

从四维 Langevin 方程的 Monte Carlo 模拟计算裂变碎片动能分布*

包景东 卓益忠

(中国原子能科学研究院, 北京)

摘 要

本文将一个关于对称裂变的两个集体坐标(碎片质心距和颈部参数)及其共轭动量的四维 Langevin 方程作为描述布朗粒子从鞍点下降到断点这一扩散过程的动力学方程。通过计算机模拟随机力冲量,用 Monte Carlo 方法求解了 Langevin 方程组。计算了 $32 < Z^2/A < 40$ 区间的八个核裂变碎片的平均动能、动能涨落宽度,结果与实验值相符。

一、引 言

目前,用一维扩散模型计算的裂变碎片平均动能分布宽度比实验值小3—4倍,而用统计平衡态理论和纯动力学模型又不能解释 $\sigma_{E_k}^2$ 随 Z^2/A 的变化关系且也太小。事实上,基于 Kramers 提出的可将裂变核的变形运动视为布朗粒子的扩散过程的一维对称裂变模型,其所计算的平均动能涨落宽度只是由于沿伸长方向的动量涨落而产生的,它无法涉及由于坐标的涨落所引起的库仑能涨落。因此对于研究裂变机制来说,不仅沿拉长方向的变形是重要的,而且垂直于断点颈部的组态更为重要。最近, F. Scheuter 等人^[1]考虑了一个二维 Fokker-Planck 方程,他们选的两个集体形变坐标分别是碎片质心距和一个碎片的四极矩,所得平均动能涨落宽度比实验值还偏小。G. D. Adeev 等人^[2,3]也以 Fokker-Planck 方程为基础,对二维扩散模型进行了较系统的研究。但是,求解多维 F-P 方程不便于将惯性与粘滞张量、形变势能及其它参量对坐标的依赖性考虑进去,也不利于做更真实的裂变机制的研究。在本文中,我们从与 F-P 方程等价的 Langevin 方程组出发,用 Monte-Carlo 方法直接模拟布朗粒子的运动轨道,使得核表面的变形运动和布朗粒子的输运过程统一在 Langevin 方程组的框架之中。

二、模 型

集体变量的分布函数 $W(x, h, p_x, p_h)$ 遵守以下 F-P 方程^[2]:

* 国家自然科学基金资助项目
本文 1988 年 5 月 27 日收到。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & -\frac{p_x}{m_x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p_x} [(v_x p_x - m_x \omega_x^2 x) W] + D_x \frac{\partial^2 W}{\partial p_x^2}, \\ & -\frac{p_h}{m_h} \frac{\partial W}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial p_h} [(v_h p_h + m_h \omega_h^2 h) W] + D_h \frac{\partial^2 W}{\partial p_h^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

与上述 F-P 方程等价的四维 Langevin 方程为:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= K(p_x, x) + g_x \Gamma_1(t), \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p_x}{m_x}, \\ \frac{dp_h}{dt} &= K(p_h, h) + g_h \Gamma_2(t), \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{p_h}{m_h}. \end{aligned} \quad (2)$$

方程(1)和(2)之间存在着如下对应关系:

$$\begin{aligned} K(p_x, x) &= -(v_x p_x - m_x \omega_x^2 x), \\ g_x &= \sqrt{D_x}, \\ K(p_h, h) &= -(v_h p_h + m_h \omega_h^2 h), \\ g_h &= \sqrt{D_h}, \end{aligned}$$

这里 $x = 2(\rho - \rho_d)$, ρ 是以球形核半径为单位的两碎片质心距之半, 脚标“sd”表示鞍点处的值, h 是颈部参数. 显而易见, 惯性和粘滞张量已被假设成对角化, 势能被选作是关于拉长方向倒置和关于颈部方向正放的两个谐振子组成的马鞍面, 表达式是:

$$U(x, h) = B_f - \frac{1}{2} m_x \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m_h \omega_h^2 h^2$$

方程(2)中的 K 称为决定性力, $g\Gamma(t)$ 称为随机力, g 是噪声强度, 常取作定值. x, h 方向上的随机力因子 $\Gamma_1(t)$ 和 $\Gamma_2(t)$ 满足下面的统计规律.

