第13卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 13, No. 4
1989 年 4 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Apr., 1989

弦理论中两种规范间的变换

卢建新 阮图南
(中国科技大学，合肥)

摘 要

本文给出 Bose 开弦理论中由协变规范到光锥规范的变换．由此给出两种规范下相应态矢之间的联系，并得到协变规范下的一组态矢正交完备集和任意时空维数 D 及 Regge 轨迹截距 $\alpha(0)$ 下的物理投影算子，后者在 $D=26$, $\alpha(0)=1$ 时退化为 L. Brink 和 D. OLive 给出的结果[1]；最后证明了协变规范下除基态 Tachyon 外，质量平方算子 $\hat{M}^2 \geqslant 0$.

一、引 言

超弦是目前粒子物理的前沿理论之一．由于这一理论具有许多很好的性质，人们企图利用它来统一自然界的四种基本相互作用．本文给出了 Bose 开弦理论中两种常用规范如协变规范和光锥规范之间的联系．DDF[2] 和 R. C. Brower[3] 的工作已经很接近这一步．

本文采用算子的意义和定义见文献[4]，此外有如下约定：对任一算子 A, A^c 表示它是协变规范下的算子，而 A^L 代表它是光锥规范下的算子．R. C. Brower[3] 将 DDF[2] 给出的协变规范下一个物理粒子发射一个光子顶角相应的振幅算子标度化 ($k'=nk$, $k'^2=0$)，以及共形规范不变性要求分别得到算子 A^i_n, $A^{(+)}_n$，由此算子得到了协变规范下的整个物理正交态矢．他所给出的算子 A^i_n 本质上与本文由变换 $\alpha^{Li}_n = U\alpha^{Ci}_n U^{-1}$ 得到算子 α^{Li}_n 一致，但 R. C. Brower 给出的 A^i_n 没有体现它与 α^{Ci} 的关系，且其形式也不适于考虑两种规范下态之间的联系．本文求得了一幺正算子 U，给出了一正交完备集 $\{|r\rangle^c\} \equiv \{U\cdot|n\rangle^c\}$，其中一部分恰巧是光锥规范下的态空间．当 $D=26$, $\alpha(0)=1$ 时，光锥规范下的态空间可视为协变规范下的物理空间，这样我们又得到协变规范下一个物理与非物理空间明显分开的正交完备集 $\{|r\rangle^c\}$. 由幺正算子 U，求得了任意 D 和 $\alpha(0)$ 时两种规范下相应粒子数算子之差 $\mathscr{K}$ 的本征态．由此构造了任意 D 和 $\alpha(0)$ 下的物理投影算子，它将协变规范下满足质壳条件的整个态空间投影为光锥规范下的态空间，且在 $D=26$, $\alpha(0)=1$ 时退化为 L. Brink 和 D. OLive 的结果[1]. 最后明显证明了协变规范下，除基态 Tachyon 外，质量平方算子 $\hat{M}^{c2} \geqslant 0$.

本文 1987 年 12 月 2 日收到.

二、两种规范下算子和态矢间的变换

光锥规范下的态空间等效于协变规范下如下条件决定的子空间:

$$(L_n^C - \delta_{n,0}\alpha(0))|\phi\rangle^c = 0, \qquad (n \geqslant 0) \tag{2.1a}$$

$$(\alpha_{n+}^C - \delta_{n,0})|\phi\rangle^c = 0 \tag{2.1b}$$

光锥规范下算子满足如下条件:

$$[\alpha_n^{Li}, \alpha_m^{Lj}] = n\delta^{ij}\delta_{n,-m}, \tag{2.2a}$$

$$\alpha_{n+}^L = \delta_{n,0}, \tag{2.2b}$$

$$[L_n^C, \alpha_m^{Li}] = 0, \tag{2.2c}$$

$$[\alpha_{n+}^C, \alpha_m^{Li}] = 0 \tag{2.2d}$$

式中 $(i, j = 1, 2, \cdots D-2)$,(2.2c) 和 (2.2d) 从分析 $L_n^C|\text{phys}\rangle^L = 0, \alpha_n^C + |\text{phys}\rangle^L = 0$ $(n > 0)$ 得到。我们发现满足式 (2.2a)—(2.2d) 的 α^L 可通过 α^C 构造出来

