第12卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 12, No. 6
1988年11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1988

R-W 宇宙中的 Dirac 真空解

李 元 杰
(华中工学院，武汉)

摘 要

本文将文献[5]的结论推广到 R-W 宇宙中的旋量场，求得无质量时的严格解$\Omega_n = \frac{n}{a}$，它对应一个共形真空．在有质量的情况下，$\Omega_n = m + \frac{n}{a}$，它对应一个绝热真空．

一

用半经典的理论，研究引力场产生粒子的问题在许多文献中讨论过[1-4]．但是，关于弯曲时空量子真空态的确切定义尚未彻底解决．1986年，Mario. Castagnino 和 Luis. Chimento 给出 R-W 宇宙中，一个量子化的标量场有解[5]

$$\phi_K(t, x^\alpha) = \frac{\exp\left[-i\int_0^t \Omega_K(t)dt\right]\exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})}{a^{3/2}[2\,\Omega_K(t)]^{1/2}(2\pi)^{3/2}}. \tag{1}$$

其中，a 是宇宙标度因子，Ω_K 满足方程：

$$\Omega_K^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{\Omega}_K}{\Omega_K}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\Omega}_K}{\Omega_K}\right) = \omega_K^2 - \frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H. \tag{2}$$

这里，$\omega_K^2 = m^2 + K^2/a^2$，$H = \frac{\dot{a}}{a}$ 是 Hubble 常数．并证明了，在 $m = 0$ 时，

$$\Omega_K = \frac{K}{a}. \tag{3}$$

它是一个非振荡型的解，称为共形真空．对于有质量的情况，也有一个非振荡解

$$\Omega_K = \omega_K = \sqrt{m^2 + \frac{K^2}{a^2}}, \tag{4}$$

将(4)式与方程(2)的 WKB 解[4]

$$\Omega_K = \omega_K\left[1 + \frac{1}{6}\left(H^2 + \frac{R}{6}\right)\frac{m^2}{\omega_K^4} + \frac{5}{8}\dot{H}^2\frac{m^4}{\omega_K^6} + \cdots\right] \tag{5}$$

相比较，可知(4)是一个绝热真空解．

我们试将 Mario. Castagnino 和 Luis Chimento 的关于标量场真空解结论扩充到旋

本文1987年6月3日收到．

量场的情况.

二

弯曲时空中，Dirac 方程用微分形式可写成如下形式[6]

$$[\gamma^{\mu}(\omega_{\mu}-iea_{\mu}-\Gamma_{\mu})+m]\psi=0. \tag{6}$$

这里，a_{μ} 是规范协变 4—矢势，$\Gamma_{\mu}=-\frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}$ 是旋量联络. 在 R-W 度规中，线元

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2}+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right], \tag{7}$$

写成微分形式

$$ds^2=-(\omega^0)^2+(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2. \tag{8}$$

其中，$\omega^0=dt$，$\omega^1=\frac{a}{\sqrt{1-Kr^2}}dr$，$\omega^2=ard\theta$，$\omega^3=ar\sin\theta d\varphi$. (9)

对(9)式求外微分得

$$\begin{cases}\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_3^0=0,\\ \omega_0^1=\frac{\dot a}{a}\omega^1,\\ \omega_0^2=\frac{\dot a}{a}\omega^2,\ \omega_1^2=\frac{\sqrt{1-Kr^2}}{ar}\omega^2,\ \omega_3^2=0,\\ \omega_0^3=\frac{\dot a}{a}\omega^3,\ \omega_1^3=\frac{\sqrt{1-Kr^2}}{ar}\omega^3,\ \omega_2^3=\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{ar}\omega^3.\end{cases} \tag{10}$$

利用(9)、(10)求出 $\gamma_{\alpha\beta\mu}$ 的非零项为:

$$\begin{cases}\gamma_{101}=\frac{\dot a}{a}=\gamma_{202}=\gamma_{303},\\ \gamma_{212}=\gamma_{313}=\frac{\sqrt{1-Kr^2}}{ar},\\ \gamma_{323}=\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{ar}.\end{cases} \tag{11}$$