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_i(t) \rangle &= 0, \\ \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle &= 2\delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned}$$

对于随机力满足以上性质的过程, 我们称之为 Gauss-Markov 白噪声过程.

根据 Einstein 涨落耗散定理有: $D_x = \eta_x T$, $D_h = \eta_h T_h^*$. 同时,

$$v_x = \frac{\eta_x}{m_x}, \quad v_h = \frac{\eta_h}{m_h}; \quad m_x \omega_x^2 = C_x, \quad m_h \omega_h^2 = C_h.$$

所有值暂取与文[2]相同的常数. 有效温度 T_h^* 定义为^[4]:

$$\left. \begin{aligned} T &= [10(E^* - B_f + E_d)/A]^{1/2} \\ T_h^* &= \frac{\hbar\omega_h}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_h}{2T} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 E^* 是初始激发能, B_f 是裂变位垒高度, E_d 是耗散能量, 这是由于核的内部运动与集体运动的耦合而提供给热浴的能量, 核在变形过程中都达到局部平衡, 因此这部分能量也使核温度升高, E_d 定义成^[5]:

$$E_d = \Delta E \cdot \exp(-\eta_{xd}/\eta_x) \quad (4)$$

其中, $\eta_{xd} = 0.5(2\pi\eta_0 R_0^3)$, 粘滞常数 $\eta_0 = 10^{-23} \text{ MeV} \cdot \text{sec} \cdot \text{fm}^{-3}$, 鞍点处 $E_d = 0$, 就此给出鞍点温度 $T_{i,d}$ 和 $T_{h,d}^*$. 裂变位能曲面中的 C_x 是这样确定的:

$$C_x = 2\Delta E' / (x_{ic}')^2 \quad (5)$$

这里 $\Delta E'$ 是鞍点与静止断点间形变能之差, 静止断点被假设是 $\rho_{ic}' = 1.22$, $h_{ic}' = 0$.

我们取颈部刚度系数 C_h 为鞍点到断点之间的平均值, $\langle C_h \rangle = 300 \text{ MeV}$. 惯性和粘滞张量的对角项取作^[2]: $m_x = \frac{1}{4} M_0 R_0^2$, $\eta_x = 2\pi\eta_0 R_0^3$; $m_h = 0.2 \frac{1}{4} M_0 R_0^2$, $\eta_h = 2\pi\eta_0 R_0^3$.

四维相空间中的布朗粒子在鞍点线上的分布将作为 Langevin 方程组 (2) 的初始条件, 选作如下具有超前峰的 Gauss 分布:

$$W_0(x_0, p_{x_0}, h_0, p_{h_0}) = (2\pi\sigma_{p_{x_0}}^2)^{-\frac{1}{2}} (2\pi\sigma_{h_0}^2)^{-\frac{1}{2}} \delta(x_0 - x_{i,d}) \cdot \exp\left[-\frac{(p_{x_0} - \langle p_{x_0} \rangle)^2}{2\sigma_{p_{x_0}}^2} - \frac{(h_0 - \langle h_0 \rangle)^2}{2\sigma_{h_0}^2} - \frac{(p_{h_0} - \langle p_{h_0} \rangle)^2}{2\sigma_{p_{h_0}}^2}\right] \quad (6)$$

