

# 带高阶项的 IBM 和 IBFM 推转计算

卢兰春 刘庸

(华中师范大学, 粒子物理研究所, 武汉)

## 摘 要

考虑到在角频率的最低阶近似 IBM 和 IBFM 的推转计算给出转动惯量的很好的估计, 因此本文推广这一方法, 研究转动惯量对高阶项的依赖关系. 我们发现能够推导出修正项的解析表达式. 我们对  $^{154}\text{Gd}$  和  $^{161}\text{Er}$  进行了数值计算并与实验资料作了对比, 哈密顿量是从一种微观方案获得的. 结果表明高阶项的性质与转动体系的形变有关, 但在小  $\omega$  情况下高阶项的影响甚小.

## 一、引 言

不久前, Schaaser 等人<sup>[1]</sup>利用相互作用玻色子模型 (IBM) 体系的内禀态做自洽推转计算, 导出了转动惯量的解析公式, 结果已证明是合理的. 因变形区态空间维数很高, 为了克服对角化相互作用玻色子-费米子模型 (IBFM) 哈密顿量的数值计算困难, 我们曾把推转方法推广到 IBFM 体系以讨论奇  $A$  核<sup>[2,3]</sup>, 发现计算结果也表现出合理性. 但是, 在内禀参数按角频率展开的级数中, 以上工作都只取了最低阶的近似, 使变分问题简化成了一个线性方程组<sup>[4]</sup>, 求出的转动惯量是与角频率  $\omega$  无关的常量. 我们认为, 如果不考虑高阶项引起的修正, 对计算方法的可靠性仍缺乏充分的了解, 因此本文中讨论高阶修正项. 在作理论分析以后发现, 虽然变分方程组不再是线性的, 但仍可求出各阶近似解的解析表达式, 方法的简单性并不受到破坏, 而得到的转动惯量已被表达为  $\omega$  的幂级数形式.

在第三小节中, 我们以偶偶核  $^{154}\text{Gd}$  和奇  $A$  核  $^{161}\text{Er}$  为例给出了数值计算结果. 使用的哈密顿量是按照以玻色子展开和 MJS 代换为基础的微观研究方案<sup>[5,6]</sup>获得的. 在激发谱的计算结果与实验资料定性符合的前提下, 着重讨论引入高阶项带来的变化.

## 二、带高阶项的推转方法

对高阶修正项作理论分析时, 对于 IBM 体系或 IBFM 体系的任一内禀态, 讨论的方法都相同, 而且导出的表达式形式上也相同. 只有在推导明显表达式时才需要用到哈密顿量和内禀态的具体形式. 因此, 我们不加区别地把哈密顿量记为  $H$ , 把要研究的正交的内禀态集合记为  $\{|\Psi_\rho\rangle\}$ , 其中指标  $\rho$  标定一个内禀态. IBM 和 IBFM 体系的  $\{|\Psi_\rho\rangle\}$

已分别在文献[1]和[2]中详细介绍过,例如 IBM 的内禀基态的形式为:

$$|\Psi_{g\text{IBM}}\rangle = (N!)^{-\frac{1}{2}}(B^\dagger)^N|0\rangle, \quad (2.1)$$

$$B^\dagger = \left(1 + \sum_{\mu} a_{\mu}^* a_{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(s^\dagger + \sum_{\mu} a_{\mu} d_{\mu}^\dagger\right), \quad (2.2)$$

而 IBFM 的内禀基态被考虑为(2.1)与奇核子基态内禀波函数  $|\chi_k\rangle$  的乘积:

$$|\Psi_{g\text{IBFM}}\rangle = (N!)^{-\frac{1}{2}}(B^\dagger)^N|0\rangle|\chi_k\rangle. \quad (2.3)$$

