第 12 卷 第 6 期　　高能物理与核物理　　Vol. 12, No. 6
1988 年 11 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Nov., 1988

## 快报

# Calabi-丘紧致化下的 inflation 解

徐建军　李新洲　倪光炯

(复旦大学物理系,上海)

### 摘　　要

本文从超弦理论的场论极限出发,讨论了在 Calabi-丘紧致化下的宇宙学.我们考虑了物质项贡献,得到了具有 inflation 特征的宇宙学解.

近几年来,人们普遍认为超弦理论可能是一个好的、数学上自洽的量子引力理论[1],因而在超弦框架下讨论宇宙学是一个令人感兴趣的问题. 在 Calabi-丘紧致化下的宇宙学解已有了一些讨论. 吴咏时等人在取物质优势的物态条件下给出了一个近似解[2], Yoshimura 在不考虑物质贡献的近似情形下得到了一个 inflation 解[3]. 另一方面,我们已在 6 维标度不变理论[4]和具有 GUT 的 6 维理论[5]中引入物质项贡献并得到了宇宙学解. 本文在超弦的 Calabi-丘紧致化下,类似地引入物质项贡献并得到了 inflation 宇宙解.

超弦理论的无反常性质被发现后,人们认识到它很可能有唯象学的意义. 超弦理论的自洽性要求时空是 10 维的,其中的 6 维形成一个小的紧致流形. 要使理论能够描写真实的物理,必须对真空场相作出严格的限制. 最有吸引力的真空场相之一是 $M_4\times K$,其中 $M_4$ 是 4 维闵可夫斯基空间, $K$ 是具有 $SU(3)$ 和乐群的 Ricci 平坦的 Kähler 流形,即Calabi-丘流形[6]. 在场论极限下,超弦理论退化为超引力理论. 10 维 $N=1$ 超引力多重态包括度规场 $\tilde{g}_{MN}$、自旋为 $-3/2$ 的场 $\psi_M$、2 次形式的势 $B_{MN}$、自旋为 $-1/2$ 的场 $\lambda$ 及标量场 $\phi$; 超杨-Mills 多重态包括杨-Mills 场 $F^a_{MN}$ 和自旋为 $-1/2$ 的场 $\chi^a$. 在场论极限下的超弦作用量为

$$S=\int d^{10}z\sqrt{-\tilde{g}}\left\{\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\tilde{R}-\frac{3}{4}K_{10}^2\phi^{-\frac{3}{2}}H_{MNP}^2-\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{K_{10}^2}(\phi^{-1}\partial_M\phi)^2-\frac{1}{4}\phi^{-\frac{3}{4}}\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{1}{30}\mathrm{Tr}F_{MN}^2-(\tilde{R}_{MNPQ}^2-4\tilde{R}_{MN}^2+\tilde{R}^2)\right]+\mathscr{L}_f\right\},\tag{1}$$

其中 $M,N,P,Q=0,1,\cdots,9$, $H_{MNP}$ 是 $B_{MN}$ 的 Kalb-Ramond 场强, $K_{10}^2$ 为 10 维空间的引力常数,$\tilde{g}$ 为 $\tilde{g}_{MN}$ 的行列式,$\mathscr{L}_f$ 表示费米子部分. 由(1)式可导出下列运动方程:

$$\tilde{R}_{AB}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{AB}\tilde{R}=\frac{9}{2}\kappa_{10}^4\phi^{-\frac{3}{2}}\left(H_{AMN}H_B^{MN}-\frac{1}{6}\tilde{g}_{AB}H_{MNP}^2\right)+9\kappa_{10}^4\nabla^M(\phi^{-\frac{3}{2}}H_{APQ}$$

本文 1988 年 3 月25日收到.

$$\cdot R_{MB}^{PQ}) + \frac{9}{8}\phi^{-2}\left[\partial_A\phi\partial_B\phi - \frac{1}{2}\tilde{g}_{AB}(\partial_M\phi)^2\right] + \frac{1}{30}\kappa_0\phi^{-\frac{3}{4}}$$

$$\cdot\left(\mathrm{Tr}F_{AM}F_B^M - \frac{1}{4}\tilde{g}_{AB}\mathrm{Tr}F_{MN}^2\right) + \frac{1}{2}\kappa_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}\left[\frac{1}{2}\tilde{g}_{AB}(\tilde{R}_{MNPQ}^2\right.$$

$$- 4\tilde{R}_{MN}^2 + \tilde{R}^2) - 2\tilde{R}\tilde{R}_{AB} + 4\tilde{R}_{AM}\tilde{R}_B^M + 4\tilde{R}_{AMBN}\tilde{R}^{MN}$$