$$\alpha_n^{Li} = Ue^{inq_+^C}\alpha_n^{Ci}U^{-1}, \tag{2.3a}$$

$$\alpha_{n+}^L = Ue^{inq_+^C}\alpha_{n+}^C U^{-1} - e^{inq_+^C}\left[B, \int_0^1 d\lambda U(\lambda)\alpha_{n+}^C U^{-1}(\lambda)\right] \tag{2.3b}$$

其中 $U = e^S$, $U(\lambda) = e^{\lambda S}$ 而 $S = \sum_{l\neq 0} : \frac{1}{l} L_{-l}^C\alpha_{l+}^C + \frac{1}{l}\alpha_{-l-}^C\alpha_{l+}^C :$, $B = \sum_{l\neq 0} : \frac{1}{l}\alpha_{-l-}^C \times \alpha_{l+}^C :$. 显然 U 是一幺正算子因 $S^+ = -S$, 从而上述变换可视为"幺正变换"。利用 $[\alpha_n^{Ci}, \alpha_m^{Cj}] = n\delta^{ij}\delta_{n,-m}$ 和 (2.3a) 式,可得 (2.2a). 由算子公式:

$$e^S M e^{-S} = M + [S, M] + \frac{1}{2!}[S, [S, M]] + \cdots$$

$$+ \frac{1}{m!}[S[S\cdots[S, \underbrace{M]\cdots]]}_{m} + \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} S_m \tag{2.4}$$

式中 $S = \sum_{l\neq 0} : \frac{1}{l} L_{-l}^C\alpha_{l+}^C + \frac{1}{l}\alpha_{-l-}^C\alpha_{l+}^C :$. 令 $A \equiv \sum_{l\neq 0} : \frac{1}{l} L_{-l}^C\alpha_{l+}^C :$ 则有下列对易子:

$$[A, \alpha_n^{Ci}] = \sum_{l\neq 0} \alpha_{n-l}^{Ci} \frac{-n\alpha_{l+}^C}{l}, \tag{2.5a}$$

$$[A, \alpha_{n+}^C] = \sum_{l\neq 0} \alpha_{n-l+}^C \frac{-n\alpha_{l+}^C}{l}, \tag{2.5b}$$

$$[B, \alpha_n^{Ci}] = 0, \tag{2.5c}$$

$$[B, \alpha_{n+}^C] = \alpha_{n+}^C(1 - \delta_{n,0}) \tag{2.5d}$$

令 $M = e^{inq_+^C}\alpha_n^{Ci}$ 有

$$S_m = e^{inq_+^C} \sum_{l_1,\cdots l_m\neq 0} \alpha_{n-l_1-\cdots-l_m}^{Ci} \frac{-n\alpha_{l_1+}^C}{l_1} \cdots \frac{-n\alpha_{l_m+}^C}{l_m}, \tag{2.6}$$

令 $M = e^{inq_+^C}\alpha_{n+}^C$, 又有

$$S_m = e^{inq_+^C} \sum_{l_1\cdots l_m\neq 0} \alpha^C_{n-l_1-\cdots-l_m+} \frac{-n\alpha^C_{l_1+}}{l_1}\cdots\frac{-n\alpha^C_{l_m+}}{l_m}$$
$$+ e^{inq_+^C}[B, S_{m-1}] \tag{2.7}$$