于是 Γ_{μ} 为:

$$\begin{cases}\Gamma_0=0,\ \Gamma_1=\frac{\dot a}{2a}\gamma^0\gamma^1,\ \Gamma_2=\frac{\dot a}{2a}\gamma^0\gamma^2+\frac{\sqrt{1-Kr^2}}{2ar}\gamma^1\gamma^2,\\ \Gamma_3=\frac{\dot a}{2a}\gamma^0\gamma^3+\frac{\sqrt{1-Kr^2}}{2ar}\gamma^1\gamma^3+\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{2ar}\gamma^2\gamma^3.\end{cases} \tag{12}$$

将(12)式代入(6)，且取 $a_{\mu}=0$，则在 R-W 宇宙中，Dirac 方程可写成:

$$\left[\gamma^0\partial_t+\gamma^1\frac{\sqrt{1-Kr^2}}{a}\partial_r+\gamma^2\frac{1}{ar}\partial_{\theta}+\gamma^3\frac{1}{ar\sin\theta}\partial_{\varphi}-\gamma^1\Gamma_1-\gamma^2\Gamma_2-\gamma^3\Gamma_3+m\right]\psi=0. \tag{13}$$

将(13)式乘以 $ari\gamma^0$，再分离变量 $\psi = Z(r, t)Y(\theta, \varphi)$ 有：

$$\left(i\gamma^0\gamma^2\partial_\theta + i\gamma^0\gamma^3 \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi - i\gamma^0\gamma^2\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{2}\right) Y = lY \tag{14}$$

和

$$[iar\partial_t - i\gamma^0\gamma^1\sqrt{1-Kr^2}\, r\partial_r - i\frac{3}{2}\dot{a}r$$
$$+ i\gamma^0\gamma^1\sqrt{1-Kr^2} - i\gamma^0 mar]Z = lZ. \tag{15}$$

取 Dirac 矩阵

$$\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

其中，$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 将 γ^μ 代入(15)式得：

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & B & A & 0 \\ B & 0 & 0 & A \end{pmatrix} Z = lZ, \tag{16}$$

其中，

$$\begin{cases} A = iar\partial_t - mar - i\dfrac{3}{2}\dot{a}r \\ B = \sqrt{1-Kr^2}(1 - r\partial_r). \end{cases} \tag{17}$$

(16)式包含两组等价方程，其中独立的一组方程为：

$$\left(iar\partial_t - mar - i\frac{3}{2}\dot{a}r\right)Z + \sqrt{1-Kr^2}\,(1 - r\partial_r)Z' = lZ, \tag{18}$$

$$\sqrt{1-Kr^2}(1 - r\partial_r)Z + \left(iar\,\partial_t - mar - i\frac{3}{2}\dot{a}r\right)Z' = lZ'. \tag{19}$$

(18) + (19)得：

$$\left[\left(ia\partial_t - ma - i\frac{3}{2}\dot{a}\right) + \sqrt{1-Kr^2}\left(\frac{1}{r} - \partial_r\right)\right](Z + Z') = \frac{l}{r}(Z + Z'). \tag{20}$$

再次分离变量 $Z + Z' = R(r)T(t)$，(20) 式能写成

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1-Kr^2}\left(\partial_r - \dfrac{1}{r}\right) + \dfrac{l}{r}\right] R = nR, & (21) \\ \left(ia\partial_t - ma - i\dfrac{3}{2}\dot{a}\right) T - nT = 0. & (22) \end{cases}$$

设(22)式有形如

$$T = a^{5/2}\Omega_n e^{-i\int_0^t \Omega_n dt} \tag{23}$$

的解，Ω_n 是 t 的函数，将(23)式代入(22)有：

$$i\frac{\dot{\Omega}_n}{\Omega_n} + \Omega_n = -i\frac{\dot{a}}{a} + m + \frac{n}{a}, \tag{24}$$

令 $\omega_n = m + \frac{n}{a}$，(24)变为：

$$i\frac{\dot{\Omega}_n}{\Omega_n} + \Omega_n = -i\frac{\dot{a}}{a} + \omega_n. \tag{25}$$

在 $m=0$ 时，方程(25)有严格解

$$\Omega_n = \frac{n}{a}. \tag{26}$$

解(26)是一个共形真空解.