式中  $a_{\mu}(\mu = 0, \pm 1, \pm 2)$  是内禀参数. 若选取惯量主轴为内禀坐标轴,从对称性分析可知<sup>[1]</sup>:

$$a_{\mu} = a_{-\mu}, \quad a_{\mu} = a_{\mu}^*. \quad (2.4)$$

如通常的做法,集体转动轴定为  $x$  轴,转动角频率记为  $\omega$ . 为了研究转动惯量,应当确定  $a_{\mu}$  与  $\omega$  之间的关系. 按照推转模型,需要求解以下极值问题:

$$\delta\langle\Psi_{\rho}|H - \omega L_x|\Psi_{\rho}\rangle = 0. \quad (2.5)$$

引入下面两个记号:

$$\langle H \rangle = \langle\Psi_{\rho}|H|\Psi_{\rho}\rangle, \quad (2.6)$$

$$\langle L_x \rangle = \langle\Psi_{\rho}|L_x|\Psi_{\rho}\rangle. \quad (2.7)$$

于是确定内禀参数  $a_{\mu}$  的方程(2.5)变为

$$\frac{\partial\langle H \rangle}{\partial a_{\mu}} - \omega \frac{\partial\langle L_x \rangle}{\partial a_{\mu}} = 0. \quad (2.8)$$

(2.8)式是复杂的非线性方程组,直接求解很困难,因此,在  $\omega$  可以认为很小的条件下,考虑用级数展开的办法<sup>[1]</sup>. 以  $a_{\mu}^{(0)}$  代表  $\omega = 0$  时式(2.5)对基态解出的解,在  $a_{\mu} = a_{\mu}^{(0)}$  附近把  $\langle H \rangle$  与  $\langle L_x \rangle$  作 Taylor 展开,

$$a_{\mu} = a_{\mu}^{(0)} + \Delta_{\mu}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \langle H \rangle|_{a^{(0)}} + \frac{1}{2!} \sum_{\mu\nu} \Delta_{\mu} \Delta_{\nu} D_{\mu\nu}^2 \langle H \rangle_0 \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{\mu\nu\rho} \Delta_{\mu} \Delta_{\nu} \Delta_{\rho} D_{\mu\nu\rho}^3 \langle H \rangle_0 + \dots, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \langle L_x \rangle &= \sum_{\mu} \Delta_{\mu} D_{\mu} \langle L_x \rangle_0 + \frac{1}{2!} \sum_{\mu\nu} \Delta_{\mu} \Delta_{\nu} D_{\mu\nu}^2 \langle L_x \rangle_0 \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{\mu\nu\rho} \Delta_{\mu} \Delta_{\nu} \Delta_{\rho} D_{\mu\nu\rho}^3 \langle L_x \rangle_0 + \dots, \end{aligned} \quad (2.11)$$

式中

$$D_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^n \langle X \rangle_0 = \left. \frac{\partial^n \langle X \rangle}{\partial a_{\mu_1} \partial a_{\mu_2} \dots \partial a_{\mu_n}} \right|_{a^{(0)}}. \quad (2.12)$$

再把  $\Delta_{\mu}$  展开为  $\omega$  的幂级数,考虑到  $a_{\mu}$  的时间反演性质,展开式可以写为:

$$\Delta_0 = \alpha_0 \omega^2 + \beta_0 \omega^4 + \gamma_0 \omega^6 + \delta_0 \omega^8 + \dots, \quad (2.13)$$

$$\Delta_2 = \alpha_2 \omega^2 + \beta_2 \omega^4 + \gamma_2 \omega^6 + \delta_2 \omega^8 + \dots, \quad (2.14)$$

$$\Delta_1 = \alpha_1 \omega + \beta_1 \omega^3 + \gamma_1 \omega^5 + \delta_1 \omega^7 + \dots, \quad (2.15)$$

其中  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i (i = 0, 1, 2)$  是待定的系数. 确定  $a_{\mu}$  与  $\omega$  的关系就是要确定这些系数. 注意到(2.9)式,对  $a_{\mu}$  求导可改为对  $\Delta_{\mu}$  求导,

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \Delta_\mu} - \omega \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial \Delta_\mu} = 0. \quad (2.16)$$

把上面的展开式代入(2.16)将得到(2.13)–(2.15)式的系数。以前的工作只取了(2.10)和(2.11)式的最低阶项,因此,从(2.16)导出关于 $\Delta_\mu$ 的线性方程组, $\Delta_0$ 和 $\Delta_2$ 只有平庸解, $\Delta_1$ 只有 $\omega$ 的线性项,这意味着转动体系永远是轴对称的,转动惯量则与 $\omega$ 无关。

