

2+1 维 $SU(2)$ 群胶球质量的 MC 计算*

李志兵 郑维宏 郭硕鸿

(中山大学, 广州)

摘 要

本文对具有严格基态解的格点规范哈密顿量, 结合变分法和 Monte Carlo 方法, 在 18^2 格点上, 计算了 2+1 维 $SU(2)$ 规范群的正二十面体分立点群的胶球质量, 在 $0 < 1/g^2 \leq 2$ 范围内, 得到与 $SU(2)$ 群的解析变分法^[1] 一致的结果。验证了质量隙的标度行为是 $am = 2.3g^2$ 。

我们已经找到一个具有严格基态解的格点规范理论的哈密顿量^[1], 并采用变分法, 解析地计算了 2+1 维 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 、 $SU(3)$ 群的胶球质量的严格上限^[2-4], 得到在相当大范围内 ($0 < 1/g^2 \leq 6$), 标度行为是 $ma \propto g^2$, (其中 $g^2 = e^2a$, e 为荷), 这与弱耦合展开^[5] 及 Monte Carlo 计算结果^[9-11] 一致。但是, 这种方法较难准确推广到 3+1 维情形, 原因是变分矩阵元的积分很难准确地解析计算。但是, 若结合变分法与 MC 计算方法, 利用 MC 方法计算变分矩阵元, 则可解决这一问题。而且由于我们采用 Hamilton 形式的格点规范理论, 在进行 MC 计算时, 可减少一维空间, 及能利用已知的准确基态及对易关系, 这样能大大减少 MC 计算时间, 而且能在比较大的点阵上进行计算。为了检验这一方法的可靠性, 本文先计算 2+1 维 $SU(2)$ 群的情形, 为以后计算 3+1 维做准备, 同时检查一下 MC 计算的可靠性。我们选取 6 个变分态, 并用 $SU(2)$ 群的正二十面体分立点群 (Y_{120}) 代替连续的 $SU(2)$ 群, 在 $0 < 1/g^2 \leq 2$ 范围内, 得到与解析变分法^[1] 一致的标度行为: $am = 2.3g^2$ 。但计算范围比解析变分法的计算范围 ($0 < 1/g^2 \leq 7$) 小得多, 而且计算结果也比解析变分法粗糙, 但相对于单纯通过计算关联长度来求 2+1 维 $SU(2)$ 群胶球质量的 MC 现有计算结果^[9-11] 来说, 计算范围却要大, 统计涨落及计算时间却要小, 并显示出更稳定的标度行为, 因为我们的计算是在比这种单纯的 MC 计算少一维的点阵上进行的。由此看来, 结合变分法与 MC 方法, 利用 MC 方法计算变分矩阵元这一方法是可行的。我们将把这一方法推广到 3+1 维 $SU(2)$ 群情形。

具有严格基态解的纯格点规范场的哈密顿量为:

$$H = \frac{g^2}{2a} e^{-R} E_i^a e^{2R} E_i^a e^{-R} \quad (1)$$

$$\text{其中 } R = \frac{4}{3g^4} \sum_x \text{tr} U_\rho(\mathbf{x}) = \frac{x}{2} \sum_x \text{tr} U_\rho(\mathbf{x}), \quad x = \frac{8}{3} g^{-4}.$$

* 此项研究得到国家教委科学基金和中山大学高等学术中心基金会资助。
本文 1987 年 12 月 9 日收到。

$$\text{准确基态: } |\bar{\Psi}_0\rangle = e^R|0\rangle \quad (2)$$

其中 $|0\rangle$ 由 $E_i^2|0\rangle = 0$ 决定.

我们采用变分法求 (1) 式激发态能谱, $SU(2)$ 群规范场的最低激发态为 $J^{PC} = 0^{++}$ 态, 对比激发态, 我们选取与我们在解析变分法^[3] 中一样的变分态, 但这里考虑到计算 $1/g^2$ 范围没有解析变分法大, 故只选择解析变分法前 6 个变分态:

$$|\bar{\Psi}\rangle = \sum_{n=1}^6 C_n(\hat{\Phi}_n - \nu_n)|\bar{\Psi}_0\rangle \quad (3)$$

$$\hat{\Phi}_n = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{x}} \text{tr} U_{n,p}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

式中 C_n 为变分参数, V 为格点总数, $U_{n,p}(\mathbf{x})$ 表示一个端点在 \mathbf{x} 处的 $n \times n$ 矩形 Wilson 圈, 为了使 $(\hat{\Phi}_n - \nu_n)|\bar{\Psi}_0\rangle$ 与基态 $|\bar{\Psi}_0\rangle$ 正交, ν_n 取为 $\nu_n = \langle \hat{\Phi}_n \rangle_0$.