式中, $\langle p_{x_0} \rangle = \sqrt{2m_x T_{i,d}/\pi}$, $\sigma_{p_{x_0}}^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) m_x T_{i,d}$;

$$\langle h_0 \rangle = 0, \quad \sigma_{h_0}^2 = T_{h,d}^* / C_{h,d};$$

$$\langle p_{h_0} \rangle = 0, \quad \sigma_{p_{h_0}}^2 = m_h T_{h,d}^*.$$

我们采用双参数 $\{c, h\}$ 四次多项式回转体^[7]来描写对称裂变时核表面形状, 方程在柱坐标系中形如:

$$P_z^2(z) = C^{-2}(C^2 - Z^2)(A_z C^2 + B Z^2) \quad (7)$$

其中, $B = 2h + \frac{c-1}{2}$, $A_z = C^{-3} - B/5$. 这里 C 是核长度之半, 通常以 ρ 代替 C , 而

$$\rho = \frac{3C}{8} + C^4 h / 10 + (C^5 - C^4) / 40.$$

确定裂变断点位形是一个比较困难和值得研究的问题. 为方便起见, 我们直接采用文献[2]中的断点线方程以及所给的对不同核的 b_0 值. 断点线方程形如:

$$h - h_{ic}^0 = b_0(x - x_{ic}^0), \quad (8)$$

$b_0 < 0$, 我们的计算是建立在断点线意义上的, 并且认为核断裂以后的碎片运动形式不影响断点处的动能分布.

在二维裂变模型中, 裂变碎片的总动能是布朗粒子在断点线上的运动动能与断裂时两碎片间的相对库仑能之和, 即有:

$$\langle E_K \rangle = \langle V_c + E_{ps} \rangle_{ic}, \quad (9a)$$

$$E_{ps} = p_x^2 / 2m_x \quad (9b)$$

$$\sigma_{E_K}^2 = \sigma_{V_c}^2 + \sigma_{E_{ps}}^2 + 2\sigma_{V_c E_{ps}}. \quad (9c)$$

(9b) 式中不含 h 自由度上的运动动能 $\frac{p_h^2}{2m_h}$ 这一项, 是因为它不会转变为碎片动能.

为了节省计算时间, 我们基于物理上的考虑对库仑能公式做一简化. 断点处的 V_c 并不能全部转化为碎片质心动能, 而 $\left(\frac{Z_c}{2}\right)^2 / 2\rho_{ic}$ 是碎片质心间的相互作用只能转化为碎片

质心动能, 不会有其它的作用, 考虑到两碎片缩成球形时, 两球间距离略大于 $2\rho_{sc}$, 可写成 $2a\rho_{sc}$, a 是略大于 1 的参量. 故两碎片间相对库仑能可近似写作:

$$V_c(x_{sc}, h_{sc}) = \left(\frac{Ze}{2}\right)^2 / 2a\rho_{sc}, \quad (10)$$

调节 a 的值以符合实验结果, 发现其为 1.03 左右.

三、四维 Langevin 方程的 Monte-Carlo 模拟

现在考虑对一维情形下的 Langevin 方程直接进行数值积分.

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = K(p, q) + g\Gamma(t), \\ \frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} \end{cases} \quad (11)$$

这里 $K(p, q) = -\frac{\partial U}{\partial q} - \nu p$.

在 $t \sim t + \tau$ 区间内积分(11)式, 有

$$\begin{aligned} p(t + \tau) - p(t) &= \int_t^{t+\tau} K(p(t'), q(t')) dt' + g \int_t^{t+\tau} \Gamma(t') dt' \\ &\simeq \tau \cdot K(p, q) + g\tilde{F}_1(t), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$q(t + \tau) - q(t) \simeq \tau \cdot \frac{p(t)}{m}, \quad (12b)$$

由 $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$ 和 $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t')$ 知

$$\langle \tilde{F}_1(t) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{F}_1^2(t) \rangle = 2\tau$$

令 $\tilde{F}_1(t) = \sqrt{2\tau}\omega_1(t)$, 则 $\langle \omega_1(t) \rangle = 0$, $\langle \omega_1^2(t) \rangle = 1$.

