第 12 卷 第 5 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 12, No. 5
1988 年 9 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Sept., 1988

一个改进的 Skyrme 模型

沈 齐 兴　　李 炳 安
(中国科学院高能物理研究所,北京)

摘　　要

本文研究了一个 $m_\pi \neq 0$ 时改进的 Skyrme 模型，计算了核子的静态性质,结果表明,和原先 Skyrme 模型的预言[3]相比,绝大部分数据有了改进,特别是 $\langle r^2\rangle_A^{1/2}$ 的值增大了一倍,为 0.56fm，已接近实验值.

六十年代初，Skyrme 提出了 $SU(2)\times SU(2)$ 手征对称的孤粒子理论[1]. 在这个理论中,基本场是玻色子场(例如 π 介子),而重子被描述为激发的孤粒子. 这个最简单的 Skyrme 模型的拉氏量为

$$\mathscr{L}=\frac{F_\pi^2}{16}\mathrm{Tr}\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger+\frac{1}{32e^2}\mathrm{Tr}[\partial_\mu UU^\dagger,\partial_\nu UU^\dagger]^2. \tag{1}$$

其中第二项是含有四次微商的项,称为 Skyrme 项,它的引入保证了理论有稳定的孤粒子解.

在文献[2]中,作者利用拉氏量(1)讨论了核子的静态性质. 但是,得到的大部分的结果比实验值小得多,特别是 π 介子衰变常数 F_π 和轴矢耦合常数 g_A，前者和实验值相差 30%,后者只有实验值的一半.

在这个模型中,π 介子的质量等于零. 为了引入 π 介子的质量，在文献[3]中增加了一项明显的手征对称破缺项

$$\mathscr{L}_1=\frac{1}{8}m_\pi^2F_\pi^2(\mathrm{Tr}U-2). \tag{2}$$

但是,由此出发计算得到的核子的静态性质没有多大改进[3,4]，尤其是轴矢形状因子的均方半径 $\langle r^2\rangle_A^{1/2}$ 的值只有 0.28fm,还不到实验值的一半. (所有的预言列于表 1 中)

在文献[5,6]中,作者从唯象的角度出发,抛弃了具有四次微商的 Skyrme 项,而引入了具有六次微商的项,即讨论了

$$\mathscr{L}=\frac{F_\pi^2}{16}\mathrm{Tr}\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger-\frac{1}{96m^2}\mathrm{Tr}\{[\partial_\mu UU^\dagger,\partial^\nu UU^\dagger][\partial_\nu UU^\dagger,\partial^\rho UU^\dagger][\partial_\rho UU^\dagger,\partial^\mu UU^\dagger]\}. \tag{3}$$

的情况. 六次微商项的引入同样能保证理论具有稳定的孤粒子解. 在此基础上计算得到的核子的静态性质,特别是 F_π 和 g_A 的值有了较大的改进[5,6].

本文 1987 年 8 月 17 日收到.

表 1

	本模型的预言	文献[3,4]的预言	实 验 值
m_N(MeV)	939(输入)	939(输入)	939
m_Δ(MeV)	1232(输入)	1232(输入)	1232
m_π(MeV)	138(输入)	138(输入)	138
F_π(MeV)	130	108	186
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{I=0}$ (fm)	0.72	0.68	0.72
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{I=1}$ (fm)	1.04	1.04	0.88
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{M,I=0}$ (fm)	0.71	0.74	0.81
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{M,I=1}$ (fm)	0.80	0.80	0.80
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{A}$ (fm)	0.56	0.28	0.72
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{S}$ (fm)	0.72	0.80	
μ_p	2.01	1.97	2.793
μ_n	−1.20	−1.24	−1.913
g_A	0.84	0.65	1.23
$g_{\pi NN}$	12.1	11.9	13.5
$g_{\pi N\Delta}$	18.1	17.8	20.3
$\mu_{N\Delta}$	2.27	2.3	3.3
σ(MeV)	54	49	36±20

本文讨论一个 $m_\pi \neq 0$ 的改进的 Skyrme 模型，其拉氏量为

$$\mathscr{L} = \frac{F_\pi^2}{16}\mathrm{Tr}\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger - \frac{1}{96m^2}\mathrm{Tr}\{[\partial_\mu UU^\dagger, \partial^\nu UU^\dagger][\partial_\nu UU^\dagger, \partial^\rho UU^\dagger][\partial_\rho UU^\dagger, \partial^\mu UU^\dagger]\} + \frac{1}{8}m_\pi^2F_\pi^2(\mathrm{Tr}U - 2). \tag{4}$$