现在不取最低阶近似,直接把展开式(2.10)和(2.11)代入(2.16),再把(2.13)–(2.15)代入所得的方程。比较等式两边 $\omega$ 幂次相同的项,整理以后得到以下一系列恒等式:

当 $\mu = 0$ 和2时,

$$\sum_{\nu=0,2} \alpha_\nu D_{\nu\mu}^2 \langle H \rangle_0 = f_1(\alpha_1), \quad (2.17)$$

$$\sum_{\nu=0,2} \beta_\nu D_{\nu\mu}^2 \langle H \rangle_0 = f_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1), \quad (2.18)$$

$$\sum_{\nu=0,2} \gamma_\nu D_{\nu\mu}^2 \langle H \rangle_0 = f_3(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_1), \quad (2.19)$$

$$\sum_{\nu=0,2} \delta_\nu D_{\nu\mu}^2 \langle H \rangle_0 = f_4(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1), \quad (2.20)$$

.....;

当 $\mu = 1$ 时,

$$\alpha_1 D_{11}^2 \langle H \rangle_0 = D_1 \langle L_x \rangle_0, \quad (2.21)$$

$$\beta_1 D_{11}^2 \langle H \rangle_0 = g_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2), \quad (2.22)$$

$$\gamma_1 D_{11}^2 \langle H \rangle_0 = g_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2), \quad (2.23)$$

$$\delta_1 D_{11}^2 \langle H \rangle_0 = g_3(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2), \quad (2.24)$$

.....,

式中的 $f_i$ 和 $g_i$ 都是展开式(2.13)–(2.15)系数的函数,同时含有如(2.12)式给出的若干常数因子。由以上各式构成的方程组看起来虽很复杂,它的特殊结构却使我们很容易逐步解出来。从式(2.21)有

$$\alpha_1 = D_1 \langle L_x \rangle_0 / D_{11}^2 \langle H \rangle_0. \quad (2.25)$$

把 $\alpha_1$ 代入(2.17)式左边,得一个关于 $\alpha_0$ 和 $\alpha_2$ 的二元一次方程组,把它的解记为

$$\alpha_\mu = h_\mu(\alpha_1) \quad (\mu = 0, 2), \quad (2.26)$$

那末,把(2.25)和(2.26)代入(2.22),就得到

$$\beta_1 = g_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) / D_{11}^2 \langle H \rangle_0. \quad (2.27)$$

用以上结果,从(2.18)式可解出 $\beta_0$ 和 $\beta_2, \dots$ 。依此类推,可以逐步求得展开式(2.13)–(2.15)任意阶的系数。

把已确定的 $\Delta_\mu$ 展开式代回(2.11),我们得到 $\langle L_x \rangle$ 按 $\omega$ 作幂级数展开的具体形式。考虑转动惯量 $\mathcal{I}$ 用 $\omega$ 展开的表达式

$$\mathcal{I}(\omega) = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 \omega^2 + \mathcal{I}_2 \omega^4 + \mathcal{I}_3 \omega^6 + \dots \quad (2.28)$$

及 $\langle L_x \rangle = \omega \mathcal{I}(\omega)$ ,容易推导出转动惯量各阶系数的函数形式,例如

$$\mathcal{I}_0 = \alpha_1 D_1 \langle L_x \rangle_0, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{I}_1 = \beta_1 D_1 \langle L_x \rangle_0 + \alpha_1 \sum_{\nu=0,2} \alpha_\nu D_{\nu 1}^2 \langle L_x \rangle_0 + \frac{1}{6} \alpha_1^3 D_{111}^3 \langle L_x \rangle_0. \quad (2.30)$$

(2.29)式正是最低阶近似时的解,与(2.28)式对应的转动能为

$$E(I) = AI(I+1) + BI^2(I+1)^2 + CI^3(I+1)^3 + \dots. \quad (2.31)$$

系数  $A, B, C, \dots$  由  $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots$  唯一确定<sup>[5]</sup>.

有高阶项以后,  $\Delta_2$  的解不再是平庸的. 在  $\omega = 0$  时  $a_2 = 0$ , 但  $\omega \neq 0$  时  $a_2$  不为零, 此时体系已稍微偏离了轴对称. 从(2.30)式的第二项看出, 高阶修正项包括形变偏离轴对称引起的效应.