$$\left. - 2\tilde{R}_A^{MNP}\tilde{R}_{BMNP}\right] + \kappa_{10}^2 T_{AB}, \tag{2}$$

$$\nabla_M(\phi^{-\frac{3}{2}}H^{MNP}) = 0, \tag{3}$$

$$D_M(\phi^{-\frac{3}{4}}F^{MPa}) + 9\kappa_{10}^2(\phi^{-\frac{3}{2}}F_{MN}^a H^{MNP}) = 0, \tag{4}$$

$$\nabla_M(\phi^{-2}\partial_M\phi) + \phi^{-3}(\partial_M\phi)^2 + \kappa_{10}^4\phi^{-\frac{5}{2}}H_{MNP}^2 + \frac{1}{6}\kappa_{10}^2\phi^{-\frac{7}{4}}$$

$$\times\left[\frac{1}{30}\mathrm{Tr}F_{MN}^2 - (\tilde{R}_{MNPQ}^2 - 4\tilde{R}_{MN}^2 + \tilde{R}^2)\right] = 0, \tag{5}$$

其中 $T_{AB}$ 为 10 维能量-动量张量．由于在宇宙学中，除了背景场的真空期待值外，还应当计及理论框架所包含的粒子的各种激发模式的效应，即有限温度的效应．这些贡献的总和就以能量-动量张量的形式出现．

$H$、$R$ 和 $F$ 诸量还必须满足 Bianchi 恒等式[7]

$$dH = \mathrm{tr}\ R\wedge R - \frac{1}{30}\ \mathrm{Tr}\ F\wedge F, \tag{6}$$

其中 tr 表示对矢量表示求迹，Tr 为对伴随表示求迹． 我们假定空间度规具有推广的 Robertson-Walker 形式：

$$\tilde{g}_{MN} = \mathrm{diag}[-1,\ R_3^2(t)g_{ij}(x),\ R_6^2(t)g_{mn}(y)], \tag{7}$$

其中 $i,j = 1,2,3; m,n = 4,\cdots,9$． $R_3(t)$ 和 $R_6(t)$ 是标度因子，$g_{ij}$ 是 3 维空间的度规，$g_{mn}$ 是 6 维紧致流形的度规．在 Calabi-丘紧致化下，场量满足下述条件

$$R_{mn} = 0, \tag{8}$$

$$\phi = \text{常数},\quad K = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{30}F^a{}_{[mn}F^a_{pq]} = R^{rs}{}_{[mn}R_{pq]rs}, \tag{10}$$

其中 $K$ 为 Robertson-Walker 参数．从(8)—(10)式，我们导出 Ricci 张量的非零分量为

$$\tilde{R}_{00} = -(3\ddot{R}_3/R_3 + 6\ddot{R}_6/R_6), \tag{11}$$

$$\tilde{R}_{ij} = (R_3\ddot{R}_3 + 2\dot{R}_3^2 + 6\dot{R}_3\dot{R}_6R_3/R_6)g_{ij}, \tag{12}$$

$$\tilde{R}_{mn} = (R_6\ddot{R}_6 + 5\dot{R}_6^2 + 3\dot{R}_3\dot{R}_6R_6/R_3)g_{mn}. \tag{13}$$

能量-动量张量为

$$T_{AB} = \mathrm{diag}[\rho,\ pR_3^2(t)g_{ij},\ p'R_6^2(t)g_{mn}], \tag{14}$$

其中 $\rho$ 为密度，$p$ 及 $p'$ 分别是 3 维空间和 6 维空间内的压力．考虑真空解

$$H_{MNP} = 0,\ M,N,P = 0,1,\cdots 9; \tag{15}$$

$$F_{MN}^a = 0,\ M,N \neq m,n. \tag{16}$$

则方程(3)、(4)和(6)自动满足．方程(5)要求下式成立

$$\frac{1}{30}\,\mathrm{Tr}\,F_{MN}^2 = \tilde{R}_{MNPQ}^2 - 4\tilde{R}_{MN}^2 + \tilde{R}^2 \tag{17}$$

将(2)式缩并,得

$$\tilde{R} = -\frac{1}{4}\kappa_{10}^2 T_A^A = -\frac{1}{4}\kappa_{10}^2(3p + 6p' - \rho). \tag{18}$$