以上的 $\tilde{F}_1(t)$ 相当于随机力 $\Gamma(t)$ 的“冲量”, 与 τ 有关. ω_1 是 $N(0, 1)$ 正态分布随机数.

(12)式是方程(11)的第一级近似, 为改善精度或者想用大步长 τ 而获得好的精确性, 我们将关于 p', q' 的一次函数 $K(p', q')$ 在 $K(p, q)$ 处精确地线性展开.

$$K(p', q') = K(p, q) + \frac{\partial K}{\partial p}(p' - p) + \frac{\partial K}{\partial q}(q' - q),$$

同时 $p' = p + (p' - p)$,

$$\begin{aligned} \text{故 } p(t + \tau) - p(t) &= \int_t^{t+\tau} \left[K(p, q) + \frac{\partial K}{\partial p}(p' - p) + \frac{\partial K}{\partial q}(q' - q) \right] dt' + g\tilde{F}_1(t) \\ &= \tau \cdot K + \frac{1}{2} \tau^2 \left(\frac{\partial K}{\partial q} \cdot \frac{p}{m} + \frac{\partial K}{\partial p} \cdot K \right) + g\tilde{F}_1(t) \\ &\quad + g \frac{\partial K}{\partial p} \tilde{F}_2(t), \end{aligned} \quad (13a)$$

$$q(t + \tau) - q(t) = \frac{1}{m} \int_t^{t+\tau} [p + (p' - p)] dt',$$

$$= \tau \cdot \frac{p}{m} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{K}{m} + \frac{g}{m} \tilde{f}_2(t), \quad (13b)$$

式中, $\tilde{f}_1(t) = \int_t^{t+\tau} \Gamma(t') dt' = \sqrt{2\tau} \omega_1(t)$

$$\tilde{f}_2(t) = \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} \Gamma(t'') dt'' = \sqrt{2\tau} \cdot \tau \left(\frac{1}{2} \omega_1(t) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \omega_2(t) \right)$$

这儿 $\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 是两个独立的 $N(0,1)$ 标准正态分布随机数, 根据复合抽样方法得到:

$$\omega_1(n) = \sqrt{-2 \ln \xi_{2n-1}} \cos 2\pi \xi_{2n},$$

$$\omega_2(n) = \sqrt{-2 \ln \xi_{2n-1}} \sin 2\pi \xi_{2n},$$

而 $\{\xi_n\}$ 是 $(0, 1)$ 均匀分布伪随机数. 于是一一对 ξ_n 产生一对 ω_n , 供我们初始分布和任一时刻的随机力冲量抽样使用.

将 Langevin 方程的一般 Monte-Carlo 解(13)式应用到我们的问题之中, 并将它们化为无量纲形式, 则需 p_x 以 $\sqrt{m_x \tau}$, p_h 以 $\sqrt{m_h T_h^*}$ 为单位. 那么方程(2)连同初始条件(7)的四维 M-C 模拟解最终写成:

