第 12 卷 第 2 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 12, No. 2
1988 年 3 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1988

格点规范理论中 Fokker-Planck 方程的平均场解

薛 社 生
(中国高等科学中心，理论物理分中心)
(中国科学院高能物理研究所，北京)

摘　　要

将格点规范理论中的演化分布函数逐步地分解为单链变量分布函数的乘积，我们得到了 Fokker-Planck 方程的平均场近似解.

1981 年，G. Parisi 和吴詠时[1]提出了规范场理论的随机(Stochastic)量子化方案之后，这一新的量子化方法得到了广泛地研究. 格点规范理论中的随机量子化方案和 Monte Carlo 数值模拟有着紧密的相关，因而受到人们的日益重视. 和通常路径积分量子化不同的是，随机量子化方法着重于用从非平衡态到平衡态的演化方程（郎之万方程和 Fokker-Planck 方程）讨论物理问题. 格点规范理论中的动力学变量 $U_l(\tau)$ 随着第 5 维"时间" τ 的演化所满足的方程(郎之万方程)[2]，

$$\frac{\partial}{\partial\tau}U_l(\tau)=\frac{1}{2}\hat{E}_l(S)U_l(\tau)+i\xi_l^{(\tau)}U_l(\tau). \tag{1}$$

$$l=1,2,3,\cdots,\infty$$

其中，S 是格点系统的作用量，$\hat{E}_l$ 为定义在链 (l) 上的微分算符，

$$\hat{E}_l(S)\equiv U_l\frac{\delta(S)}{\delta\tilde{U}_l}-\frac{\delta(S)}{\delta\tilde{U}_l^{+}}U_l^{+}. \tag{2}$$

(1)式中的随机变量 ξ_l 为链上 $N\times N$ 的厄米随机矩阵，满足下述关系，

$$\begin{aligned}&\langle\xi_l^{ij}(\tau)\rangle_\xi=0\\&\langle\xi_l^{ij}(\tau)\xi_{l'}^{km}(\tau')\rangle_\xi=4\delta_{ll'}\delta_{im}\delta_{jk}\delta(\tau-\tau')\end{aligned} \tag{3}$$

相应于郎之万方程 (1) 的 Fokker-Planck 方程为[3]，

$$\frac{\partial}{\partial\tau}P(U,\tau)=-\frac{1}{2}\sum_l\mathrm{Tr}\hat{E}_l^2(P)-\frac{1}{2}\sum_l\mathrm{Tr}\hat{E}_l\{P\hat{E}_l(S)\}. \tag{4}$$

$P(U,\tau)$ 为在 τ"时刻" U 变量的分布函数. 方程(4)描述了 $P(U,\tau)$ 随第五维"时间" τ 的演化. 郎之万方程(1)和 Fokker-Planck 方程(4)是耦合得很强的方程，除了用计算机数值模拟以外，很难做到解析地精确求解. 下面我们试图得到方程(4)的一种近似解.

本文 1987 年 1 月 6 日收到.

首先定义单链变量的分布函数 $P_l(U_l,\tau)$

$$P_l(U_l,\tau)=\int\prod_{k\neq l}{}'\,dU_kP(U,\tau). \tag{5}$$

对方程(4)两边同时对 $\int\prod_{k\neq l}{}'\,dU_k$ 这一组态空间做积分，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}P_l(U_l,\tau)=&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\hat{E}_l^2[P_l(U_l,\tau)]\\&-\frac{1}{2}\sum_m\mathrm{Tr}\left\{\hat{E}_m\left[\int\prod_{k\neq l}{}'\,dU_kP(U,\tau)\hat{E}_m(S)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{6}$$

上式右边第二项的求和中，除 $m=l$ 外其余项为零．设式中的 S 为 Wilson 作用量

$$S=\beta\sum_p\left\{\frac{1}{2N}\mathrm{Tr}(U_p+U_p^+)-1\right\}. \tag{7}$$

于是由算符 $\hat{E}_m$ 的定义(2)，我们有，

$$\begin{aligned}\hat{E}_m(S)&=\frac{\beta}{2N}\sum_{\{p_m\}}(U_{p_m}-U_{p_m}^+)\\&=\frac{\beta}{2N}\sum_{\{p_m\}}\{U_mA_m-A_m^+U_m^+\}\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\sum_{\{p_m\}}$ 表示遍及和链 (m) 相连的所有元格变量 U_{p_m} 的求和．A_m 表示元格变量 U_{p_m} 中除掉 U_m 后其余变量之乘积．考虑到(8)式，(6)式可以写成，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}P_l(U_l,\tau)=&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\hat{E}_l^2[P_l(U_l,\tau)]\\&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\hat{E}_l\left[\frac{\beta}{2N}\int\prod_{k\neq l}{}'\,dU_kP(U,\tau)\sum_{\{p_l\}}(U_lA_l-A_l^+U_l^+)\right]\right\}\end{aligned} \tag{9}$$

再考虑如下的近似

$$\begin{aligned}&P(U,\tau)\cong P'(U',\tau)P_l(U_l,\tau)\\&P(U,\tau)\cong P''(U'',\tau)P_l(U_l,\tau)P_k(U_k,\tau)\quad l,k\ \text{为邻近}\\&P(U,\tau)\cong P'''(U''',\tau)P_l(U_l,\tau)P_k(U_k,\tau)P_i(U_i,\tau)\quad l,k,i\ \text{为邻近}\\&\cdots\cdots\\&P(U,\tau)\cong\prod_l^{\infty}P_l(U_l,\tau)\end{aligned} \tag{10}$$