在 $m \neq 0$ 时，当 $\frac{n}{a} \gg m$，Ω_n 有近似解

$$\Omega_n^{(1)} = \omega_n = m + \frac{n}{a}, \tag{27}$$

一般地，我们将 Ω_n 按 $m' = \frac{\frac{n}{a}m}{\omega_n^2}$ 的幂级数展开求解，为此设

$$\Omega_n = \omega_n(1 - im' + \alpha m'^2 - i\beta m'^2 + \cdots), \tag{28}$$

把(28)式代入(25)，比较 m' 的同次幂系数可求得

$$\Omega_n = \omega_n\left[1 + 2H^2\frac{m^2}{\omega_n^4} - iH^{1/2}\left(\frac{m}{\omega_n^2} - \frac{2m^2}{\omega_n^4}\right) + \cdots\right]. \tag{29}$$

比较(29)与(27)，它们对于膨胀宇宙是适用的，当 $t \to 0$ 时，$a \to 0$，$\Omega_n \to \infty$；而当 $t \to \infty$ 时，$a \to \infty$，$\Omega_n \to m$. 这表明，当宇宙半径无限大时，时空渐近平直.

三

最后，我们对所求得的真空解进行简短地讨论. 当 $m=0$ 时，方程(25)有严格解 $\Omega_n = \frac{n}{a}$，将它代入(23)式有

$$T = a^{5/2}\frac{n}{a}e^{-i\int_0^t \frac{n}{a}dt} \tag{30}$$

考虑到共形时间 $d\eta = \frac{dt}{a}$，(30)式改为

$$T = a^{3/2}ne^{-in\eta}. \tag{31}$$

当时空变化极缓时，$a \to$ 常数，形如(31)的解显然已简化为标准 Minkowski 空间的模式[7]，所以我们称解(26)为共形真空解.

为了讨论绝热真空，我们引入一个绝热参数 γ，取 $a = \frac{t^k}{\gamma^p}$，其中，k，p 为整数. 则

$$\dot{a} = \frac{kt^{k-1}}{\gamma^p} \xrightarrow[\gamma \to \infty]{} 0, \tag{32}$$

一个与 γ^p 成反比膨胀的宇宙、称为 p 阶绝热的. 对于级数解(29)及其零级近似(27)有

$$T = a^{5/2}\left(m + \frac{n}{a}\right)e^{-i\int_0^t\left(m+\frac{n}{a}\right)dt}. \tag{33}$$

作
$$\tau = \frac{1}{\omega}\left(mt - \frac{n\gamma^p}{k-1}\, t^{-(k-1)}\right)$$

代入(33)式有

$$T = a^{5/2}\left(m + \frac{n}{a}\right)e^{-i\omega\tau}. \tag{34}$$

其中 ω 为常量,我们再次看到,当 $a \to$ 常数时,(34)式简化为标准 Minkowski 模式,所以称形如(25)的解为绝热真空解.

参 考 文 献

[1] Parker. L, *Phys. Rev*, **183**(1969), 1057.

[2] Dewitt, B. S., *Phys. Rep*, **19c**(1975), 297.

[3] Mamaev. S. G., Mostepanenko. V. M, and Starobinski. A. A, *Sov. Phys. JETP*, **43**(1976), 823.

[4] Castagnino. M., Chimento. L, and Harari. D, *Phys. Rev*, D. **24**(1981), 290.

[5] Castagnino. M., Chimento. L, *G. R. G*, **V18. N2.** (1986), 193.

[6] Cohen, J. M., Powers. R. T, *Commun. Math. Phys*, **86**(1982), 69.

[7] Birrell, N. D., "Quantum Fields in Curved Space" (1982).

VACUUM SOLUTIONS OF DIRAC IN A R-W UNIVERSE

LI YUANJIE

(Hua Zhong University of Science and Technology, Wuhan)

ABSTRACT

Vacuum solutions of Dirac's equations in a R-W universe. The exact solution $\Omega_n = n/a$ for $m=0$ and the solution $\Omega_n = m + n/a$ for $m \neq 0$ are shown to be generalized results of the an earlier work. These solutions can be interpreted as conformal vacuum or adiabatic vacuum.