由 (2.6),(2.7),(2.4) 式，(2.3a) 式和 (2.3b) 式化为

$$\alpha_n^{Li} = e^{inq_+^C}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{l_1\cdots l_m\neq 0}\alpha^{Ci}_{n-l_1-\cdots-l_m}\frac{-n\alpha^C_{l_1+}}{l_1}\cdots\frac{-n\alpha^C_{l_m+}}{l_m}, \tag{2.8a}$$

$$\alpha^L_{n+} = e^{inq_+^C}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{l_1\cdots l_m\neq 0}\alpha^C_{n-l_1-\cdots-l_m+}\frac{-n\alpha^C_{l_1+}}{l_1}\cdots\frac{-n\alpha^C_{l_m+}}{l_m} \tag{2.8b}$$

由此我们验证了 (2.8a)、(2.8b) 式或 (2.3a) 和 (2.3b) 式中的 $\alpha_n^{Li}, \alpha^L_{n+}$ 满足 (2.2b) 式，(2.2c) 式和 (2.2d) 式。

进一步研究表明 (2.8a) 式和 (2.8b) 式或 (2.3a) 式和 (2.3b) 式可写为:

$$\alpha_n^{Li} = \oint\frac{dx}{2\pi ix}\varepsilon^i\cdot P^C(x)e^{ink\cdot Q^C(x)}, \tag{2.9a}$$

$$\alpha^L_{n+} = \oint\frac{dx}{2\pi ix}k\cdot P^C(x)e^{ink\cdot Q^C(x)}. \tag{2.9b}$$

其中 $k_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0,0,\cdots -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $k\cdot\varepsilon^i = 0$, $\varepsilon^i\cdot\varepsilon^j = -\delta^{ij}$ 而 $P^C(x)$, $Q^C(x)$ 为 Fubini-Veneziano 场，其定义为

$$Q^C_\mu(x) \equiv q^C_\mu - iP^C_\mu \ln x - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(a^{C+}_{n\mu}x^n - a^C_{n\mu}x^{-n}),$$

$$P^C_\mu(x) \equiv ix\frac{dQ^C_\mu(x)}{dx}$$

在此我们要指出的是 (2.9a) 式给出的 α_n^{Li} 与 R. C. Brower[3] 将 DDF[2] 给出的一个物理粒子发射一个光子顶角相应的振幅算子标度化 ($k' = nk$, $k'^2 = 0$) 后所得算子 A_n^i 完全一样。(2.9a) 式和 (2.9b) 式逆变换为:

$$\alpha_n^{Ci} = \oint\frac{dx}{2\pi ix}x^n k\cdot P(x)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha_l^{Li}e^{-ilk\cdot Q(x)}, \tag{2.10a}$$

$$\alpha^C_{n+} = \oint\frac{dx}{2\pi ix}x^n k\cdot P(x)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha^L_{l+}e^{-ilk\cdot Q(x)}, \tag{2.10b}$$

光锥规范下基态 $|0, p\rangle^L$ 定义为，

$$a_n^{Li}|0, p\rangle^L = 0,\quad a_n^{Li+}|0, p\rangle^L \neq 0$$

由 (2.3a) 式，注意到 $\alpha_n = \sqrt{n}\,a_n$, $\alpha_{-n} = \sqrt{n}\,a_n^+ (n > 0)$ 且 $a_n^{C\mu}|0, p\rangle^C = 0$, $a_n^{C\mu+}|0, p\rangle^C \neq 0$, $U|0, p\rangle^C = U^{-1}|0, p\rangle^C = |0, p\rangle$ 有

$$a_n^{Li}|0, p\rangle^C = Ue^{inq_+^C}a_n^{Ci}U^{-1}|0, p\rangle^C = 0,$$

$$a_n^{Li+}|0, p\rangle^C = Ue^{-inq_+^C}a_n^{Ci+}U^{-1}|0, p\rangle^C \neq 0$$

因此可将 $|0, p\rangle^L$ 与 $|0, p\rangle^C$ 取为同一态矢，即

$$|0, p\rangle^L \equiv |0, p\rangle^C = |0, p\rangle \tag{2.11}$$

由此构造光锥规范下的态矢:

$$|\mathrm{phys}\rangle^L = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{D-2}(a_n^{Li+})^{\lambda_{n,i}}|0, p\rangle$$