$$\left\{ \begin{aligned} p_x^L(n+1) &= \left[1 - \nu_x \tau + \frac{1}{2} (\nu_x^2 + \omega_x^2) \tau^2 \right] p_x^L(n) + \frac{C_x \left(1 - \frac{1}{2} \nu_x \tau \right)}{\sqrt{m_x \tau}} \cdot x_n^L \\ &\quad + \sqrt{\frac{16\pi\eta_0 R_0 \tau}{M_0}} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2} \nu_x \tau \right) \omega_1^L(2n-1) - \frac{\nu_x \tau}{2\sqrt{3}} \omega_1^L(2n) \right] \\ x_{n+1}^L &= \left(1 + \frac{1}{2} \omega_x^2 \tau^2 \right) x_n^L + \left(1 - \frac{1}{2} \nu_x \tau \right) \tau \sqrt{\frac{T}{m_x}} p_x^L(n) \\ &\quad + \sqrt{\frac{16\pi\eta_0 R_0 \tau}{M_0}} \cdot \sqrt{\frac{T}{m_x}} \cdot \tau \left[\frac{1}{2} \omega_1^L(2n-1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \omega_1^L(2n) \right] \\ p_x^L(0) &= \left[\frac{2}{\pi} + \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \cdot \omega_1(L) \right] \cdot \sqrt{\frac{T_{sd}}{T}} \\ x_0^L &= 0 \end{aligned} \right. \quad (14a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} p_h^L(n+1) &= \left[1 - \nu_h \tau + \frac{1}{2} (\nu_h^2 - \omega_h^2) \tau^2 \right] p_h^L(n) - \frac{C_h \left(1 - \frac{1}{2} \nu_h \tau \right) \tau}{\sqrt{m_h T_h^*}} \cdot h_n^L \\ &\quad + \sqrt{\frac{80\pi\eta_0 R_0 \tau}{M_0}} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \nu_h \tau \right) \omega_2^L(2n-1) - \frac{\nu_h \tau}{2\sqrt{3}} \omega_2^L(2n) \right] \\ h_{n+1}^L &= \left(1 - \frac{1}{2} \omega_h^2 \tau^2 \right) h_n^L + \left(1 - \frac{1}{2} \nu_h \tau \right) \tau \sqrt{\frac{T_h^*}{m_h}} \cdot p_h^L(n) \\ &\quad + \sqrt{\frac{80\pi\eta_0 R_0 \tau}{M_0}} \cdot \sqrt{\frac{T_h^*}{m_h}} \cdot \tau \left[\frac{1}{2} \omega_2^L(2n-1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \omega_2^L(2n) \right] \\ p_h^L(0) &= \sqrt{T_{h sd} / T_h^*} \cdot \omega_2(2L-1) \\ h_0^L &= \sqrt{T_{h sd} / C_{h sd}} \cdot \omega_2(2L) \end{aligned} \right. \quad (14b)$$

上标 L 用于区分不同的布朗粒子, 模拟是在有限的时间内跟踪每一个粒子直到它抵达断点线.

下面来考察第 L 个布朗粒子在断点线附近的行为. 已知断点线方程是: $h - h_{ic}^0 = -|b_0|(x - x_{ic}^0)$. 若某一时刻 t_n 的布朗粒子的坐标 (x_n^L, h_n^L) 满足: $h_n^L - h_{ic}^0 + |b_0|(x_n^L - x_{ic}^0) < 0$, 此即表示粒子在这一时刻处在断点线下方. 而若下一时刻 t_{n+1} 的 (x_{n+1}^L, h_{n+1}^L) 有: $h_{n+1}^L - h_{ic}^0 + |b_0|(x_{n+1}^L - x_{ic}^0) > 0$, 这表明此时布朗粒子已穿过断点线. 那末由 (x_n^L, h_n^L) 和 (x_{n+1}^L, h_{n+1}^L) 两点所在的直线段与断点线的交点被确定为核系统的动力学断点, 其为:

$$x_s^L = \frac{h_{ic}^0 + |b_0|x_{ic}^0 - h_n^L + \left(\frac{h_{n+1}^L - h_n^L}{x_{n+1}^L - x_n^L}\right) \cdot x_n^L}{|b_0| + \frac{h_{n+1}^L - h_n^L}{x_{n+1}^L - x_n^L}}, \quad (15a)$$

$$h_s^L = h_{ic}^0 + |b_0|(x_{ic}^0 - x_s^L). \quad (15b)$$

断点位置上的布朗粒子具有的动量由线性插值给出:

$$p_{x_s}^L = p_x^L(n) + \frac{x_s^L - x_n^L}{x_{n+1}^L - x_n^L} \cdot (p_x^L(n+1) - p_x^L(n)),$$

$$p_{h_s}^L = p_h^L(n) + \frac{h_s^L - h_n^L}{h_{n+1}^L - h_n^L} \cdot (p_h^L(n+1) - p_h^L(n)).$$