这里 U 是如下形式的 $SU(2)$ 矩阵：(本文将采用文献[3]和[4]中的符号)

$$U = A(t)U_0(\boldsymbol{x})A^\dagger(t),$$
$$U_0(\boldsymbol{x}) = \exp\{iF(r)\hat{x}\cdot\boldsymbol{\tau}\},$$
$$A(t) = a_0(t) + i\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{\tau}, a_0^2 + \boldsymbol{a}^2 = 1. \tag{5}$$

$\boldsymbol{\tau}$ 是通常的泡里矩阵．其中 $F(r)$ 满足边界条件：

$$F(0) = \pi,\quad F(\infty) = 0. \tag{6}$$

(4)式中的 F_π 和 m 是具有质量量纲的待定常数，后面我们将会看到，它们的数值可以由核子的质量 m_N 和重子 Δ 的质量 m_Δ 来确定．

将 Skyrme 的假定(5)代入拉氏量(4)，我们可以得到孤粒子的质量

$$M = 4\pi\frac{F_\pi^{3/2}}{m^{1/2}}\left(M_1 + \frac{1}{4}\beta^2M_2\right). \tag{7}$$

其中

$$M_1 = \int d\tilde{r}\left\{\frac{1}{8}\tilde{r}^2\left(F'^2 + \frac{2\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right) + \frac{1}{\tilde{r}^2}F'^2\sin^4F\right\},$$

$$M_2 = \int d\tilde{r}\tilde{r}^2(1 - \cos F). \tag{8}$$

无量纲变量 $\tilde{r}=\sqrt{mF_\pi}r$，$F'=\frac{dF}{d\tilde{r}}$，β^2 定义为

$$\beta^2=\frac{m_\pi^2}{mF_\pi}. \tag{9}$$

由(7)式我们得到 $F(\tilde{r})$ 满足的运动方程：

$$\left(\frac{\tilde{r}^2}{4}+\frac{2}{\tilde{r}^2}\sin^4F\right)F''+\left(\frac{\tilde{r}}{2}-\frac{4}{\tilde{r}^3}\sin^4F\right)F'$$
$$+\frac{2}{\tilde{r}^2}F'^2\sin^2F\sin 2F-\frac{1}{4}\sin 2F-\frac{1}{4}\beta^2\tilde{r}^2\sin F=0. \tag{10}$$

利用边界条件(6)，我们可以用计算机求解方程(10)。数值解得到的 $F(\tilde{r})$ 的行为被表示在图1中。

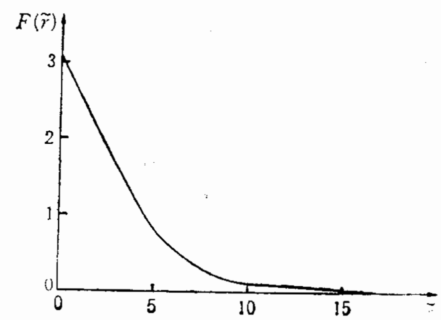

图 1

从拉氏量(4)我们得到

$$L=-M+\lambda\mathrm{Tr}[\partial_0A\partial_0A^\dagger]. \tag{11}$$

其中M已给出在(7)式中，

$$\lambda=\frac{2\pi}{3}\frac{F_\pi^{1/2}}{m^{3/2}}\Lambda,$$

$$\Lambda=\int d\tilde{r}\tilde{r}^2\sin^2F\left(1+8F'^2\frac{\sin^2F}{\tilde{r}^2}\right). \tag{12}$$

利用文献[3]中采用的集体坐标和正则量子化方法，同样可以得到核子和重子Δ的质量分别为

$$m_N=M+\frac{3}{8\lambda},$$
$$m_\Delta=M+\frac{15}{8\lambda}. \tag{13}$$

由此即可得到 m，F_π 与 m_N，m_Δ 和 m_π 之间的关系式：

$$m^4=\frac{4\pi^2}{81}\frac{\Lambda^2}{M_1}(m_\Delta-m_N)^2$$
$$\times\left\{\frac{1}{9}\Lambda(m_\Delta-m_N)(5m_N-m_\Delta)-m_\pi^2M_2\right\},$$