利用 (2.3a) 有

$$|\mathrm{phys}\rangle^L = U'|\phi\rangle^C \tag{2.12}$$

其中

$$|\phi\rangle^C = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{D-2}(a_n^{Ci+})^{\lambda_{n,i}}|0, p\rangle,$$

$U' = e^{iq_+^C \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{D-2} n\lambda_{n,j}} U, U = e^S$. 由此我们得到了两种规范下态矢之间的联系 (2.12). 利用

$$[L_n^C, a_m^{Li+}] = 0, \ [\alpha_{n+}^C, a_m^{Li+}] = 0$$

$$L_k^C|0, p\rangle = \alpha_{k+}^C|0, p\rangle = 0 \quad (k > 0)$$

有:

$$L_n^C|\mathrm{phys}\rangle^L = \alpha_{n+}^C|\mathrm{phys}\rangle^L = 0 \quad (n > 0).$$

虽然 $\left\{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{\mu_n=0}^{D-1}(a_{n\mu_n}^{C+})^{\lambda_{\mu_n}}|0, p\rangle\right\}$ 构成协变规范下的一套正交完备集，但缺点是没有明显给出物理态. 对上述完备集乘上算子

$$U' = e^{iq_+^C \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{\mu_n=0}^{D-1} n\lambda_{\mu_n}} U \tag{2.13}$$

可得

$$|r\rangle^C = U' \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\mu_n=0}^{D-1}(a_{n\mu_n}^{C+})^{\lambda_{\mu_n}}|0, p\rangle \tag{2.14}$$

则 $\{|r\rangle^C\}$ 构成了协变规范下的一套正交完备集. 其中对应 $\lambda_0 = \lambda_{D-1} = 0$ 的基矢集合构成光锥规范下的态空间 $\{|\mathrm{phys}\rangle^L\}$. 显然正交完备集 $\{|r\rangle^C\}$ 比 Goddard-Thorn 态完备集[5] $\{L_{-1}^{C\lambda_1}\cdots L_{-n}^{C\lambda_n}K_{-1}^{C\mu_1}\cdots K_{-m}^{C\mu_m}|\mathrm{phys}\rangle^L\}$ 优越表现在它是一正交集,而后者不是.

三、$\mathscr{K}=R^L-R^C$ 的本征态、物理投影算子

利用变换 (2.3a)、(2.3b) 或文献 [1] 有,

$$\begin{aligned}\mathscr{K} &\equiv R^L - R^C \\ &= E + \frac{26-D}{24} I_0 + \frac{26-D}{24}(D_0^C - 1)\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 R^L, R^C 分别为光锥规范,协变规范下的粒子数算子

$$E^{[4]} = (D_0^C - 1)(L_0^C - 1) + \sum_{n=1}^{\infty}(L_{-n}^C D_n^C + D_{-n}^C L_n^C),$$

$$I_0 = \oint \frac{dx}{2\pi i x}\frac{1}{K\cdot p^C(x)}\left[x\frac{d}{dx}\ln K\cdot P^C(x)\right]^2,$$

$$D_n^{C[4]} \equiv \oint \frac{dx}{2\pi i x} x^n \frac{1}{K \cdot P^C(x)}$$

由附录 A 有

$$[L_n^C, \mathscr{K}] = -nL_n^C, \tag{3.2a}$$

$$[K_n^C, \mathscr{K}] = -nK_n^C, \tag{3.2b}$$

$$[D_n^C, \mathscr{K}] = -nD_n^C, \tag{3.2c}$$

$$(D_K^C - \delta_{K,0})|\mathrm{phys}\rangle^L = 0 \qquad (K \geqslant 0), \tag{3.3a}$$

