

快报

二维随机三角点阵上 $SU(2) \times SU(2)$ 手征模型 β 函数的研究

陈天崧 黄五群 金柯 索存川
(南开大学, 天津)

摘要

用蒙特卡罗重正化群方法讨论了二维随机三角点阵上 $SU(2) \times SU(2)$ 手征模型的 β 函数行为, 得出它的行为与四维 $SU(2)$ 规范理论的 β 函数相似, 但强、弱耦合区的过渡更为平滑, 不存在尖锐的小峰, 标度区从 $\beta = 1.6$ 开始。

一、引言

d 维自旋体系与 $2d$ 维的规范场论体系之间存在很多类似与对应^[1], 因而对较为简单的二维 $SU(N) \times SU(N)$ 手征自旋模型的研究成为人们探求更为复杂的四维 $SU(N)$ 规范模型的性质的重要手段。Migdal 等人指出^[2] 这两者的格点的 Schwinger-Dyson 方程是类似的, 都有渐近自由, 它们的实空间重正化递推关系都是相同的, 因而它们具有相似的 β 函数行为, 但非阿贝尔规范理论四维时出现的瞬子 (instanton) 效应在二维的手征模型中不存在, 所以预计二维手征模型的强、弱耦合区的联结会比四维规范模型更为平滑。

蒙特卡罗重正化群(简称 MCRG) 方法是研究统计模型的临界行为及格点规范理论连续极限的十分有效的方法, 从对 Ising 模型, Potts 模型的研究中^[3], 我们又看到随机点阵由于保持平移及洛仑兹不变性, 在研究这些临界行为及过渡性行为时比规则点阵更为优越, 因而在本文中我们在二维随机三角点阵上^[4], 用 MCRG 方法对 $SU(2) \times SU(2)$ 手征模型进行研究, 讨论此模型是否存在相变及 β 函数的行为, 并与四维 $SU(2)$ 规范模型的结果进行比较。

二、模型及方法

$SU(2) \times SU(2)$ 手征模型是在点阵的第 i 个格点上放置一个相应的 $SU(2)$ 群元 U_i , 且仅考虑最近邻相互作用, 其作用量为

此工作受到国家自然科学基金的支持, 本文 1988 年 7 月 1 日收到。

其
其
其
其
在
其
此
写
其
产
个
 $e^{\beta R_c}$
数。
为
 \int_{-1}^0
表,

$$S = \sum_{\langle ij \rangle} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ReTr} \lambda_{ij} U_i^\dagger U_j \right) \\ = \sum_i \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{ReTr} \left(U_i^\dagger \sum_{l_i} \lambda_{i,l_i} U_{l_i} \right) \right]. \quad (1)$$

其中 l_i 为格点 i 之最近邻点标号, λ_{i,l_i} 为权因子, 本文中取等权的情况, 即取 $\lambda_{i,l_i} = 1$.
配分函数

$$z = \int e^{-\beta S} dU. \quad (2)$$

其中 $\beta = 2N/g^2 = 4/g^2$. 在蒙特卡洛模拟中, 首先将 $SU(2)$ 群元参数化.

$$a = a_0 \mathbf{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}, \quad \text{及} \quad a_0^2 + |\mathbf{a}|^2 = 1. \quad (3)$$

其中 $\sigma^j (j = 1, 2, 3)$ 为三个泡利矩阵.

作用量可改写为

$$S = \sum_i \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{ReTr} (U_i^\dagger \boldsymbol{\gamma}_i) \right]. \quad (4)$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \sum_{l_i} U_{l_i}. \quad (5)$$

在随机三角点阵中, 对不同的 i 点 l_i 的个数是不同的, 但平均数为 6. 显然,

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{\gamma}_{i_0} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}_i = K_i R_i, \quad R_i \in SU(2) \quad (6)$$

其中

$$K_i = (\det(\boldsymbol{\gamma}_i))^{1/2}. \quad (7)$$

作用量进而可写为

$$S = \sum_i \left(1 - \frac{1}{2} K_i \operatorname{ReTr} U_i' \right). \quad (8)$$

此处

$$U_i' = U_i^\dagger R_i, \quad \text{及} \quad U_i' \in SU(2). \quad (9)$$

为了提高程序进行的速度, 我们采用混合的 heat-bath-metropolis 方法^[3], 将作用量写成两个部分, 即

$$S(\{U\}) = S_0(\{U\}) + S_1(\{U\}). \quad (10)$$

其中 $\{U\}$ 为一个组态. 令原来的组态为 $\{U_0\}$, 为了按玻尔兹曼分布 $\exp(-S(\{U\}))$ 产生一个新的组态 $\{U'\}$, 首先用 heat bath (热浴) 法按分布 $\exp(-S_0(\{U'\}))$ 产生一个 $\{U'\}$, 然后用 metropolis 方法按 $\exp(-S_1(\{U\}))$ 接收或否定这个 $\{U'\}$.