布朗粒子从鞍点下降到断点所渡过的时间是:

$$T_s^L = T_n^L + \frac{(x_s^L - x_n^L)}{x_{n+1}^L - x_n^L} \cdot \tau.$$

四、结果与讨论

在耗散能量 E_d 的表示式中, 我们取 $\Delta E = \Delta E_s$, 因此核在变形过程中温度保持不变, (9)式中的平均值和均方差的 M-C 近似估计是:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{L_s} \sum_{i=1}^{L_s} x_i$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{L_s} \sum_{i=1}^{L_s} x_i^2 - \left(\frac{1}{L_s} \sum_{i=1}^{L_s} x_i \right)^2$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{L_s} \sum_{i=1}^{L_s} (x_i y_i) - \left(\frac{1}{L_s} \sum_{i=1}^{L_s} x_i \right) \cdot \left(\frac{1}{L_s} \sum_{i=1}^{L_s} y_i \right)$$

其中 L_s 是能够穿过断点线的布朗粒子的总和.

计算中我们多次试验, 发现适当地选择时间是十分重要的. 对含随机力的 Langevin 方程的 M-C 直接模拟不同解一般的微分方程, 物理上对 τ 的取值有一定的限制. 应该在时间间隔 τ 内, 随机力已经历了许多次涨落, 或者说热浴中的轻粒子对布朗粒子碰撞的次数很多, 从这个意义上来讲, 微观来看 τ 应该是足够大的, 只有这样, 随机力冲量才能较好地满足高斯分布^[6]; 但在宏观上它应该足够小, 使得布朗粒子离开原来位置的位移不致过

表 1 计算中所需参数

核	$E^*(\text{MeV})$	$B_f(\text{MeV})$	$C_{hid}(\text{MeV})$	$\Delta E'(\text{MeV})$	x_{rc}^*	$ b_0 $	x_{rc}^0	h_{rc}^0
^{200}Tl	48.1	11.87	324.0	3.12	0.68	0.5200	0.74	0.02
^{206}Bi	46.3	9.74	307.0	4.94	0.80	0.4900	0.92	-0.02
^{212}At	45.8	7.91	289.0	8.61	0.92	0.4433	1.2	-0.09
^{230}Th	6.0	4.37	238.0	14.65	1.16	0.4567	1.4	-0.07
^{236}U	6.0	3.32	200.0	18.17	1.24	0.4567	1.48	-0.07
^{240}Pu	6.0	2.53	187.0	21.92	1.28	0.4367	1.58	-0.10
^{244}Cm	6.0	1.87	173.0	25.96	1.32	0.4233	1.66	-0.12
^{248}Cf	6.0	1.33	143.0	30.28	1.40	0.3833	1.86	-0.18

大。我们希望能找到这样的 τ , 在其附近选值, E_K 尤其是 $\sigma_{E_K}^2$ 随 τ 的变化不太敏感。图 1 是 ^{212}At 核的 $\sigma_{E_K}^2$ 随 τ 的变化关系, 发现在 τ 取 $(0.075 \sim 0.11) \times 10^{-21}$ 秒区间内的值时, $\sigma_{E_K}^2$ 与 τ 的关系呈现一平台状。对其它核也存在 5% 相对误差以内的 $\sigma_{E_K}^2$ 与 τ 的平台关系, τ 过大过小, $\sigma_{E_K}^2$ 变化剧烈。我们在平台中部取一 τ 值, 由此计算得出 E_K 和 $\sigma_{E_K}^2$ 。在用传播子方法解含时 Fokker-Planck 方程时, 也有类似的情况发生^[8]。