假设极早期宇宙是辐射优势的,并假设标度因子 $R_3$ 和 $R_6$ 在 $t_0$ 附近有相同的标度,则物态方程为

$$p = p', \quad \rho = 9p. \tag{19}$$

利用(17)式和物态方程可将爱因斯坦方程约化为

$$\begin{aligned}-3\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3} + 2\frac{\ddot{R}_6}{R_6}\right) = K_{10}^2\rho - K_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}\Bigg[18\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3} + \frac{2\ddot{R}_6}{R_6}\right)^2 + \frac{6\ddot{R}_3}{R_3^3}\left(R_3\ddot{R}_3 + 2\dot{R}_3^2 + 6\frac{R_3\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_6}\right) \\ + \frac{12\ddot{R}_6}{R_6^3}\left(R_6\ddot{R}_6 + 5\dot{R}_6^2 + 3\frac{\dot{R}_3R_6\dot{R}_6}{R_3}\right) - 3\left(\frac{\ddot{R}_3^2}{R_3^2} + 2\frac{\ddot{R}_6^2}{R_6^2}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{R}_3}{R_3} + \frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2} + \frac{6\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6} = \frac{1}{9}K_{10}^2\rho + K_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}\Bigg[2\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3} + \frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2} + 6\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right)^2 \\ + 6\frac{\ddot{R}_3}{R_3}\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3} + \frac{2\ddot{R}_6}{R_6}\right) + \frac{4\dot{R}_3^2}{R_3^2}\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3} + \frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2} + 6\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right) \\ + 12\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6^3}\left(R_6\ddot{R}_6 + 5\dot{R}_6^2 + \frac{3\dot{R}_3R_6\dot{R}_6}{R_3}\right) \\ - \left(\frac{\ddot{R}_3^2}{R_3^2} + 4\frac{\dot{R}_3^4}{R_3^4} + 6\frac{\dot{R}_3^2\dot{R}_6^2}{R_3^2R_6^2}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{R}_6}{R_6} + 5\frac{\dot{R}_6^2}{R_6^2} + 3\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6} = \frac{1}{9}\kappa_{10}^2\rho + \kappa_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}\Bigg[2\left(\frac{\ddot{R}_6}{R_6} + 5\frac{\dot{R}_6^2}{R_6^2} + 3\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right)^2 \\ + 6\frac{\ddot{R}_6}{R_6}\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3} + 2\frac{\ddot{R}_6}{R_6}\right) + 10\frac{\dot{R}_6^2}{R_6^2}\left(\frac{\ddot{R}_6}{R_6} + 5\frac{\dot{R}_6^2}{R_6^2} + 3\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right) \\ + 6\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3} + 2\frac{\dot{R}_3^2}{R_3^2} + 6\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right) \\ - \left(\frac{\ddot{R}_6^2}{R_6^2} + 10\frac{\dot{R}_6^4}{R_6^4} + \frac{3\dot{R}_3^2\dot{R}_6^2}{R_3^2R_6^2}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{22}$$

方程组(20)—(22)有下述形式解

$$R_3(t) = A_0 t^{\frac{5}{9}}\left(1 - \frac{34345}{161109}\kappa_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}t^{-2} + \cdots\right), \tag{23}$$

$$R_6(t) = B_0 t^{-\frac{1}{9}}\left(1 + \frac{955}{49572}\kappa_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}t^{-2} + \cdots\right), \tag{24}$$

$$\rho(t) = \frac{523730}{53703}\phi^{-\frac{3}{4}}t^{-4} + \cdots \tag{25}$$

其中 $t$ 的单位是任意的. 这个解描述了极早期宇宙 $R_3(t)$ 膨胀而 $R_6(t)$ 收缩的物理图象.

当宇宙发展到 $R_3(t) \gg R_6(t)$ 的时期, 6 维空间的压力 $p'$ 可以忽略,仍考虑辐射占优势,物态方程为

$$p' = 0, \quad \rho = 3p. \tag{26}$$

此时，爱因斯坦方程化为

$$-3\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+2\,\frac{\ddot{R}_6}{R_6}\right)=\kappa_{10}^2\rho-\kappa_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}\left[18\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\ddot{R}_6}{R_6}\right)^2+\frac{6\ddot{R}_3}{R_3^3}\left(R_3\ddot{R}_3+2\dot{R}_3^2+6\,\frac{R_3\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_6}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{12\ddot{R}_6}{R_6^3}\left(R_6\ddot{R}_6+5\dot{R}_6^2+3\frac{\dot{R}_3R_6\dot{R}_6}{R_3}\right)-3\left(\frac{\ddot{R}_3^2}{R_3^2}+2\,\frac{\ddot{R}_6^2}{R_6^2}\right)\right],\tag{27}$$