### 三、计算结果

我们作计算的目的是通过高阶项更深入地考察作推转计算的可靠性以及作高阶计算的必要性. 偶偶核和奇  $A$  核各取了一例. 所用的哈密顿量是按照以前提出的一种微观方法得到的. 这种方法<sup>[4]</sup>, 首先用玻色子展开把价核子的壳模型描述转换为理想玻色子描述(对奇  $A$  核则用广义玻色子展开转换为玻色子-费米子描述<sup>[6]</sup>). 在玻色子空间中构造有强集体性的玻色子, 给出  $s, d$  算符的定义, 作  $s-d$  截断后推导出的  $s-d$  哈密顿量就是描述低能集体态的 IBM 或 IBFM 哈密顿量. 计算中同类核子的有效相互作用为对力、四极对力和四极-四极力, 中子-质子相互作用为四极-四极力. 价核子能级和相互作用参数分别见表 1 和表 2.  $^{161}\text{Er}$  的奇核子波函数取 Nilsson 波函数.  $^{154}\text{Gd}$  算了转动惯量的一阶修正项,  $^{161}\text{Er}$  计算到转动惯量的三阶项. 获得的结果分别见图 1 和图 2. 这些结果与实验是符合得较好的.

表 1 价核子能级

中 子 能 级			质 子 能 级		
nlj	E(MeV)		nlj	E(MeV)	
	$^{154}\text{Gd}$	$^{161}\text{Er}$		$^{154}\text{Gd}$	$^{161}\text{Er}$
$3p_{1/2}$	8.88	8.61	$3s_{1/2}$	7.21	7.11
$2f_{5/2}$	7.64	7.52	$2d_{3/2}$	6.76	6.84
$1i_{13/2}$	6.85	5.50	$1h_{11/2}$	5.32	6.00
$1h_{9/2}$	5.80	6.50	$2d_{5/2}$	5.00	4.70
$3p_{3/2}$	4.30	5.00	$1g_{7/2}$	4.00	4.00
$2f_{7/2}$	4.00	4.00			

表 2 核子-核子有效相互作用参数

核	$\varepsilon_n$	$G'_n$	$K'_n$	$\varepsilon_p$	$G'_p$	$K'_p$	$K'_{np}$
$^{154}\text{Gd}$	0.052	0.049	0.020	0.0315	0.044	0.020	0.004
$^{161}\text{Er}$	0.048	0.055	0.030	0.034	0.049	0.030	0.004

表 3 和表 4 分别给出了转动惯量和转动能展开式的系数. 我们看到, 各带的修正项的量级和随  $\omega$  变化的趋势都是合理的. 与最低阶近似的结果相比, 在能量展开式适用的角

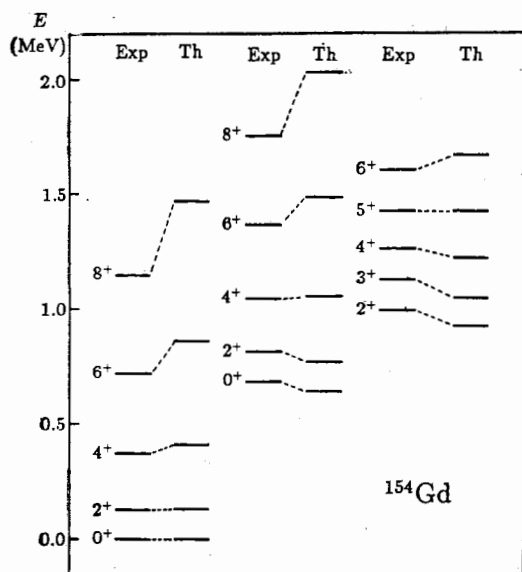


图1  $^{154}\text{Gd}$  的能谱. Exp 与 Th 分别标  
记实验值和理论值.