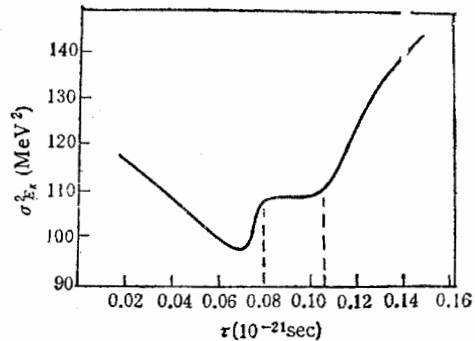


图 1 ^{212}At 的 $\sigma_{E_K}^2$ 随 τ 的变化关系

在一定的时间尺度内 ($\Delta T = 50 \times 10^{-21}$ 秒), 我们发现大约有 70% 的布朗粒子从鞍点降落后能穿过断点线。初始时刻, 具有正动量的布朗粒子与总数之比是:

$$\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(p_{x_0} - \langle p_{x_0} \rangle)^2}{2\sigma_{p_{x_0}}^2}\right] dp_{x_0} / \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(p_{x_0} - \langle p_{x_0} \rangle)^2}{2\sigma_{p_{x_0}}^2}\right] dp_{x_0} \approx 80\%$$

由此可知, 有 10% 左右的布朗粒子中途返回鞍点不再回来。

表 2 计算结果

核	$\langle t_{11} \rangle$ 10^{-21}sec	$\langle E_p \rangle$ (MeV)	$\langle V_c \rangle$ (MeV)	$\sigma^2 E_p$ (MeV ²)	$\sigma^2 V_c$ (MeV ²)	$\sigma E_p V_c$ (MeV ²)	$\sigma^2 E_K$ (MeV ²)	E_{KM} (MeV)	$\sigma^2 E_K$ (MeV ²)
^{200}Tl	3.57	4.33	137.24	8.97	95.47	-7.89	88.66	142.0	90.3
^{206}Bi	3.89	4.73	142.91	9.33	109.62	-9.03	100.89	146.1	100.9
^{212}At	4.78	4.49	147.13	8.79	121.53	-10.31	109.69	151.2	97.1
^{230}Th	5.41	7.18	158.45	9.15	121.58	-16.61	97.50	163.6	67.2
^{236}U	5.58	9.44	158.15	13.17	134.01	-22.64	101.89	171.8	106.1
^{240}Pu	5.25	11.39	164.97	18.12	179.67	-33.87	130.05	177.1	132.3
^{244}Cm	4.98	13.47	170.21	24.11	210.43	-46.87	140.81	184.2	136.9
^{248}Cf	5.06	13.43	175.71	25.39	238.58	-50.90	162.17	189.1	169.0

上表中最后两列数值为取自文[9]的热中子诱发裂变的实验数据。由此表可知: 由于坐标的涨落所引起的库仑能涨落以及运动动能与库仑能的关联涨落对平均动能涨落宽

度 $\sigma_{E_K}^2$ 的贡献是主要的, 这些却是一维扩散模型所无法涉及的量. 结合公式(4)和表 1, 不难看出: $E_d + \langle E_{p_i} \rangle \approx \Delta E$, 满足能量守恒, 这说明我们的计算结果是自洽的. 图 2 和图 3 分别给出了 E_K 和 $\sigma_{E_K}^2$ 随 Z^2/A 的变化趋势. 随着核的可裂变性增加, 核能达到更长的拉长状态而颈部不发生断裂, 所以 E_{p_i} 增加; 核越重, 其 $|b_0|$ 减小, 则布朗粒子在断点线附近坐标的涨落加大, 故 $\sigma_{v_c}^2, |\sigma_{E_{p_i} v_c}^2|$ 均增加, 从而总的动能涨落宽度 $\sigma_{E_K}^2$ 随 Z^2/A 的增加而上升.