胶球质量由下面本征值方程决定:

$$\det \|w_{mn} - \lambda D_{mn}\| = 0 \quad (5)$$

式中本征值 $\lambda = 2am\beta = 2am/g^2$, w_{mn} 、 D_{mn} 为变分矩阵元, 它们是:

$$w_{mn} = -\frac{1}{V} \left\langle \sum_{l \in xy} [E_l^a, \hat{\Phi}_m(\mathbf{x})][E_l^a, \hat{\Phi}_n(\mathbf{y})] \right\rangle_0 \quad (6)$$

$$D_{mn} = \frac{1}{V} \sum_{xy} [\langle \hat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \hat{\Phi}_n(\mathbf{y}) \rangle_0 - \langle \hat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \rangle_0 \langle \hat{\Phi}_n(\mathbf{y}) \rangle_0] \quad (7)$$

容易严格解析证明^[3], 2+1 维规范场是无关联的, 也就是说, 若两个 Wilson 圈 $U_{p_1}(\mathbf{x})$ 、 $U_{p_2}(\mathbf{y})$ 无重叠部分时, $\langle \text{tr} U_{p_1}(\mathbf{x}) \text{tr} U_{p_2}(\mathbf{y}) \rangle_0 - \langle \text{tr} U_{p_1}(\mathbf{x}) \rangle_0 \langle \text{tr} U_{p_2}(\mathbf{y}) \rangle_0 = 0$.

我们先解析地求出变分矩阵元 w_{mn} 的对易关系, 并利用 2+1 维的性质, $\hat{\Phi}_m(\mathbf{x})$ 、 $\hat{\Phi}_n(\mathbf{y})$ 无重叠部分对 w_{mn} 、 D_{mn} 的贡献为 0, 然后利用 Monte Carlo 方法求 $\hat{\Phi}_m(\mathbf{x})$ 、 $\hat{\Phi}_n(\mathbf{y})$ 有重叠部分对 w_{mn} 、 D_{mn} 的贡献, 再求本征值.

为了节约计算时间, 我们采用 $SU(2)$ 群的正二十面体分立点群 (Y_{120}) 代替连续 $SU(2)$ 群对格点进行 Monte Carlo 模拟. 在进行 Monte Carlo 模拟之前, 先计算这个分立点群 120 个元素的乘法表及特征标, 然后存入计算机内, 这样在进行 MC 计算时可节省很多机时. 由于我们采用 Hamilton 形式的格点规范理论, 时间轴已被转化为对易关系而被完全考虑, 这样 2+1 维格点规范理论只需在 2 维点阵上计算. 而在 2 维点阵上进行 MC 计算时, 不存在由于 $SU(2)$ 的正二十面体分立子群 Y_{120} 代替连续 $SU(2)$ 群而带来的相变点, (而在 4 维点阵上进行这一代替会引进一阶相变点^[6]). 因此, 用分立子群代替连续群是完全适用的. 为了证实这一适用性, 在 12^2 点阵上, 我们计算了 plaquette 的基态平均值:

$$\langle \text{tr} U_p \rangle_0 = Z^{-1} \int [dU_l] \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{x}} \text{tr} U_p(\mathbf{x}) e^{2R}$$

结果如图 1, 从图中可以看出, 没有由于分立点群带来的相变点, 而且结果与严格解析结果^[3] $\langle \text{tr} U_p \rangle_0 = 2I_2(2x)/I_1(2x)$ 一致.

本文在 18^2 点阵上, 采用 MC 的 Heat Bath 方法进行下面计算. 计算时, 每个数据做了 340 个迭代, 其中 20 个作预热, 10 个迭代产生一个测量值, 并且计算了结果的统计

误差.

1. 不重迭 $U_p(\mathbf{x})$ 、 $U_p(\mathbf{y})$ 的关联函数:

$$C = \frac{1}{V} \sum'_{\mathbf{x}\mathbf{y}} [\langle \text{tr}U_p(\mathbf{x})\text{tr}U_p(\mathbf{y}) \rangle_0 - \langle \text{tr}U_p(\mathbf{x}) \rangle_0 \langle \text{tr}U_p(\mathbf{y}) \rangle_0]$$

结果如图 2, 这与解析结果 $C = 0$ 一致.

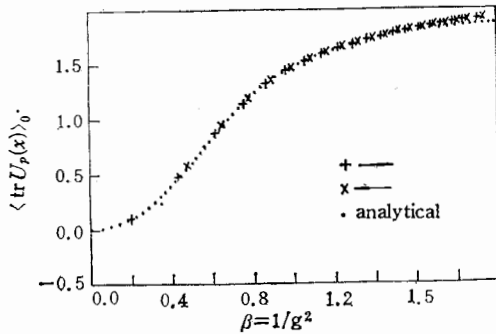


图 1 $\langle \text{tr}U_p(\mathbf{x}) \rangle_0$ 的加热、冷却与解析结果

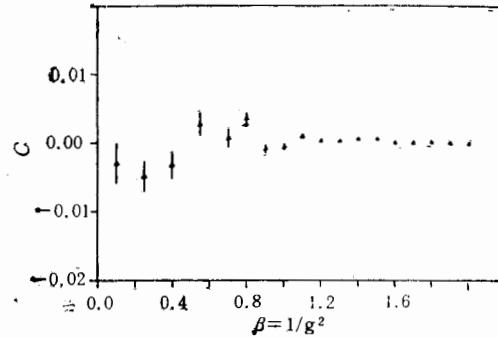


图 2 关联函数

2. $n \times n$ 的 Wilson 圈的基态平均值 $\langle \text{tr}U_{np}(\mathbf{x}) \rangle_0$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 如图 3, 从图中可以看出, 在同样大小的点阵上计算, 小的 Wilson 圈的计算结果比大的 Wilson 圈准确. 解析计算的结果^[3]是 $\langle \text{tr}U_{np}(\mathbf{x}) \rangle_0 = 2[I_2(2x)/I_1(2x)]^{n^2}$.