$$F_\pi = \frac{81m^3}{16\pi^2\Lambda^2(m_\Delta - m_N)^2}. \tag{14}$$

其中 M_1, M_2 和 Λ 分别由(8)式和(12)式给出，它们只依赖于方程(10)的解 $F(\tilde{r})$. 所以，有了 $F(\tilde{r})$ 我们就可以输入物理质量 $m_N = 939\mathrm{MeV}$, $m_\Delta = 1232\mathrm{MeV}$ 和 $m_\pi = 138$ MeV，由(14)式求出 m, F_π 的值，由(9)式求出 β^2 的值. 但方程(10)的求解依赖于唯一的参数 β^2 的值. 考虑到这种循环的依赖关系，我们在求解方程(10)时，用了多次迭代的方法. 图 1 中表出的 $F(\tilde{r})$ 是多次迭代后的自洽的结果. 这时相应的参数取值如下：

$$\begin{aligned} m &= 1895\mathrm{MeV}, \\ F_\pi &= 130\mathrm{MeV}, \\ \beta &= 0.278. \end{aligned} \tag{15}$$

利用文献[4]中采用的规范变换的方法，我们可以得到在这个模型中的矢量流和轴矢流分别为

$$\begin{aligned} V_\mu^a = &-\frac{i}{8}F_\pi^2 \mathrm{Tr}\{\tau^a(U^\dagger\partial_\mu U + U\partial_\mu U^\dagger)\} \\ &+ \frac{i}{32m^2}\mathrm{Tr}\{[\tau^a, \partial_\nu UU^\dagger][[\partial^\nu UU^\dagger, \partial_\rho UU^\dagger], [\partial^\rho UU^\dagger, \partial_\mu UU^\dagger]] \\ &+ [\tau^a, \partial_\nu U^\dagger U][[\partial^\nu U^\dagger U, \partial_\rho U^\dagger U], [\partial^\rho U^\dagger U, \partial_\mu U^\dagger U]]\}, \\ A_\mu^a = &\frac{iF_\pi^2}{8}\mathrm{Tr}\{\tau^a(\partial_\mu U^\dagger U - \partial_\mu UU^\dagger)\} \\ &+ \frac{i}{32m^2}\mathrm{Tr}\{[\tau^a, \partial_\nu U^\dagger U][[\partial^\nu U^\dagger U, \partial_\rho U^\dagger U], [\partial^\rho U^\dagger U, \partial_\mu U^\dagger U]] \\ &- [\tau^a, \partial_\nu UU^\dagger][[\partial^\nu UU^\dagger, \partial_\rho UU^\dagger], [\partial^\rho UU^\dagger, \partial_\mu UU^\dagger]]\}. \end{aligned} \tag{16}$$

利用给出在文献[3]和[4]中的计算公式，可以得到核子的同位旋标量均方半径

$$\langle r^2\rangle_{I=0} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{mF_\pi}\int d\tilde{r}\tilde{r}^2 F' \sin^2 F. \tag{17}$$

同位旋矢量均方半径

$$\langle r^2\rangle_{I=1} = \frac{1}{mF_\pi}\frac{1}{\Lambda}\int d\tilde{r}\tilde{r}^4 \sin^2 F\left\{1 + 8F'^2\frac{\sin^2 F}{\tilde{r}^2}\right\}. \tag{18}$$

同位旋标量磁均方半径

$$\langle r^2\rangle_{M,I=0} = \frac{3}{5}\frac{1}{mF_\pi}\frac{\int d\tilde{r}\tilde{r}^4 F'\sin^2 F}{\int d\tilde{r}\tilde{r}^2 F'\sin^2 F}. \tag{19}$$

和同位旋矢量磁均方半径

$$\langle r^2\rangle_{M,I=1} = \frac{3}{5}\langle r^2\rangle_{I=1}. \tag{20}$$

值得指出的是，正如文献[4]中已证明的，我们的公式(19)和(20)与文献[3]中相应的公式相差一个因子 $\frac{3}{5}$.

类似于文献[4]中的证明，在目前这个模型中，轴矢耦合常数 g_A 可以表示成

$$g_A = -\frac{2\pi}{9}D \qquad (\beta \neq 0 \text{ 时}). \tag{21}$$

其中

$$D = \frac{F_\pi}{m}\int d\tilde{r}\tilde{r}^2\left\{F' + \frac{\sin 2F}{\tilde{r}} + 8\left(\frac{1}{\tilde{r}^3}F'^2\sin^2 F\sin 2F + \frac{1}{\tilde{r}^4}F'\sin^4 F\right)\right\}. \tag{22}$$