其中，$P'(U',\tau)$ 表示分离出 U_l 后其余变量的分布函数，其余 $P''(U'',\tau)$，$P'''(U''',\tau)$ 类同．在(10)式中的第一式的基础上，方程(9)式中右边第二项近似地等于，

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\hat{E}_l[P_l(U_l,\tau)\hat{E}_l(\bar{S}_l)]\}\\&\bar{S}_l=\frac{\beta}{2N}\{\mathrm{Tr}[U_l\langle A_l\rangle+\langle A_l^+\rangle U_l^+]-1\}.\end{aligned} \tag{11}$$

$\bar{S}$ 相当于等效作用量，其中平均值 $\langle A_l\rangle$ 定义为：

$$\langle A_l \rangle = \int \prod_{k\neq l}{}' dU_k P'(U', \tau) A_l. \tag{12}$$

于是在近似(10)下,方程(4)可以写成单链变量的 Fokker-Planck 方程,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P_l(U_l, \tau) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\hat{E}_l^2[P_l] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\hat{E}_l\{P_l\hat{E}_l(\bar{S}_l)\}. \tag{13}$$

这个方程可以改写成扩散型方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}\mathbf{P}_l(U_l, \tau) &= -\hat{H}_l^{\mathrm{F\cdot P\cdot}}\mathbf{P}_l(U_l, \tau), \\ \mathbf{P}_l(U_l, \tau) &= e^{\frac{1}{2}\bar{S}_l}P_l(U_l, \tau). \end{aligned} \tag{14}$$

其中算符 $\hat{H}_l^{\mathrm{F\cdot P\cdot}}$ 是正定的

$$\begin{aligned} \hat{H}_l^{\mathrm{F\cdot P\cdot}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\hat{Q}_l^+ Q_l], \\ \hat{Q}_l &= \hat{E}_l + \frac{1}{2}\hat{E}_l(\bar{S}_l), \\ \hat{Q}_l^+ &= \hat{E}_l - \frac{1}{2}\hat{E}_l(\bar{S}_l). \end{aligned} \tag{15}$$

设 $\hat{H}_l^{\mathrm{F\cdot P\cdot}}$ 相应于本征值 λ_n 的本征函数为 $\psi_n(U_l)$

$$\hat{H}_l^{\mathrm{F\cdot P\cdot}}\psi_n(U_l) = \lambda_n\psi_n(U_l) \quad \lambda_n \geqslant 0. \tag{16}$$

立刻可以得到方程(14)的通解,

$$P_l(U_l, \tau) = e^{-\frac{1}{2}\bar{S}_l}\sum_n c_n e^{-\lambda_n \tau}\psi_n(U_l). \tag{17}$$

c_n 为迭加系数. 当演化至平衡态,即第 5 维"时间"趋向无穷大 ($\tau \to \infty$), 由于非负的本征值 λ_n,使得(17)中只有相应于 $\lambda_0 = 0$ 的基态有贡献

$$P_l(U_l, \tau) = c_0 e^{-\frac{1}{2}\bar{S}_l}\psi_0(U_l). \tag{18}$$

从本征方程(16)及(15)式,我们可以求出 $\hat{H}_l^{\mathrm{F\cdot P\cdot}}$ 的基态

$$\psi_0(U_l) = e^{-\frac{1}{2}\bar{S}_l}. \tag{19}$$

于是在 $\tau \to \infty$ 的情形下.

$$\begin{aligned} P_l(U_l) &= c_0 e^{-\bar{S}_l} \\ &= c_0 e^{-\frac{\beta}{2N}\{\mathrm{Tr}[U_l\langle A_l\rangle + \langle A_l^+\rangle U_l^+]-1\}}. \end{aligned} \tag{20}$$

常数 c_0 由归一化条件确定. 这恰恰就是平均场意义下的结果. 如果取进一步的近似

$$P'(U', \tau) \cong \prod_{k\neq l}^{\infty} P_k(U_k, \tau). \tag{21}$$

则:

$$\langle A_l \rangle \cong [\langle U_l \rangle_{P_l}]^3. \tag{22}$$

这就是平均场的零级近似结果.

得到上述结果是很自然的. 再仔细察看我们所取的近似 (10), 相当把其他场变量 $U_k(k \neq l)$ 的起伏变化对 U_l 的影响分离开,并代之为平均效应 $P'(U', \tau)$. 而在(11)式中,这种平均效应表现为 $\langle A_l \rangle$ 出现在等效作用量 $\bar{S}_l$ 中. 以平均效应代替了场变量之间的细致的关联, Fokker-Planck 方程(4)就等效为没有耦合的单链方程(13),其解自然应该

是平均场的解．如果考虑(10)式中的各级近似，我们将得到平均场的各级近似解．

作者感谢冼鼎昌教授的指导和讨论．

参　考　文　献

[1] G. Parisi 和吴詠时，中国科学，**24**(1981)，483.

[2] 薛社生，冼鼎昌，高能物理与核物理，**9**(1985)，703.

[3] 薛社生 (S.-S.Xue)，*Physics Letters*，**180**B (1986)，275；Communication in Theoretical Physics (in Press).

A MEAN FIELD SOLUTION TO FOKKER-PLANCK EQUATION IN LATTICE GAUGE THEORIES

XUE SHESHENG

(Theoretical Physics Centre, CCAST (World Laborary))

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

By decomposing the distribution function f lattice gauge system into the product of single link distribution functions, we obtained a mean field solution to the Fokker-Planck equation in Lattice Gauge Theories.