3. 胶球质量. 我们计算了变分态数 $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的 βam 与 $\beta = 1/g^2$ 关系曲线, 在 $0 < 1/g^2 \leq 2$ 范围内, 得到标度行为 $am = 2.2g^2$, 如图 4, 这与解析变分计算结果 $am = 2.28g^2$ 一致, 也与弱耦合展开结果一致. 而单纯 MC 方法的最新结果是在 $3.5 \leq 4/g^2 \leq 5.5$ 范围内获得 $am = (2.15 \pm 0.2)g^2$ 的标度行为^[11].

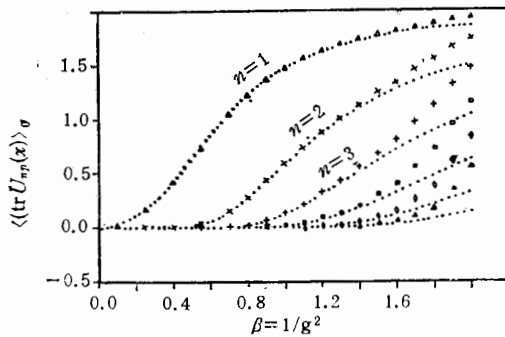


图 3 $n \times n$ 的 Wilson 圈的基态平均值 $\langle \text{tr}U_{np}(\mathbf{x}) \rangle_0$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 图中用点表示解析计算结果

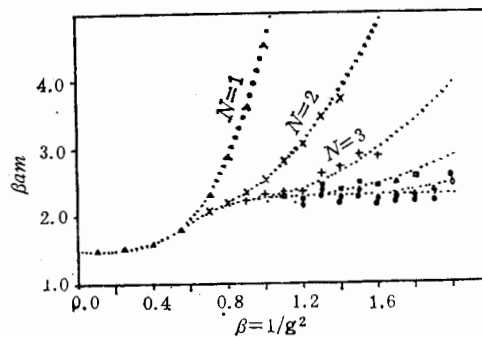


图 4 变分态数 $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的 βam 与 $\beta = 1/g^2$ 的关系曲线
图中用点表示解析变分结果

对张剑波和应和平热情地提供了产生分立子群的程序, 表示感谢.

参 考 文 献

[1] Guo S. H., Liu J. M. and Chen Q. Z., *Chin. Phys. Lett.*, 2(1985), 409.

- [2] Guo S. H., Zheng W. H. and Liu J. M., *Chin. Phys. Lett.*, **3**(1986), 445.
- [3] 郑维宏、刘金明、郭硕鸿, 高能物理与核物理, **12**(1988), 134.
- [4] 刘金明、郑维宏、郭硕鸿, 2+1 维 $SU(3)$ 群格点规范的胶球质量, «高能物理与核物理»待发表.
- [5] V. F. Muller and W. Ruhl, *Nucl. Phys.*, B **230**(1984), 49.
- [6] 李文铸、张剑波、董绍静, 物理学报, **34**(1985), 49.
- [7] H. Arisue, M. Kato and T. Fujiwara, *Progr. of Theor. Phys.* **70**(1983), 229.
- [8] C. J. Hamer and A. C. Irving, *Z. Phys. C.*, **27**(1985), 307.
- [9] E. d'Hoker, *Nucl. Phys.*, **B180**(1981), 341.
- [10] A. Irbach and C. Peterson, *Phys. Lett.*, **B174**(1986), 99.
- [11] K. Farakos, G. Koutsoumbas and S. Sarantakos, *Phys. Lett.*, **B189**(1987), 173.

THE MC CALCULATION OF MASS GAP IN 2+1 DIMENSIONAL $SU(2)$ LATTICE GAUGE THEORY

LI ZHIBING ZHENG WEIHONG GUO SHUOHONG

(Zhongshan University, Guang Zhou)

ABSTRACT

By combining Monte Carlo method and variational method, we calculate the mass gap of $SU(2)$ lattice gauge theory in $18^* 18$ lattice of 2+1 dimensions by means of the icosahedral subgroup (Y120) using a hamiltonian of which the ground state is exactly known. In the range $0 < 1/g^2 \leq 2$, we obtain the results which are in good agreement with analytical variational calculation of $SU(2)$ group. The scaling behaviour of mass gap $am = 2.3 g^2$ is confirmed.