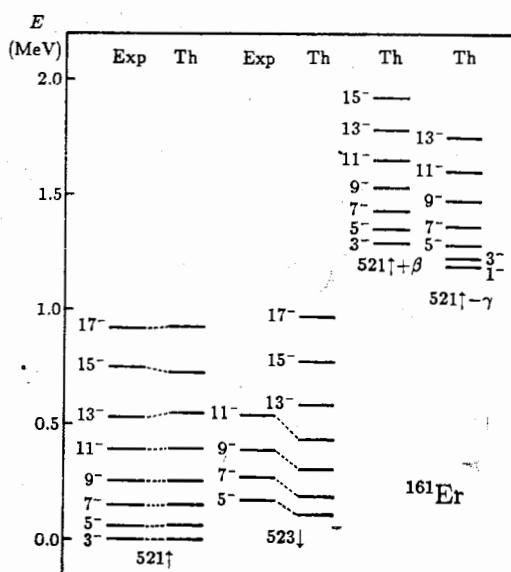


图2  $^{161}\text{Er}$  的能谱,说明见图1. 能级  
旁标的数字是角动量的两倍.

表3 转动惯量展开式系数

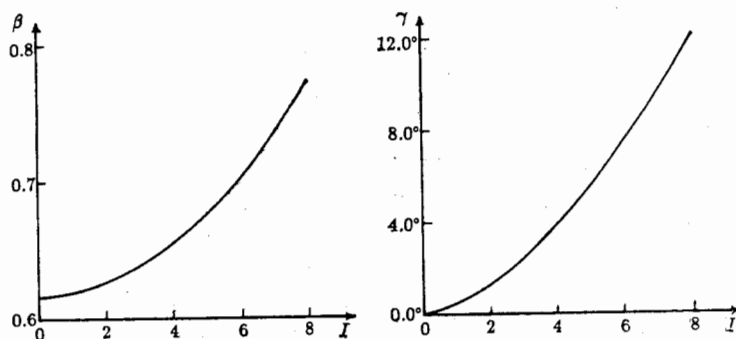
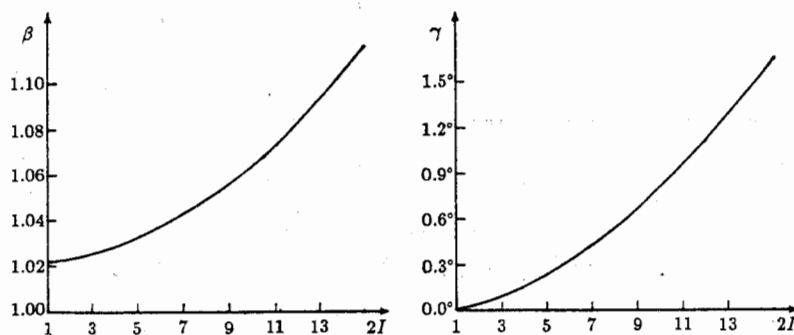
band	$^{154}\text{Gd}$		$^{161}\text{Er}$			
	$\mathcal{I}_0$	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_0$	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3(10^4)$
g	24.41	0.3767	41.02	17.49	-42.92	0.2804
$\beta$	23.22	39.95	43.20	134.16	3512.1	15.93
$\gamma$	23.35	19.40	41.85	52.43	19.52	1.020
523↓			40.51	29.76	-46.02	0.5516

表4 转动能展开式的系数

band	$^{154}\text{Gd}$				$^{161}\text{Er}$			
	$A(10^{-1})$	$B(10^{-5})$	$C(10^{-8})$	$D(10^{-10})$	$A(10^{-1})$	$B(10^{-5})$	$C(10^{-8})$	$D(10^{-10})$
g	0.2048	-0.0265	0.0014	-0.00001	0.1219	-0.1545	0.2285	-0.4661
$\beta$	0.2154	-3.438	21.95	-21.02	0.1157	-0.9627	-5.798	-9.016
$\gamma$	0.2141	-1.631	4.968	-2.271	0.1195	-0.4272	0.5505	-1.459
523↓					0.1234	-0.2763	0.4209	-1.031

动量范围内,引入高阶项不改变在最低阶近似获得的转动谱的结构,角动量较高时修正项的作用才逐渐明显.对于 $^{154}\text{Gd}$ ,我们也计算了哈密顿量的精确谱,对比发现修正项能改善基带和 $\gamma$ -带的结果, $\beta$ -带则相反,但总的说来,在角动量较低的情况下,修正项的影响并不显著.