每一个格点上, 一个新的 $SU(2)$ 矩阵生成时, 先按几率 $P(a_0) da_0 = Z^{-1} \sqrt{1 - a_0^2} \times e^{\beta \bar{K} a_0} e^{\beta(K - \bar{K}) a_0} da_0$ 生成 a_0 , 注意 $a = U'R$, 所以 $a_0 = (U'R)_0$, 上式中 \bar{K} 是一个自由参数. 我们将 $\sqrt{1 - a_0^2} \exp(\beta \bar{K} a_0)$ 处理为 $\exp(-S_0(U'))$, 并将 $\exp(\beta(K - \bar{K}) a_0)$ 处理为 $\exp(-S_1(U'))$. 为此, 生成一个在区间 $[0, 1)$ 上均匀分布的随机数 x , 由 $x = z^{-1} \times \int_{-1}^x \sqrt{1 - l^2} e^{\beta \bar{K} l} dl$ 反求 a_0 . 由于 \bar{K} 是自由参数, 选定某一值后, 可造出 x 及相应的 a_0 的表, 在蒙特卡洛迭代中可通过查表非常迅速地得到 a_0 及 $\sqrt{1 - a_0^2} \exp(\beta \bar{K} a_0)$. 自由参数

简单
) 规
方程
相似
手征
为平

理论
随机
阵更
 $U(2)$
范模

群元

\bar{K} 的选择是使 $\exp(\beta(K - \bar{K})a_0)$ 尽量接近于 1, 以得到最大的接收率。

在蒙特卡洛重正化群的研究中, 为求得模型的 $\Delta\beta(\beta)$ 函数及 β 函数, 我们采用描述于文 [6] 中的标准方法, 计及的关联函数有:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i,j) \\ \text{最近邻对}}} \text{Tr} U_i^\dagger U_j. \quad (11)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i,j) \\ \text{次近邻对}}} \text{Tr} U_i^\dagger U_j.$$

做出 k 次块化的大点阵及 $k-1$ 次块化的小点阵上关联函数随 β 变化的曲线, 由匹配条件

$$\Gamma(\beta, L)_{(k)} = \Gamma(\beta - \Delta\beta(\beta), L/b)_{(k-1)}. \quad (12)$$

及内插法可得 $\Delta\beta - \beta$ 曲线。式中 L 为大点阵的尺度大小, b 为块化的标度因子。由文 [7] 中的方法可从 $\Delta\beta(\beta)$ 函数推得 β 函数。

为了减少计算量, 希望只经过少数几次块化能尽快达到固定点。为此, 有人采用改进的作用量^[8] 以使它更接近于一给定的重正化轨迹。另一方法是仍采用标准的作用量, 但改进块化方法, 使它的重正化轨迹及固定点与此标准作用量接近^[9]。本文用后一种方法, 在一个渐近自由的理论中采用微扰论的结果来找到一个改进的块化方法。

在大 β 时, 这些块化后的关联函数, 可用微扰论来估算, 在树图水平上得匹配方程为

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) = 1 - \frac{\alpha'}{\beta'} + O\left(\frac{1}{\beta'^2}\right). \quad (13)$$

因此,

$$\Delta\beta \equiv \beta' - \beta = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha} \beta + O(1). \quad (14)$$

极小化 $\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha}$, 使 $\Delta\beta = 0$, 这就是树图改进下的匹配条件。为达到此, 采用的块化方法是: 第 l 个块的自旋取值为 μ_l 的几率为

$$\exp(p \text{Tr} \mu_l^\dagger U_{l\text{块}}), \quad U_{l\text{块}} = \sum_{i \in \text{块} l} U_i / \left| \sum_{i \in \text{块} l} U_i \right|. \quad (15)$$

