2(\theta_v, 4100) + 5\sqrt{3}H_2(\theta_v, 4120) - \sqrt{10}H_2(\theta_v, 2100) - 5\sqrt{10}H_2(\theta_v, 2120) = 0, \tag{29}$$

$$21H_2(\theta_v, 4021) - 6H_2(\theta_v, 0021) - 5\sqrt{6}H_2(\theta_v, 222-1) - 6\sqrt{10}H_2(\theta_v, 422-1) = 0, \tag{30}$$

$$54H_2(\theta_v, 2200) + 270H_2(\theta_v, 2220) - 26\sqrt{15}H_2(\theta_v, 4200) - 130\sqrt{15}H_2(\theta_v, 4220) \propto 14\sqrt{6}\,g_{0101}I_{1,-1}(\theta_v) \sim 34.3p^2z_2^2\sin^2\theta_v, \tag{31}$$

$$270H_2(\theta_v, 0021) - 1485H_2(\theta_v, 2021) + 715H_2(\theta_v, 4021) \propto\left(\frac{94}{\sqrt{3}}g_{1101} + 20\sqrt{3}\,g_{1000}\right)I_{1,0}(\theta_v) \sim (38.4xz_2 + 24.5z_1)p^2\sin 2\theta_v, \tag{32}$$

$$26\sqrt{15}H_2(\theta_v, 4100) + 130\sqrt{15}H_2(\theta_v, 4120) - 81\sqrt{2}H_2(\theta_v, 2100) - 405\sqrt{2}H_2(\theta_v, 2120) \propto 42\sqrt{2}\,g_{0001}I_{1,0}(\theta_v) \sim 42p^2z_1z_2\sin 2\theta_v, \tag{33}$$

$$\frac{H_2(\theta_v, 212-2)}{\sqrt{2}H_2(\theta_v, 2022)} = x\,\mathrm{ctg}\,\theta_v, \tag{34}$$

$$-\frac{4H_2(\theta_v, 2021) + 3H_2(\theta_v, 4021)}{4H_2(\theta_v, 0022)} = z_1\mathrm{ctg}\,\theta_v, \tag{35}$$

$$\frac{14\sqrt{6}M_2(2200) - 35\sqrt{6}M_2(2220)}{60M_2(0022)} = y, \tag{36}$$

$$\frac{\sqrt{2}M_2(2121)}{M_2(2022)} = z_2. \tag{37}$$

(3), $J_x^{\eta_x} = 4^+$

在这种情况下，L 可以等于 0、2、4、6 和 8，$l \leqslant 2$，$|m| \leqslant l$．而由关系式(14)，可知 $|M| \leqslant 4$．再考虑到(22)式，独立的非零 $H_4(\theta_v, LMlm)$ 共有 65 个．由于(14)式的限制，过程 $J/\psi \to V + X(4^+)$ 亦只有五个独立的螺旋度振幅：A_{10}、A_{11}、A_{12}、A_{00} 和 A_{01}，所以 $H_4(\theta_v, LMlm)$ 和相应的 $M_4(LMlm)$ 中亦只出现四个螺旋度振幅之比：x、y、z_1 和 z_2．相应于(27)—(33)式，现在有

$$2H_4(\theta_v, 0000) - 5H_4(\theta_v, 0020) - 5\sqrt{6}H_4(\theta_v, 0022) \propto 6\{g_{1212}I_{1,1}(\theta_v) + g_{1111}I_{0,0}(\theta_v) + g_{1010}[I_{1,1}(\theta_v) + I_{1,-1}(\theta_v)]\} \sim 6p^2[y^2(1+\cos^2\theta_v) + 2x^2\sin^2\theta_v] + 12p^2, \tag{38}$$

它和(27)式完全一样，即与 $J_x = 2$ 或 4 无关．但和(26)式相比是不同的．

$$14\sqrt{5}H_4(\theta_v, 2200) - 35\sqrt{5}H_4(\theta_v, 2220) + 28\sqrt{3}H_4(\theta_v, 4200) - 70\sqrt{3}H_4(\theta_v, 4220)$$