第二节中已指出, $\omega \neq 0$  时体系将偏离轴对称.图3和图4给出了内禀参数 $\beta$ 和 $\gamma$ 随角动量的变化关系.随着转动频率的增高 $\beta$ 和 $\gamma$ 都单调地增加.按照对参数意义的解释<sup>[7,8]</sup>,这表明转动体系形变逐渐增大并且偏离轴对称.通过高阶项,可以考察体系形变

图 3  $^{154}\text{Gd}$  内禀参数随角动量的变化图 4  $^{161}\text{Er}$  内禀参数随角动量的变化

的情况,而最低阶近似不能反映这种相关性。

#### 四、讨 论

因为变形核态空间的维数高,特别是 IBFM 体系,这与数值计算的困难相联系,因此探讨简单且合理的近似方法有一定意义。推转计算方法能导出转动惯量的解析式,对实际应用来说就具有吸引力,在只取最低阶近似的情况下我们曾研究过奇  $A$  核<sup>[3]</sup>,本文讨论高阶项也是为了检验计算结果的可靠性。我们看到,考虑高阶项后方法仍是解析的,因此仍很简单,并且,对  $^{154}\text{Gd}$  和  $^{161}\text{Er}$  的计算结果表明,在  $\omega$  较小的条件下,转动惯量随  $\omega$  的变化是合理的,高阶项只导致小的修正,因此我们认为,用作能谱结构的定性研究,推转方法是可靠的。

本文工作并不假定  $\omega \neq 0$  时体系仍保持轴对称,计算出的内禀参数随角动量的变化关系是合理的。如果假定体系永远保持轴对称性,即  $\gamma$  恒等于零,那么计算出的转动惯量随  $\omega$  变化的关系也是非物理的,这与 Arpita 等人研究高阶 IBM 推转计算的结论一致<sup>[9]</sup>。因此,体系转动时非轴对称形变的效应看来是重要的。

因为计算中使用的哈密顿量是按微观研究方法<sup>[3,4]</sup>得到的,而以前对  $^{154}\text{Gd}$  和  $^{161}\text{Er}$  并未作过微观计算,图 1 和图 2 显示的理论实验的符合也表明微观导出的 IBM 和 IBFM

哈密顿量可以描述原子核的低能集体态。

### 参 考 文 献

- [1] H. Schaaser and D.M. Brink, *Nucl. Phys.*, **A452**(1986), 1.
- [2] 刘庸、桑建平, 高能物理与核物理, **12**(1988), 644.
- [3] 刘庸、桑建平, 高能物理与核物理, **13**(1989), 346.
- [4] Yang Zesen, Liu Yong and Qi Hui, *Nucl. Phys.*, **A421** (1984), 297
- [5] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol.II* W. A. Benjamin Inc., New York (1975).
- [6] 杨泽森、钟毓澍、齐辉、杨立铭, 高能物理与核物理, **2**(1978), 158.
- [7] J. N. Ginocchio and M.W. Kirson, *Nucl. Phys.*, **A350** (1980), 31; *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1744.
- [8] A. Bohr and B.R. Mottelson, *Physica Scripta*, **22** (1980), 468; **25**(1982), 28.
- [9] Arpita Mishra and A. N. Mantri, *J. Phys. G. Nucl. Phys.*, **13** (1987) L275.

## HIGH-ORDER CRANKING CALCULATION IN THE INTERACTING BOSON MODEL AND INTERACTING BOSON-FERMION MODEL

LU LANCHUN LIU YONG

(*Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan*)

### ABSTRACT

Considering that the IBM and IBFM cranking calculations in the lowest order of angular frequency can give reasonably good estimates for the moment of inertia, we extend them to study the dependence of the moment of inertia on the higher order terms. We find that the analytic expressions for the correction terms can be derived. Numerical calculations for  $^{154}\text{Gd}$  and  $^{161}\text{Er}$  are performed and compared with experiment. The Hamiltonian is taken from a microscopic approach. Calculated results show that the properties of higher order terms depend on the deformation of rotating system but the correction yields only limited effect when  $\omega$  is small.