$$(L_K^C - \delta_{K,0}\alpha(0))|\mathrm{phys}\rangle^L = 0, \tag{3.3b}$$

$$[L_n^C, D_m^C] = -(2n+m)D_{n+m}^C \tag{3.3c}$$

于是由 (3.3a)—(3.3c) 三式可得

$$\mathscr{K}|\mathrm{phys}\rangle^L = 0 \tag{3.4}$$

其次由 (3.2a) 式，(3.2b) 式和 (3.4) 式可得

$$\mathscr{K} L_{-1}^{C\lambda_1}\cdots L_{-n}^{C\lambda_n} K_{-1}^{C\mu_1}\cdots K_{-m}^{C\mu_m}|\mathrm{phys}\rangle^L$$

$$= -\left(\sum_S S\lambda_S + \sum_r r\mu_r\right) L_{-1}^{C\lambda_1}\cdots L_{-n}^{C\lambda_n} K_{-1}^{C\mu_1}\cdots K_{-m}^{C\mu_m}|\mathrm{phys}\rangle^L \tag{3.5}$$

由本征方程 (3.5) 知协变规范下 Goddard-Thorn 态完备集是差算子 $\mathscr{K}$ 的本征态集且有如下结论：$\mathscr{K}$ 的本征值为$\leqslant 0$ 的整数，其中 $\mathscr{K}$ 的零本征值对应，且仅对应态矢 $|\mathrm{phys}\rangle^L$. 上述结论与时空维数 D 及 Regge 轨迹截距 $\alpha(0)$ 无关. 由 $\mathscr{K}$ 的本征值特点，可得任意 D 和 $\alpha(0)$ 下的物理投影算子的二种表述形式：

$$\mathscr{P}_1 = \oint \frac{dx}{2\pi i x} x^{\mathscr{K}}, \tag{3.6}$$

$$\mathscr{P}_2 = 2\theta(\mathscr{K}) \tag{3.7}$$

其中利用了公式：

$$\oint \frac{dx}{2\pi i x} x^n = \delta_{n,0}, \quad \theta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

由参考文献 [4] 采用的方法，利用 (3.2a)—(3.2c) 三式可得：

$$\mathscr{P}_i^2 = \mathscr{P}_i, \quad \mathscr{P}_i|\phi\rangle^C = |\mathrm{phys}\rangle^L$$

其中 $i = 1$ 或 2. $D = 26$, $\alpha(0) = 1$ 时，(3.6) 式退化为 L. Brink 和 D. OLive 的结果[1].

四、$\hat{M}^{C^2}$ 的半正定性

$$\hat{M}^{C^2} \equiv 2(R^C - \alpha(0)), \quad R^C = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{C+} \cdot a_n^C,$$

$$\hat{M}^{L^2} \equiv 2(R^L - \alpha(0)), \quad R^L = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{D-2} n a_n^{Li+} a_n^{Li},$$