$$\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2}+\frac{6\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}=\frac{1}{3}\kappa_{10}^2\rho+\kappa_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}\left[2\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2}+6\,\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right)^2+6\,\frac{\ddot{R}_3}{R_3}\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\ddot{R}_6}{R_6}\right)\right.$$
$$+\frac{4\dot{R}_3^2}{R_3^2}\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2}+\frac{6\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right)+12\,\frac{\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\left(\frac{\ddot{R}_6}{R_6}+\frac{5\dot{R}_6^2}{R_6^2}+\frac{3\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right)$$
$$\left.-\left(\frac{\ddot{R}_3^2}{R_3^2}+\frac{4\dot{R}_3^4}{R_3^4}+\frac{6\dot{R}_3^2\dot{R}_6^2}{R_3^2R_6^2}\right)\right],\tag{28}$$

$$\frac{\ddot{R}_6}{R_6}+\frac{5\dot{R}_6^2}{R_6^2}+\frac{3\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}=\kappa_{10}^2\phi^{-\frac{3}{4}}\left[2\left(\frac{\ddot{R}_6}{R_6}+\frac{5\dot{R}_6^2}{R_6^2}+\frac{3\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right)^2+\frac{6\ddot{R}_6}{R_6}\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\ddot{R}_6}{R_6}\right)\right.$$
$$+\frac{10\dot{R}_6^2}{R_6^2}\left(\frac{\ddot{R}_6}{R_6}+\frac{5\dot{R}_6^2}{R_6^2}+\frac{3\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right)+\frac{6\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\left(\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{6\dot{R}_3\dot{R}_6}{R_3R_6}\right)-\left(\frac{\ddot{R}_6^2}{R_6^2}+\frac{10\dot{R}_6^4}{R_6^4}+\frac{3\dot{R}_3^2\dot{R}_6^2}{R_3^2R_6^2}\right)\right].\tag{29}$$

方程组(27)—(29)也存在着类似于(23)—(25)的级数解．除此之外，方程组(27)—(28)有一个 inflation 解

$$R_3(t)=A_0e^{Ht},\tag{30}$$

$$R_6(t)=\text{常数}\tag{31}$$

$$\rho(t)=\frac{H^2}{7\kappa_{10}^2},\tag{32}$$

其中 $H=\sqrt{\frac{2}{21}}K_{10}^{-1}\phi^{3/8}$．从“结构起源”问题[8]可以导出 inflation 时间 $\Delta t$ 的条件

$$\Delta t>\sqrt{\frac{88725}{2}}\,\kappa_{10}\phi^{-\frac{3}{8}}.\tag{33}$$

最后，我们综述所求得解的物理意义：在量子宇宙发展阶段以后，解(23)—(24)描写 $R_3(t)$ 膨胀而 $R_6(t)$ 收缩的阶段，当 $R_6(t)$ 收缩到紧致化尺度后即趋于常数而 $R_3(t)$ 产生具有 inflation 特征的膨胀．在 inflation 以后，宇宙又回复到 $R_3(t)$ 膨胀而 $R_6(t)$ 收缩，一直演化到宇宙进入物质优势时期，这时期的宇宙学解已在文献[2]中进行了讨论．此外，还应当指出本文仅给出了 inflation 阶段回复到通常大爆炸宇宙的数学上的理由(在物态条件 $p'=0$，$\rho=3p$ 下，存在两类解)，转变的物理机制有待于进一步研究．

## 参　考　文　献


[1] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.*, **149B**(1984), 117.
[2] Y. S. Wu and Z. Wang, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 1978.
[3] M. Yoshimura, *Prog. Thero. Phys. Supplement*, **86**(1986), 208.
[4] Li Xinzhou, Cai Shengshan, Hu Sizhu and Xu Jianjun, *Phys. Lett.*, **201B**(1988), 34.
[5] Cai Shengshan, Hu Sizhu, Li Xinzhou and Xu Jianjun, *Chinese Phys. Lett.*, 4(1987), 465.
[6] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B258**(1985), 46.

[ 7 ] E. Witten, *Phys. Lett.*, **149B**(1984), 351.
[ 8 ] R. H. Brandenberger, in Superstrings, unified theories and cosmology, editors G. Furlan, R. Jengo, J. C. Pati, D. W. Sciama, E. Sezgin and Q. Shafi, World Scientific, 1987.

# AN INFLATION SOLUTION FROM THE CALABI-YAU COMPACTIFICATION

XU JIANJUN LI XINZHOU NI GUANGJIONG
(*Fudan University, Shanghai*)

ABSTRACT

The field theory limit of superstring theories in ten dimensions suggests a compactification on the Calabi-Yau manifolds. The authors present a cosmological inflation solution of this scenario to which a matter term is added.