$$\propto -\left(\frac{180}{11}+\frac{108}{13}\right)\sqrt{3}\,g_{1012}I_{1,-1}(\theta_v) \sim -42.7p^2y\sin^2\theta_v, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}H_4(\theta_v,4100)+5\sqrt{3}H_4(\theta_v,4120)\\&\quad-\sqrt{10}H_4(\theta_v,2100)-5\sqrt{10}H_4(\theta_v,2120)\\&\propto -\frac{42\sqrt{3}}{143}g_{0001}I_{1,0}(\theta_v)\sim -0.36p^2z_1z_2\sin 2\theta_v,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}&21H_4(\theta_v,4021)-6H_4(\theta_v,0021)-5\sqrt{6}H_4(\theta_v,222-1)\\&\quad-6\sqrt{10}H_4(\theta_v,422-1)\propto\left(-\frac{162}{143}\sqrt{3}\,g_{1101}-\frac{744}{715}\sqrt{3}\,g_{1000}\right.\\&\quad\left.+\frac{1008}{143}\sqrt{\frac{3}{10}}\,g_{0012}\right)I_{1,0}(\theta_v)\\&\quad\sim(-1.39xz_2-1.27z_1+2.73z_1y)p^2\sin 2\theta_v,\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}&54H_4(\theta_v,2200)+270H_4(\theta_v,2220)-26\sqrt{15}H_4(\theta_v,4200)\\&\quad-130\sqrt{15}H_4(\theta_v,4220)=0,\end{aligned} \tag{42}$$

$$270H_4(\theta_v,0021)-1485H_4(\theta_v,2021)+715H_4(\theta_v,4021)=0, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}&26\sqrt{15}H_4(\theta_v,4100)+130\sqrt{15}H_4(\theta_v,4120)\\&\quad-81\sqrt{2}H_4(\theta_v,2100)-405\sqrt{2}H_4(\theta_v,2120)=0.\end{aligned} \tag{44}$$

我们还有

$$\frac{\sqrt{15}}{3}\,\frac{H_4(\theta_v,212-2)}{H_4(\theta_v,2022)}=x\,\mathrm{ctg}\,\theta_v, \tag{45}$$

$$\frac{81H_4(\theta_v,0021)-1001H_4(\theta_v,4021)}{162H_4(\theta_v,0022)}=z_1\,\mathrm{ctg}\,\theta_v, \tag{46}$$

$$\frac{-5\sqrt{10}\,M_4(2220)+2\sqrt{10}\,M_4(2200)}{45M_4(2022)}=y, \tag{47}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{15}\,\frac{M_4(2121)}{M_4(2022)}=z_2. \tag{48}$$

三、分析和讨论

上面,我们已经指出(26)式和(27)式((38)式)的不同之处.由实验给出的矩的矢量介子角分布[$2H_{J_x}(\theta_v,0000)-5H_{J_x}(\theta_v,0020)-5\sqrt{6}H_{J_x}(\theta_v,0022)$]若与 θ_v 无关,则可断定X粒子的自旋-宇称 $J_X^{P_X}=0^+$. 若这个量和 θ_v 有关,那么我们只能排除X粒子不是 0^+ 粒子,但不能确定它是 2^+ 还是 4^+ 粒子.

利用(28)—(33)式和(39)—(44)式,我们可以判定X粒子的自旋-宇称是 2^+ 还是 4^+,特别是(28)式和(39)式以及(31)式和(42)式比较敏感.

在确定了X粒子的自旋-宇称之后，利用矩的矢量介子角分布或者矩本身的一些关系式，如对 2^+ 情况的(34)—(37)式和对 4^+ 情况的(45)—(48)式，可以分别拟合出四个螺旋度振幅之比 x、y、z_1 和 z_2。这要比从一个角分布拟合出四个螺旋度振幅之比来得简洁而明了。特别要指出的是，这些表达式均是比式，因而矩的矢量介子角分布和矩中包含的公共因子均已消去，等号两边是严格的相等，对于确定 x、y、z_1 和 z_2 的值更为方便而直接。

对于过程 $e^+ + e^- \to J/\psi \to V + X$，V 继续衰变为二个或三个赝标介子，而同时X衰变为三个赝标介子，情况比较复杂。但有可能得到 1^{-+} 奇特态的线索，我们将在以后加以讨论。

参　考　文　献

[1] 郁宏和沈齐兴，高能物理与核物理，**14**(1990)，504.
[2] 郁宏，高能物理与核物理，**13**(1989)，87.
[3] S. U. Chung, *Phys. Rev.*, **169** (1968), 1342.
[4] 郁宏，高能物理与核物理，**13**(1989)，574.
[5] Yu Hong, *Commun. Theor. Phys.*, **12** (1989), 229.
[6] 郁宏，高能物理与核物理，**14**(1990)，286.

THE MOMENT ANALYSIS FOR THE J/ψ HADRONIC DECAY PROCESS

Yu Hong　　Shen Qixing

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper we give the helicity formalism of the angular distribution for process $e^+ + e^- \to J/\psi \to V + X$, $V \to P_1P_2$ or $P_1P_2P_3$ and $X \to P\bar{P}$ simultaneously. By using this formalism the moment analysis and some relations have been obtained, which is helpful in determining the spin J_x of the boson resonance X and the helicity amplitude ratios of the process $J/\psi \to V + X$.