$$\hat{M}^{C^2} - \hat{M}^{L^2} = 2(R^C - R^L) = -2\mathscr{K}$$

或

$$\hat{M}^{C^2} = \hat{M}^{L^2} - 2\mathscr{K}$$

因除基态 Tachyon 外，$\hat{M}^{L^2} \geqslant 0$，而 $\mathscr{K} \leqslant 0$，可见

$$\hat{M}^{C^2} \geqslant 0 \quad (\text{除基态 Tachyon 外})$$

而在 $\{|\text{phys}\rangle^L\}$ 上，$\mathscr{K} = 0$，所以有

$$\hat{M}^{C^2} = \hat{M}^{L^2}$$

五、讨 论

本文的一切结论都基于所给的变换 (2.3a)、(2.3b) 式．而此变换的给出主要取决于定义 $\alpha_{n+} = k\cdot\alpha_n$ 中的 k 矢量为光锥矢量 $k^2 = 0$，(a) 它定义了光锥规范 $k\cdot\alpha = 0$ (加上 $L_n^L = 0$，$n > 0$)，(b) 保证了 $[k\cdot\alpha_n,\ k\cdot\alpha_m] \sim k^2 = 0$．正是条件 (b) 使得我们能够给出 (2.3a)，(2.3b) 式．另外，我们企图获得由协变规范到其它规范(如时间规范)间类似于 (2.3a)，(2.3b) 的变换的尝试是不成功的，其根本原因在于这时 $k^2 \neq 0$，从而 $[k\cdot\alpha_n,\ k\cdot\alpha_m] \sim k^2 \neq 0$．目前较肯定的是 $D = 26$，$\alpha(0) = 1$ 的 Bose 弦理论[6,7]，而 $D < 26$，$\alpha(0) = 1$ 或 $D \leqslant 25$，$\alpha(0) = 1$ 时的 Bose 弦理论也是可以接受的，因此我们给出的任意 D，$\alpha(0)$ 下的投影算子具有一定的可适用性，但我们必须指出的是此时我们不能肯定相应的光锥规范一定可取(洛仑兹协变性不一定能得到满足)．如果相应的光锥规范可取，则由 $\mathscr{P}_i$ 得到的空间就是光锥规范下的态空间(即物理空间)，若不能取，我们至少可得到协变规范下物理空间的一个主要子空间（其余留下的物理空间可能对计算某些物理量是不重要的，且当 $D = 26$，$\alpha(0) = 1$ 时，它变为零模子空间)．

在准备本文中，笔者之一与高怡弘同学进行过有益的讨论，在此表示感谢．

附 录 A

利用如下对易子[4]

$$[L_n^C,\ K_m^C] = -nK_{n+m}^C,\quad [K_n^C,\ K_m^C] = 0,$$
$$[L_n^C,\ D_m^C] = -(2n+m)D_{n+m}^C,\quad [D_n^C,\ D_m^C] = 0$$

可算得，

$$[L_n^C,\ I_0] = 2n^3 D_n^C, \tag{A.1a}$$
$$[K_n^C,\ I_0] = 0, \tag{A.1b}$$
$$[D_n^C,\ I_0] = 0 \tag{A.1c}$$

利用上面文献[4]给出的对易子和 (A.1a)—(A.1c) 三式加上如下对易子[4]

$$[L_n^C,\ E] = -nL_n^C + \frac{D-26}{24}n(n^2-1)D_n^C,$$
$$[K_n^C,\ E] = -nK_n^C,$$
$$[D_n^C,\ E] = -nD_n^C$$

可得 (3.2a)—(3.2c) 三式．(3.3a) 式由文献 [4] 给出．

参　考　文　献

[1] L. Brink and D. Olive, *Nucl. Phys.*, **B56**(1973), 253.
[2] E. Del Giudice, P. Di Vecchia and S. Fubini, *Annals of Phys.*, **70**(1972), 378.
[3] R. C. Brower, *Physical Rev. D*, Vol. **6**, No. **6**(1972), 1655.
[4] J. Scherk, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. **47**, No. **1** (1975), 123.
[5] P. Goddard and C. B. Thorn, *Phys. Lett.*, **40B** (1972), 235.
[6] P. Goddard, C. B. Thorn, J. Godstone and C. Rebbi, *Nucl. Phys.*, **B56**(1973), 109.
[7] M. A. Virasoro, *Phys. Rev.* **D1**(1970), 2933.

GAUGE TRANSFORMATION IN STRING THEORY

LU JIANXIN　RUAN TUNAN

(University of Science and Technology of China, Hefei)

ABSTRACT

In this paper, the authors find a transformation which connects the covariant formalism with the light-cone formalism in bosonic open string theory, which leads to the connection between covariant statevectors and light-cone statevectors, and yields an orthogonal complete set of states in covariant formalism and a physical projective operator for arbitrary space-time dimension D and intercept of Regge trajectory $\alpha(0)$. The later reduces to the result given by L. Brink and D. Olive in the case of $D=26$, $a(0)=1$. Finally, we explicitly show that in covariant formalism, the mass square operator $\hat{M}^2\geqslant 0$ except for the tachyon of ground state.