π 介子-核子之间的相互作用常数 $g_{\pi NN}$ 和 g_A 之间仍满足如下的 Goldberger-Treiman 关系：

$$g_{\pi NN} = \frac{2m_N}{F_\pi}g_A. \tag{23}$$

在文献[7]中给出的，由关系式

$$g_{\pi NN}(q^2) = g_{\pi NN}\left\{1 - \frac{1}{6}\langle r^2\rangle_s q^2 + \cdots\right\}.$$

定义的核子的强作用半径的均方值 $\langle r^2\rangle_s$ 现在可以表示成

$$\langle r^2\rangle_s = \frac{3}{5}\frac{1}{\beta^2 m F_\pi}\left\{\beta^2\frac{\int d\tilde{r}\tilde{r}^5\sin F}{\int d\tilde{r}\tilde{r}^3\sin F} - 10\right\}. \tag{24}$$

而在文献[4]中给出的，由关系式

$$g_A(q^2) = g_A\left\{1 - \frac{1}{6}\langle r^2\rangle_A q^2 + \cdots\right\}.$$

定义的核子的轴形状因子的均方半径的表达式是

$$\langle r^2\rangle_A = \frac{3}{5m^2 D}\int d\tilde{r}\tilde{r}^4\left\{F' + \frac{2\sin 2F}{\tilde{r}} + \frac{16}{\tilde{r}^3}F'^2\sin^2 F\sin 2F + \frac{8}{\tilde{r}^4}F'\sin^4 F\right\}. \tag{25}$$

我们得到在这个模型中的同位旋标量 g 因子

$$g_{I=0} = -\frac{2m_N}{\pi^2}\frac{m^{1/2}}{F_\pi^{3/2}}\frac{1}{\Lambda}\int d\tilde{r}\tilde{r}^2 F'\sin^2 F. \tag{26}$$

同位旋矢量 g 因子

$$g_{I=1} = \frac{8\pi}{9}m_N\frac{F_\pi^{1/2}}{m^{3/2}}\Lambda. \tag{27}$$

(26)式和(27)式中的 Λ 由(12)式给出．由此即可得到质子和中子的磁矩分别为

$$\mu_p = \frac{1}{4}(g_{I=0} + g_{I=1}), \qquad \mu_n = \frac{1}{4}(g_{I=0} - g_{I=1}). \tag{28}$$

最后，文献[3]中给出的 π 介子-核子的 σ 项在这个模型中可以写成

$$\sigma = \pi\beta^2 \frac{F_\pi^{3/2}}{m^{1/2}} \int d\tilde{r}\tilde{r}^2(1 - \cos F). \tag{29}$$

上面给出的这些物理量的所有数值结果被列于表 1 中，和列在同一个表中的来自文献[3,4]的预言相比，大部分的数据都有不同程度的改进，尤其是 F_π，g_A 和 $\langle r^2\rangle_A$ 这三个量，有了较大改进，特别是 $\langle r^2\rangle_A^{1/2}$，本模型的预言比来自 Skyrme 模型[4]的预言增大了一倍，和实验值比较接近了.

本文讨论了 $m_\pi \neq 0$ 的一个改进的 Skyrme 模型，在这个模型中去掉了 Skyrme 项，增加了一个包含六次微商的项，计算结果表明，在 $m_\pi \neq 0$ 的情况下，六次微商项同样能保证理论具有稳定的孤粒子解，而且在此基础上计算得到的核子的静态性质和包含 Skyrme 项的 Skyrme 模型的预言相比，绝大部分有了改进，特别是 $\langle r^2\rangle_A^{1/2}$ 的值，增大了一倍，已接近实验值.

本工作得到国家自然科学基金支持，项目编号 1860170.

参　考　文　献

[1] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.*, **A260**(1961), 127.
[2] G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B228**(1983), 552.
[3] G. S. Adkins and C. R. Nappi, *Nucl. Phys.*, **B233**(1984), 109.
[4] Bing An Li and Qi Xing Shen, *Commun. in Theor. Phys.*, **6**(1986), 65.
[5] 王　维，中国科技大学硕士论文（1986).
[6] J. R. Wen and Tao Huang, BIHEP-TH-87-7.
[7] 李炳安，高能物理与核物理，**3**(1987)，426.

A MODIFIED SKYRME MODEL

Li Bingan　　Shen Qixing

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In this paper we study a modified skyrme model with $m_\pi \neq 0$ and compute the static properties of nucleons in this model. The results show that most of theoretical values have been improved, especially $\langle r^2\rangle_A^{1/2} = 0.56$ fm is two times as one from the original Skyrme model and it is close to experimental value.