其中矩阵 $\mu_l \in SU(2)$, p 是一个自由参数, 显然 $p \rightarrow \infty$ 即通常的为主原则。通过微扰论的结果我们可以找到最优化的 p 值, 一般取 $p = c\beta$ 。由关联函数的匹配条件

$$\Gamma(\beta, p, L)_{(k)} = \Gamma(\beta', p, L/b)_{(k-1)}. \quad (16)$$

及大 β 时微扰论的结果^[1] 共同来决定, 我们调试的结果取 $c = 4$ 。

三、结果分析

在做 MCRG 研究时, 为了减小有限大小点阵的影响, 我们在二维平面上构造大, 小两个随机三角点阵。先在二维平面上随机地置 320 个格点, 然后按文 [4] 中的方法构成随机三角点阵, 确定格点之间的近邻, 次近邻关系。将两个近邻的格点对块化成一个

block 格点, 并用上节所述的改进的块化方法可构成经过一次块化的 160 个格点的随机三角点阵及相应的自旋体系, 这个点阵就作为一次块化的大点阵, 同时也作为未块化的小点阵。重复以上过程又可依次得 80 个格点的二次块化大点阵及一次块化小点阵……。这样, 我们也就保证了 k 次块化的大点阵与 $k-1$ 次块化的小点阵有完全相同的几何结构。由于经每次块化, block 格点数减少一半, 因而块化后点阵的单形——三角形的面积增加一倍, 所以标度因子 $b = \sqrt{2}$ 。