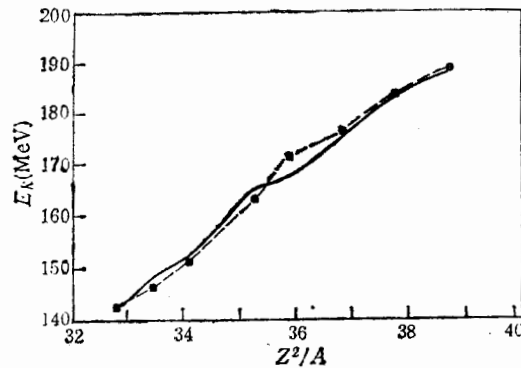


图 2 平均动能 E_K 与 Z^2/A 的变化关系

■ 实验点 — Z^2/A ---- 文[2]

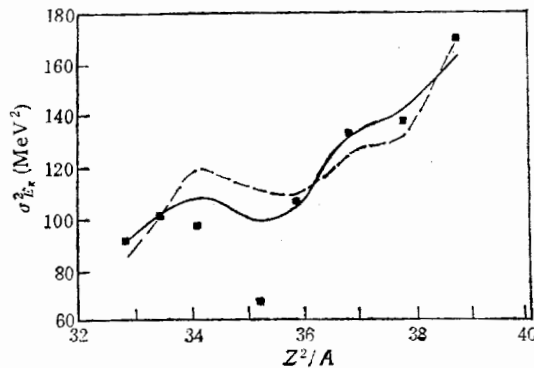


图 3 平均动能涨落宽度 $\sigma^2_{E_K}$ 与 Z^2/A 的变化关系

■ 实验点 — 本文 ---- 文[2]

五、结 束 语

计算结果与实验值相符, 也与文[2]大体一致. 需要指出的是, 多维裂变扩散模型的数值计算是比较困难和费时间的, 本文侧重于 Monte-Carlo 方法的探索以及这种方法的可行性与可靠性方面, 它更适合于描写高激发态的裂变. 同时也应看到, Langevin 方程包含的信息相当丰富, 这为我们更深一步研究裂变机制提供了一条新的途径. 进一步的真实性研究正在进行中.

参 考 文 献

- [1] F. Scheuter, C. Gegoire, H. Hofmann and J. R. Nix, *Phys. Lett.*, **149B**(1984), 303.
- [2] G. D. Adeev and I. I. Gonchar, *Z. Phys.*, **A332**(1985), 479.
- [3] Serdyuk O. I., Adeev G. D., Gonchar I. I., Pashkevich V. V., and Pischasov N. I., *Yad. Fiz (USSR)*, **46** (1987), 710.
- [4] H. Hofmann, C. Grepoire, R. Lucas and C. Ngo, *Z. Phys.*, **A293**(1979), 229.
- [5] G. D. Adeev and I. I. Gonchar, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **40**(1984), 553
- [6] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.*, **15**(1943), 1.
- [7] Brack M., Damgaard J., Jensen A. S., Pauli H. C., Struisky V. M., Wong C. Y., *Rev. Mod. Phys.*, **44** (1972), 320.
- [8] F. Scheuter and H. Hofmann, *Nucl. Phys.*, **A394**(1983), 477.
- [9] Lazarev Y. A., *At. Energy. Rev.*, **15**(1977), 75.
- [10] K. T. R. Davis and A. J. Sierk, *J. Comp. Phys.*, **18**(1975), 311.

CALCULATION OF THE KINETIC-ENERGY DISTRIBUTIONS OF FISSION-FRAGMENTS FROM MONTE-CARLO SIMULATION TO THE FOUR-DIMENSIONAL LANGEVIN EQUATION

BAO JINGDONG, ZHUO YIZHONG
(Institute of Atomic Energy, Beijing)

ABSTRACT

The four-dimensional Langevin equation for two collective coordinates (the distance between the centers of mass of the nascent fragments and the neck parameter) and their conjugate momenta is used as a dynamical equation to describe the descent of Brownian particles from the saddle-point to the scission points. Monte-carlo method is used to solve the Langevin equation. The variances of the kinetic-energy distributions of nuclear fission-fragments in the range $32 < Z^2/A < 40$ have been calculated. The results of calculation are in good agreement with the experimental data.