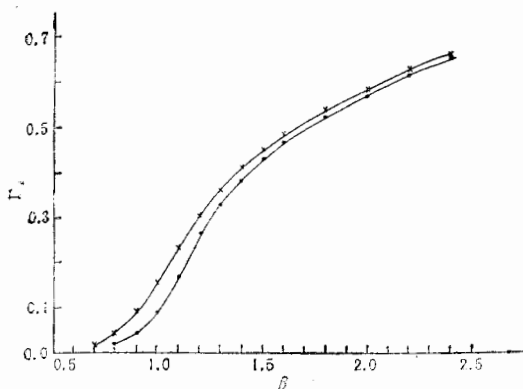


图 1

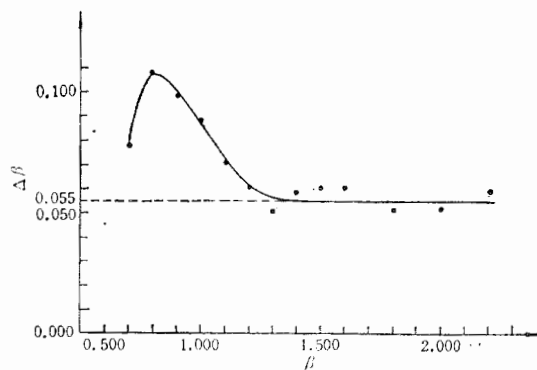


图 2

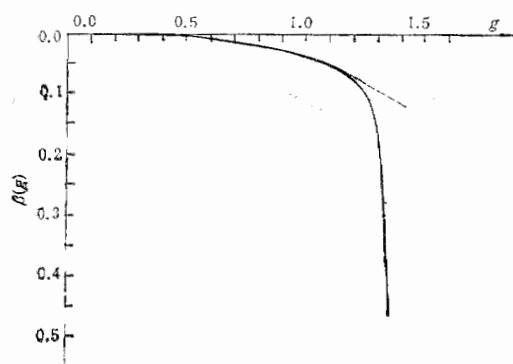


图 3

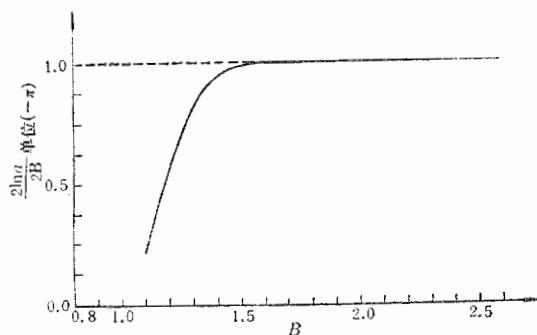


图 4

对大、小点阵, 我们分别都做 1800 次蒙特卡洛迭代, 由于采用文 [5] 中的技巧, 可接收率接近 90%。去掉前面 200 次达到热平衡的迭代, 测关联函数的平均值。近邻关联 Γ_1 随 β 之变化曲线示于图 1。由图看到, 两条曲线不相交, 不会出现 $\Delta\beta = 0$ 的情况, 所以二维 $SU(2) \times SU(2)$ 手征模型不出现相变点, 这是与四维 $SU(2)$ 规范模型的性质一致的。由这两条曲线并借助线性内插法可得 $\Delta\beta(\beta) - \beta$ 曲线, 示于图 2。由图可见, 当 $\beta > 1.3$ 后 $\Delta\beta \approx 0.055$, 这与微扰论略去高阶项的结果^[9] $\Delta\beta = \ln b/2\pi = \ln \sqrt{2}/2\pi = 0.055$ 一致。为求出该模型的 β 函数曲线, 用文 [7] 中的方法, 通过拟合 $\Delta\beta - \beta$ 曲线得出, 当 $\beta > 1.0$ 后

$$\Delta\beta(\beta) = 1.28(\beta - 0.90)e^{-13.75(\beta - 0.90)} + 0.055. \quad (17)$$

描述

11)

匹配

(12)

由文

改进, 但
方法,

方程

(13)

(14)

化方

(15)

: 扰论

(16)

, 小
三构成
一个

由

$$\beta(g) = -b_0 g^3 \prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{d\Delta\beta(\beta)}{d\beta} \Big|_{g_i} \right), \quad b_0 = \frac{1}{8\pi}. \quad (18)$$

得 β 函数的行为, $\beta(g) \sim g$ 曲线示于图 3. 由图可以看到其行为与四维 $SU(2)$ 规范模型的 β 函数^[7]相似, 但从强耦合区至弱耦合区的过渡更为平滑, 不存在 $SU(2)$ 规范模型 β 函数中的尖锐小峰, 这正与理论的预期是一致的. 由

$$\frac{\partial \ln a}{\partial \beta} = \frac{g^3}{8\beta(g)} = -\frac{1}{8b_0} \left(\prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{d\Delta\beta(\beta)}{d\beta} \Big|_{g_i} \right) \right)^{-1}. \quad (19)$$

可得弦张力的斜率, 示于图 4. 由图当 $\beta = 1.6$ 时开始进入渐近标度区.

本文是在 M-340 机上完成的.

参 考 文 献

- [1] F. Green and S. Samuel, *Nucl. Phys.*, **B190**(F53) (1981), 113.
- [2] A. A. Migdal, *JETP (Sov. Phys.)*, **42**(1976), 413; 743.
- [3] 黄五群、陈天谿、沈琴婉、钟朝武, 高能物理与核物理, **V11**(1987), 563.
陈天谿、黄五群、沈琴婉 高能物理与核物理, **V12**(1988), 573
- [4] N. H. Christ, R. Friedberg and T. D. Lee, *Nucl. Phys.*, **B202**(1982), 89; **B210**(1982), 310; **B210**(1982), 337.
R. Friedberg and H. C. Ren, *Nucl. Phys.* **B235**(FS11) (1984), 310.
- [5] H. Q. Ding, *J. Comp., Phys.*, **67**(1986), **28**; Y. F. Deng, CCAST SYMPOSIUM/WORKSHOP PROCEEDINGS 1(1987), 419.
- [6] R. H. Swendsen, *Phys. Rev.*, **B20**(1979), 2080.
- [7] C. M. Wu and P. Y. Zhao, *Phys. Lett.*, **B178**(1986), 89.
- [8] S. Shenker and J. Tobochnik, *Phys. Rev.*, **B22**(1980), 4462.
- [9] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, U. Heller and F. Karsch, *Phys. Lett.*, **140B**(1984), 76.

β FUNCTION FOR $SU(2) \times SU(2)$ CHIRAL MODEL ON 2-DIMENSIONAL RANDOM TRIANGLE LATTICE

CHEN TIANLUN HUANG WUQUN JIN KE SUO CUNCHUAN
(Nankai University, Tianjin)

ABSTRACT

The β function behavior for $SU(2) \times SU(2)$ chiral model on 2-dimensional random triangle lattice has been studied with Monte Carlo renormalization group method. Its behavior is similar to that of the 4-dimensional $SU(2)$ gauge theory. However, it is smoother from weak to strong coupling regions. There is no nonperturbative peak structure. The asymptotic scaling starts beyond $\beta=1.6$.